Вариант 1

5. Припишите к числу 523 справа три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

Решение.

Искомое число должно делиться на $7\cdot 8\cdot 9=540$. Пусть $\overline{abc}$ - число, которое нужно приписать. Тогда искомое число равно $523\overline{abc}=523000+\overline{abc}=1037*504+352+\overline{abc}$.

$352+\overline{abc}=504$, тогда $\overline{abc}$ = 152, или $352+\overline{abc}=504\cdot 2=1008$, тогда $\overline{abc}$ =656.

Ответ: 523152 и 523656.

6. Сумма в 95 копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет общим числом не более 14. Если все десятикопеечные монеты заменить пятикопеечными, а все пятикопеечные – десятикопеечными, то общая сумма уменьшится более чем в 1,6 раз. Сколько пятикопеечных и десятикопеечных монет было первоначально?

Решение.

Пусть x – количество десятикопеечных монет, y – количество пятикопеечных монет.
Заметим, что $x\le 9$, так как уже при x=10 сумма всех монет составит 100 копеек.
По условию:

$$\begin{cases}10x+5y=95\\ x+y\le 14\\ 1{,}6(5x+10y)\le 95\\ x\le 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=19-2x\\ x\ge 5\\ 8x+16y\le 95\\ x\le 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=19-2x\\ x\ge 5\\ x\ge 8\dfrac{17}{24}\\ x\le 9\end{cases}\Rightarrow$$ x=9, тогда y=1.

Ответ: 1 пятикопеечная монета и 9 десятикопеечных монет.

7. Найдите все пары чисел (x,y), удовлетворяющие соотношению
$\left(x^2-6|x|+10\right)\left(y^2+4y+7\right)=3$.

Решение.

Выделим полный квадрат: $\left((|x|-3)^2+1\right)\left((y+2)^2+3\right)=3$. Наименьшее значение, которое может принимать левая часть равенства, равно 3, когда $\left((|x|-3)^2+1\right)=1$ и $\left((y+2)^2+3\right)=3$. То есть, когда $(|x|-3)^2=0$ и $(y+2)^2=0$. Отсюда $y=-2$, $|x|=3$.
Решением являются две пары чисел (3;–2) и (–3;–2).
Ответ: (3;–2) и (–3;–2).

8. Решить уравнение. В ответ записать сумму различных корней уравнения.
$(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$.

Решение.

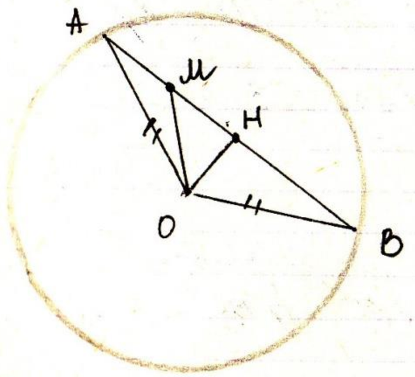
$(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$ запишем в виде $(x-2)(x-4)(x-3)^2=20$,
$(x^2-6x+8)(x^2-6x+9)=20$, сделаем замену $t=x^2-6x$, $(t+8)(t+9)=20$,
$t^2+17t+72=20$, $t^2+17t+52=0$, $t_1=-13; t_2=-4$. Вернемся к переменной x.

Решим два квадратных уравнения: (1) $x^2-6x+13=0$, нет решения, (2) $x^2-6x+4=0$, $x_1=3+\sqrt{5}; x_2=3-\sqrt{5}$. Сумма корней равна 6.

Ответ: 6.

9. Внутри круга, радиус которого равен 13, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5. Через точку M проведена хорда AB, длина которой равна 25. Определить длины отрезков, на которые хорда AB делится точкой M. В ответ записать отношение меньшего отрезка к большему.

Решение.



№1

Дано: $R=13$
M - внутренняя (.) круга
AB - хорда; $M\in AB$
$|AB|=25$
$|OM|=5$

Найти: AM и MB;

Решение: $\triangle AOB$ - р/б OH - высота $\triangle AOB$ $AH=\frac{1}{2}AB$

$MH=\sqrt{OM^2-OH^2}$

$OH=\sqrt{AO^2-AH^2}$

$MB=BH+MH=\frac{1}{2}AB+MH=\frac{1}{2}AB+\sqrt{OM^2-(AO^2-\frac{1}{4}AB^2)}$

$MB=\frac{25}{2}+\sqrt{25-169+\frac{1}{4}\cdot 625}=12{,}5+3{,}5=16$

$AM=AB-MB=25-16=9$

$\frac{MB}{AM}=\frac{16}{9}$

$\frac{9}{16}=0{,}5625$

Ответ: 0,5625

10. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Первый содержит 25% цинка, второй содержит 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в два раза больше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого и 300 кг второго, получили сплав, в котором оказалось 28% олова. Сколько кг меди в этом новом сплаве?

Решение.

Пусть x% - содержание олова в 1-ом сплаве.

1 сплав содержит 25% цинка + x% олова + медь,

2 сплав содержит цинк + x% /2 олова + 50% медь. Новый сплав содержит 28% олова.

Для нового сплава имеем соотношение $\frac{200x}{100}+\frac{300x}{2\cdot 100}=\frac{500\cdot 28}{100}$, $\frac{200x}{100}+\frac{300x}{2\cdot 100}=140$

x=40% олова в 1-ом сплаве. Следовательно, 1 сплав содержит 35% меди, 200 кг 1 сплава содержат 200*0,35=70 кг. Меди во 2 сплаве 50%, 300 кг такого сплава содержат 150 кг меди. Всего меди в новом сплаве 150+70=220 кг.

*Ответ:*220 кг.

Вариант 2

5. Если 4373 и 826 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 8 и 7. Чему равен делитель?

Решение.

Если от числа 4373 отнять 8, а от числа 826 отнять 7, получим числа 4365 и 819, которые делятся без остатка на одно и тоже число. Разложим на множители 4365 = 5*9*17, 819 = 7*9*13. Следовательно, делитель равен 9.

Ответ: 9.

6. Сумма в 85 копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет общим числом не более 14. Если все десятикопеечные монеты заменить пятикопеечными, а все пятикопеечные – десятикопеечными, то общая сумма уменьшится более чем в 1,6 раз. Сколько пятикопеечных и десятикопеечных монет было первоначально?

Решение.

Пусть x – количество десятикопеечных монет, y – количество пятикопеечных монет.
Заметим, что $x \le 8$, так как уже при $x=9$ сумма всех монет составит 90 копеек.
По условию:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 85 \\ x + y \le 14 \\ 1{,}6(5x + 10y) \le 85 \\ x \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 17 - 2x \\ x \ge 3 \\ 8x + 16y \le 85 \\ x \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 17 - 2x \\ x \ge 3 \\ x \ge 7\dfrac{19}{24} \\ x \le 8 \end{cases} \Rightarrow x=8, \text{ тогда } y=1.$$

Ответ: 1 пятикопеечная монета и 9 десятикопеечных монет.

7. Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие соотношению
$(x^2 - 6|x| + 11)(y^2 + 4y + 8) = 8$.

Решение. Аналогично варианту 1. Когда $(|x| - 3)^2 = 0$ и $(y + 2)^2 = 0$. Отсюда $y = -2$, $|x| = 3$.

Решением являются две пары чисел (3;–2) и (–3;–2)

Ответ: (3;–2) и (–3;–2).

8. Решить уравнение. В ответ записать сумму различных корней уравнения.
$(x+4)^2(x+10)(x-2) = -243$.

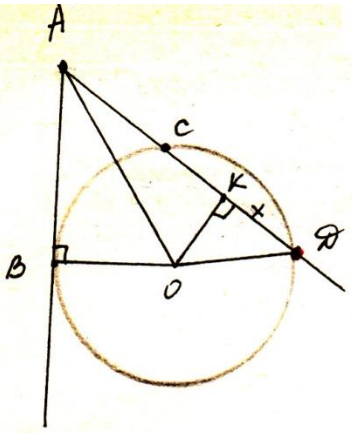
Решение. Аналогично задаче **8** в варианте 1. $(x^2 + 8x - 20)(x^2 + 8x + 16) = -243$, сделаем замену $t = x^2 + 8x$, $(t - 20)(t + 16) = -243$, $t^2 - 4t - 77 = 0$, $t_1 = -7; t_2 = 11$. Вернемся к переменной *x*.

Решим два квадратных уравнения: (1) $x^2+8x+7=0$, $x_1=-7; x_2=-1$, (2) $x^2+8x-11=0$, $x_1=-4+3\sqrt{3}; x_2=-4-3\sqrt{3}$. Сумма корней равна (-16).

Ответ: -16.

9. Из точки А, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки А до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Решение.



Дано: (·)A $\notin$ окр-ти
AB – касательная
AD – секущая
$OK \perp CD$
$OK = 5$
$AB = 16$
$AD = 32$

Найти: R

Решение: т.к. радиус, проведённый к точке касания $\perp$ касательной, то $OB \perp AB$ => $\triangle AOB$ – прямоугольный

Пусть $KD = x \Rightarrow AK = 32 - x$

Из $\triangle AKO$: $AO^2 = AK^2 + KO^2 = (32-x)^2 + KO^2$

Из $\triangle ABO$: $AO^2 = AB^2 + BO^2 = AB^2 + R^2$

$\Rightarrow (32-x)^2 + KO^2 = AB^2 + R^2$

Из $\triangle KOD$: $\underbrace{OD^2}_{=R^2} = KO^2 + KD^2 \Rightarrow KO^2 + x^2$

$$(32-x)^2 + \cancel{KO^2} = AB^2 + \underbrace{\cancel{KO^2} + x^2}_{R^2}$$

$$(32-x)^2 = AB^2 + x^2$$

$$1024 - 64x + x^2 = \cancel{AB}\ 256 + x^2$$

$$64x = 768$$

$$x = 12$$

$$R^2 = KO^2 + x^2$$

$$R^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow R = 13$$

Ответ: $R = 13$

Ответ: 13

10. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна. В ответ записать меньшее из двух найденных значений.

Решение.

Пусть $x\%$ - содержание хрома в 1-ом сплаве, $y\%$ - содержание хрома во 2-ом сплаве, $x\% < y\%$.

(1) Взяли m 1-го и 5m 2-го. $\frac{m\cdot x}{100}+\frac{5m\cdot y}{100}=\frac{6m\cdot 2x}{100}$.

(2) Взяли n 1-го и n 2-го. $\frac{n\cdot x}{100}+\frac{n\cdot y}{100}=\frac{2n\cdot 8}{100}$.

$\begin{cases} x+5y=12x \\ x+y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y=11x \\ x=16-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=11 \\ x=5 \end{cases}$. Содержание хрома. Меньшее значение = 5.

Ответ: 5 кг хрома.

Вариант 3

5. Сумма двух чисел равна 221, а НОК равно 612. Найдите эти числа.

Решение.

$a+b=221$ (нечетное), следовательно, a – четное, b – нечетное. $612=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 17$.

Сумма чисел не делится на 3, следовательно, только одно из чисел может иметь множители 3. Только одно из чисел, четное, может иметь множители 2. Оба числа могут иметь множитель 17. Таким образом $a=2\cdot 2\cdot 17=68$, $b=3\cdot 3\cdot 17=153$.

Ответ: 68 и 153.

6. В олимпиаде по математике участвовало не более 75 школьников, причем половина из них мальчики. Трое участников сдали работы первыми, и ушли, после этого мальчики стали составлять 48% среди оставшихся. Сколько всего школьников принимало участие в олимпиаде?

Решение.

Пусть x – количество школьников. Половина из них – мальчики, тогда можно записать $x=2n$, $2n\le 75$ по условию. Трое ушло, осталось $2n-3\le 72$. По условию, количество оставшихся мальчиков равно $0{,}48(2n-3)=k$, где $k\in N$. Отсюда $12(2n-3)=25k$. $12(2n-3)$ делится на 25, числа 12 и 25 взаимно простые, следовательно, $2n-3$ должно делиться на 25. Имеем следующие условия:

$$\begin{cases} 2n-3 \,\vdots\, 25 \\ 2n-3\le 72 \\ \text{число } (2n-3) - \text{нечетное} \end{cases} \Rightarrow 2n-3=25 \Rightarrow x=2n=28.$$

Ответ: 28.

7. Найти значение выражения $7t+5u+9x+11y-6z$, если известно, что $t+u+2x+3y-z=4$ и $-3t-u-x+y+2z=-3$.

Решение.

$7t+5u+9x+11y-6z=\alpha(t+u+2x+3y-z)+\beta(-3t-u-x+y+2z)$.

Приравняем коэффициенты:

$$\begin{cases} 7=\alpha-3\beta \\ 5=\alpha-\beta \\ 9=2\alpha-\beta \\ 11=3\alpha+\beta \\ -6=-\alpha+2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=4 \end{cases} \Rightarrow 7t+5u+9x+11y-6z=4\alpha-3\beta=16+3=19.$$

Ответ: 19.

8. Решить уравнение $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=3$. В ответ записать сумму всех решений уравнения

Решение.

Воспользуемся равенством $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

$x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=\left(x-\dfrac{x}{1+x}\right)^2+2\dfrac{x^2}{1+x}=\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)^2+2\dfrac{x^2}{1+x}$, сделаем замену $t=\dfrac{x^2}{1+x}$.

$t^2+2t-3=0$, $t_1=-3; t_2=1$. Вернемся к переменной *x*. $\dfrac{x^2}{1+x}=-3; \dfrac{x^2}{1+x}=1$.

Первое уравнение $\dfrac{x^2}{1+x}=-3$, $x^2+3x+3=0$, нет решения,

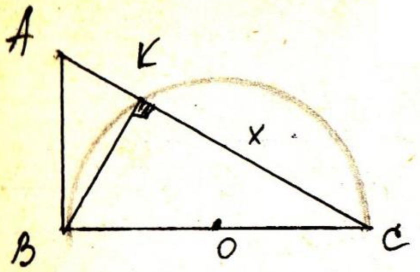
Второе уравнение $\dfrac{x^2}{1+x}=1$, $x^2-x-1=0$, $x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}; x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

Сумма корней уравнения равна 1.

Ответ: 1.

9. В прямоугольном треугольнике на большем катете, как на диаметре, построена полуокружность. Определить длину этой полуокружности, если меньший катет равен 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы с полуокружностью, равна 24 см. (Считать π=3,14).

Решение.



Дано: ΔABC – прямоуг.
На большем катете как на диаметре описана полуокр-ть
меньший катет $AB = 30$
$BK = 24$
Найти: $|\cup BKC|$

Решение: $\cup KC = x$

ΔBKC – прямоуг. (т.к. ∠BKC опирается на диаметр)

из Δ BKC: $BC^2 = BK^2 + KC^2$

$4R^2 = BK^2 + x^2$

Из ΔABK: $AK^2 = AB^2 - BK^2$

Из ΔABC: $BC^2 = AC^2 - AB^2 \Rightarrow 4R^2 = (AK+x)^2 - AB^2$

$$BK^2 + x^2 = (AK+x)^2 - AB^2$$

$$BK^2 + \cancel{x^2} = AK^2 + 2AK \cdot x + \cancel{x^2} - AB^2$$

$$BK^2 = \cancel{AB^2} - BK^2 + 2\sqrt{AB^2 - BK^2} \cdot x - \cancel{AB^2}$$

$$x = \frac{BK^2}{\sqrt{AB^2 - BK^2}}$$

π принят $= 3{,}14$

$$x = \frac{576}{\sqrt{900-576}} = \frac{576}{18} = 32$$

$$4R^2 = BK^2 + x^2 = 576 + 1024 = 40^2 \Rightarrow R = 20$$

$$|\cup BKC| = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = 20\pi$$

Ответ: 62,8

Ответ: 62,8

10. Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода осталось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

Решение.

Пусть выпущено x л смеси, осталось кислорода (8*0,16 – x * 0,16). Добавили азот, кислорода в новой смеси столько же, то есть (8*0,16 – x * 0,16).

Опять выпущено x л смеси, в этой смеси количество кислорода равно

(8*0,16 – x * 0,16)*x/8= x*(8 – x)*0,02. Добавили азот. В новой смеси из 8 кг кислорода осталось (8*0,16 – x * 0,16) – x*(8 – x)*0,02=x^2 *0,02 – 0,32x+8*0,16. Это составляет 9% от 8 литров. Получаем уравнение $x^2 - 16x + 28 = 0$, $x_1 = 2; x_2 = 14$ (не подходит, так как смеси всего8 л). $x = 2$.

Ответ: 2 литра смеси каждый раз выпускалось из сосуда.

Вариант 4

5. НОК двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а их НОД равен 18. Найдите эти числа.

Решение.

630 : 18 = 35, 35 = 5*7, так как искомые числа не делятся друг на друга, то эти числа могут быть только **5 * 18 = 90** и **7 * 18 = 126**.

Ответ: 90 и 126.

6. В олимпиаде по физике участвовало не более 70 школьников, причем половина из них девочки. Пятеро участников сдали работы первыми, и ушли, после этого девочки стали составлять 48% среди оставшихся. Сколько всего школьников принимало участие в олимпиаде?

Решение.

Пусть x – количество школьников. Половина из них – девочки, тогда можно записать $x=2n$, $2n \le 70$ по условию. Пятеро ушли, осталось $2n-5 \le 65$. По условию, количество оставшихся девочек равно $0{,}48(2n-5)=k$, где $k \in N$. Отсюда $12(2n-5)=25k$.
$12(2n-5)$ делится на 25, числа 12 и 25 взаимно простые, следовательно, $2n-5$ должно делиться на 25. Имеем следующие условия:

$$\begin{cases} 2n-5 \,\vdots\, 25 \\ 2n-5 \le 65 \\ \text{число } (2n-5) - \text{нечетное} \end{cases} \Rightarrow 2n-5=25 \Rightarrow x=2n=30.$$

Ответ: 30.

7. Найти значение выражения –8 t + 22 u + x + 2 y – 19 z, если известно, что t – 4 u + 3 x + y + 3 z = –2 и –t + 2 u + 2 x + y – 2 z = 3.

Решение. Аналогично задаче 7 в варианте 3.

$$\begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha = -3 \end{cases}, \text{ (-3)*(-2)+5*3=6+15=21.}$$

Ответ: 21.

8. Решить уравнение $x^2 + \frac{16x^2}{(x+4)^2} = 33$. В ответ записать сумму всех решений уравнения.

Решение. Аналогично задаче 8 в варианте 3.

$$x^2 + \frac{16x^2}{(4+x)^2} = \left(x - \frac{4x}{4+x}\right)^2 + 2\frac{4x^2}{4+x} = \left(\frac{x^2}{4+x}\right)^2 + 2\frac{4x^2}{4+x}, \text{ сделаем замену } t = \frac{x^2}{4+x}.$$

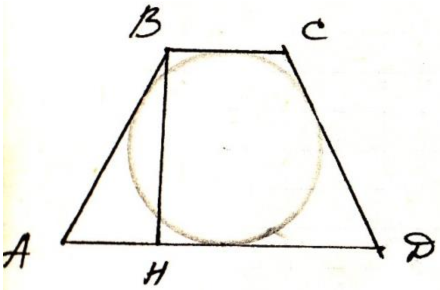
$t^2+8t-33=0$, $t_1=3; t_2=-11$. Вернемся к переменной x. $\frac{x^2}{4+x}=3; \frac{x^2}{4+x}=-11$.

Первое уравнение имеет решения $x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{57}; x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{57}$,

Второе уравнение не имеет решения.
Сумма корней уравнения равна 3.
Ответ: 3.

9. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение.



Дано: ABCD – р/б трапеция
$AB = CD = 17$
$d_{\text{впис. круга}} = 15$
Найти: BC и AD

Решение: $d = h_{\text{трапеции}} = BH$

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$

т.к. в трапецию вписана окр-ть $\Rightarrow AB + CD = BC + AD$

$2AB = BC + AD$

но $AD = 2AH + BC \Rightarrow 2AB = BC + 2AH + BC \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{2AB - 2AH}{2} = 17 - 8 = 9$

$AD = 2AH + BC = 2\cdot 8 + 9 = 16 + 9 = 25$

Ответ: 9 и 25.

10. Из бутыли, наполненной 12% раствором соли, отлили 1 литр и долили бутыль водой, затем отлили еще 1 литр и опять долили водой. В бутыли оказался 3% раствор соли. Какова вместимость бутыли (ответ дать в литрах)?

Решение.

Пусть x – вместимость бутылки, в ней x*0,12 – соли и x*0,88 – воды. 1 л смеси содержит 0,12 л соли и 0,88 л воды. Вылили 1 л, в новом растворе стало (x*0,12 – 0,12) соли. Долили водой, в одном литре нового раствора содержится (x*0,12 – 0,12)/x соли. Опять долили водой. Окончательно соли останется (x*0,12 – 0,12) – (x*0,12 – 0,12)/x, и это составит 3%. (x*0,12 – 0,12) – (x*0,12 – 0,12)/x=0,03*x. Получаем уравнение $3x^2-8x+4=0$, $x_1=2; x_2=2/3$ (не подходит, так как в бутыли > 1 л). $x=2$.

Ответ: 2.

Вариант 5

5. В следующих задачах расшифруйте запись **СПОРТ : 2 = КРОСС**, если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Решение.

КРОСС
+
КРОСС

СПОРТ

Две последние буквы РТ разные, следовательно, С≥5. Тогда О=9. Очевидно, что Т – четная цифра, а Р – нечетная. Так как О=9, П =2Р+1.
С=2К или С=2К+1, в любом случае К=1 не подходит.
При К=2, С=2К+1=5, тогда Т=0, Р=1. Получим 21955+21955=43910 (не подходит).
При К=3, С=6 или С=7. С=6 не подходит, в этом случае Р=3 и К=3. При К=3 и С=7 получаем Т=4, Р=5, получаем 35977+35977=71954 (подходит!).
При К=4, С=8 или С=9 (не подходит, 9 занята). При К=4, С=8 получим Р=7, тогда первая цифра в ответе С=9 (не подходит).
Таким образом ответ К=4, С=7, Р=5, О=9, П=1. Окончательно, 35977+35977=71954, или 71954 : 2 = 35977.

Ответ: 71954 : 2 = 35977.

6. В 9А классе процент учеников, повысивших успеваемость во втором полугодии, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Какое минимальное число учеников может быть в этом классе?

Решение.

Пусть в классе всего ***x*** учеников, ***y*** из них повысили успеваемость. По условию $0{,}029\cdot x \le y \le 0{,}031\cdot x$, $y:0{,}031 \le x \le y:0{,}029$ или $\frac{1000}{31}y \le x \le \frac{1000}{29}y$,

$32\frac{8}{31}y \le x \le 34\frac{16}{29}y$. Требуется найти минимальное число учеников, следовательно, ***y*=1.**

Тогда $32\frac{8}{31} \le x \le 34\frac{16}{29}$, $x = 33$ или $x = 34$. Минимальное значение 33.

Ответ: 33.

7. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$\left|1 + y - \sqrt{y^2 - 2xy + x^2}\right| + \left(y^2 - 6y + x^2 - 17\right)^2 = 0.$$

Решение.

Если сумма двух положительных слагаемых равна нулю, то каждое из слагаемых равно нулю.

$$\begin{cases} 1+y-\sqrt{y^2-2xy+x^2}=0 \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+y-|y-x|=0 \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y-x|=1+y \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} y-x=1+y \\ y-x=-1-y \end{array}\right. \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2y=x-1 \end{array}\right. \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-6y+x^2-17=0 \\ 2y=x-1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\begin{cases} x=-1 \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases}$, $y^2-6y+x^2-16=0$, $y=8$ или $y=-2$ (не подходит).

Первое решение (-1; 8).

$\begin{cases} y^2-6y+x^2-17=0 \\ 2y+1=x \end{cases}$, $5y^2-2y-16=0$, $y=2$ или $y=-8/5$ (не подходит).

Второе решение (5; 2).

Ответ: (-1; 8) и (5; 2).

8. Решите уравнение $\frac{4x}{x^2+x+3}-\frac{4x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$. В ответ запишите сумму различных решений уравнения.

Решение.

x не равен 0, по условию. $\frac{4}{x+1+3/x}-\frac{4}{x-5+3/x}=-\frac{3}{2}$, обозначим $t=x+3/x$,

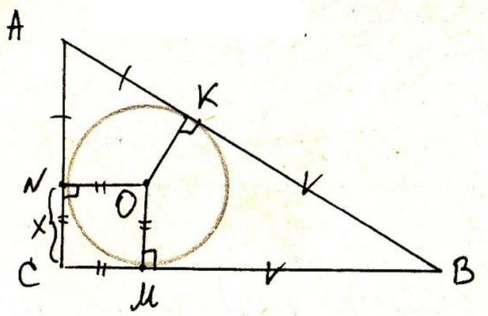
$\frac{4}{t+1}-\frac{4}{t-5}=-\frac{3}{2}, t\ne -1, t\ne 5$. Следовательно, $3t^2-12y-63=0, t=-3\, или\, t=7$.

$\left[\begin{array}{l} x+3/x=-3 \\ x+3/x=7 \end{array}\right.$, первое уравнение не имеет корней, корни второго равны $x=7/2\pm\sqrt{37}/2$.

Сумма корней равна 7.

Ответ: 7.

9. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольн.
$AK = 5$
$KB = 12$

Найти: AC; CB;

Решение: O – центр впис. окр-ти, лежит на $\cap$ биссектрис =>
=> $BM = BK$
$AN = AK$
Заметим, что четырёхугольник $NOMC$ – квадрат => $NC = CM = r$
$\exists\ NC = x$ => по теор. Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$ =>
=> $(AN+x)^2 + (x+MB)^2 = AB^2$

$$\left.\begin{aligned} &AN = 5\\ &MB = 12\\ &AB = AK+KB = 5+12 = 17\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &(5+x)^2 + (x+12)^2 = 17^2\\ &25+10x+x^2+x^2+24x+144 = 289\\ &x^2+17x-60 = 0\\ &D = 289+240 = 23^2\\ &x_1 = \frac{-17-23}{2} < 0 \quad \varnothing\\ &x_2 = \frac{-17+23}{2} = 3\end{aligned}$$

$AC = AN + x = 5+3 = 8$
$CB = x + MB = 3+12 = 15$

Ответ: 8 и 15.

10. В лаборатории имелось 5 кг смеси, содержащей фосфор. Израсходовав 2 кг смеси, добавили столько же второй смеси, содержащей 15% фосфора. После перемешивания снова израсходовали 2 кг и добавили столько же второй смеси. В результате получилась смесь, содержащая 24% фосфора. Определить массовую долю фосфора (в %) в первоначальной смеси.

Решение.
Пусть содержание фтора x%. В 2 кг содержится x*0,02 фосфора. После добавления второй смеси фосфора стало x*0,05–x*0,02+2*0,15 = x*0,03+0,3 фосфора. После второго перемешивания в смеси содержится 2/5*(x*0,03+0,3). Окончательно фосфора осталось (x*0,03+0,3)- 2/5*(x*0,03+0,3)+0,3, что составляет 24% от 5 кг.

3/5*(x*0,03+0,3)+0,3=5*0,24. Отсюда 9x=360, x=40% фосфора.

Ответ: 40%.

Вариант 6

5. В следующих задачах расшифруйте запись **ПОЛЕТ : 2 = ЛЕТО**, если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Решение.

ЛЕТО
+
ЛЕТО

ПОЛЕТ

П=1, О≠0, О≠1, Л≥6. Следовательно, Т=4 или 6 или 8.

Т=4, О=2, тогда Е=8, Л=6, О=3 (не подходит), Т=4, О=7, тогда Е=9, Л=8 (подходит),

Проверим другие варианты.

Т=6, О=3, тогда Е=2, Л=5 (не подходит), Т=6, О=8, тогда Е=3, Л=7, О=8 (не подходит),

Т=8, О=4, тогда Е=6, Л=3 (не подходит), Т=8, О=9, тогда Е=7, Л=5 (не подходит).

Таким образом, П=1, Т=4, О=7, тогда Е=9, Л=8, 17894 : 2 = 8947.

Ответ: 17894 : 2 = 8947.

6. В 9Б классе процент учеников, повысивших успеваемость во втором полугодии, заключен в пределах от 3,1% до 3,2%. Какое минимальное число учеников может быть в этом классе?

Решение.

Пусть в классе всего ***x*** учеников, ***y*** их них повысили успеваемость. По условию

$0{,}031\cdot x \le y \le 0{,}032\cdot x$, $y:0{,}032 \le x \le y:0{,}031$ или $\frac{1000}{32}y \le x \le \frac{1000}{31}y$,

$31{,}25y \le x \le 32\frac{8}{31}y$. Требуется найти минимальное число учеников, следовательно, ***y*=1.**

Тогда $31{,}25y \le x \le 32\frac{8}{31}y$, x = 32 или x = 33. Минимальное значение 32.

Ответ: 32.

7. Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению

$$\left|2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2}\right|+\left(y^2-4y+x^2+2x-21\right)^2=0.$$

Решение. Аналогично задаче 7 из 5 варианта.

Ответ: (–2;7), (4;1).

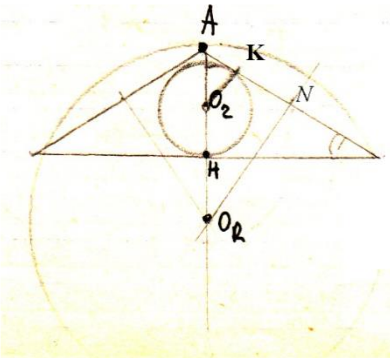
8. Решите уравнение $\frac{3x}{2x^2-10x+14}+\frac{4x}{2x^2-8x+14}=1$. В ответ запишите сумму различных решений уравнения.

Решение. Аналогично задаче 8 из 5 варианта. Корни x=1 и x=7. Сумма корней = 8.

Ответ: 8.

9. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей, в ответ записать их сумму.

В зависимости от данных могут реализоваться 2 случая, в данном случае имеем рисунок:



$HC = \frac{1}{2} BC = 8$

$AH = \sqrt{AC^2 + HC^2} = 6$

$\triangle AO_rK \backsim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AO_r}{AC} = \frac{O_rK}{HC} \Rightarrow \frac{AH-r}{AC} = \frac{r}{HC} \Rightarrow \frac{6-r}{10} = \frac{r}{8}$

$\left(\begin{array}{l} \exists\ AO_R = R \\ \exists\ O_rH = r \end{array}\right)$ $\Rightarrow 48r - 8r = 10r \Rightarrow \underline{\underline{r = 2\frac{2}{3}}}$

O_R - центр опис. окр-ти

O_r - центр впис. окр-ти

$\triangle AO_RN \backsim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AO_R}{AC} = \frac{AN}{AH}$, но $AN = \frac{1}{2} AC$ (т.к. центр опис. окр-ти лежит на ∩ серед. ⊥) $\Rightarrow \frac{R}{10} = \frac{5}{6} \Rightarrow \underline{\underline{R = 8\frac{1}{3}}}$

Сумма R+r = 11.

Ответ: 11.

10. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Первый содержит 40% олова, второй содержит 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого и 250 кг второго, получили сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько кг олова в этом новом сплаве?

Решение.

Пусть x% - содержание цинка в 1-ом сплаве.

1 сплав содержит x% цинка + 40% олова + медь,

2 сплав содержит x% цинка + олова + 26% медь. Новый сплав содержит 30% цинка.

Для нового сплава имеем соотношение $\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100}=\frac{400\cdot 30}{100}$, $40x=1200$, x=30% олова в 1-ом сплаве. Следовательно, 1 сплав содержит 40% олова, то есть 150 кг содержит 60 кг олова. Олова во 2 сплаве 100%-26%-30%=44%, 250 кг такого сплава содержат 110 кг олова. Всего олова в новом сплаве 60+110=170 кг.

Ответ: 170 кг олова.