Олимпиада «ГАЗПРОМ», 11-класс
Решения. Вариант №4

Задача 1. Решение

Потенциальная энергия взаимодействия двух тел принимается равной нулю на бесконечности. На конечных расстояниях r от центра Земли потенциальная энергия взаимодействия спутника с Землей равна

$$U = -\frac{GmM}{r}$$

M – масса Земли. Выражение для полной энергии спутника будет

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

Центростремительная сила

$$F_{цс} = \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \qquad v^2 = \frac{GM}{r} \qquad (1)$$

Если тело находится на поверхности Земли, то сила тяжести

$$mg_0 = \frac{GmM}{R^2}$$

Откуда $GM = g_0R^2$

Тогда $E = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mg_0R^2}{r}$ (2)

Как видео из (2) полная энергия спутника есть функция скорости спутника и радиуса его орбиты. Сделаем полную энергию спутника функцией только скорости. Из (1) выразим радиус орбиты и подставим в (2)

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mg_0R^2v^2}{GM} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mg_0R^2v^2}{g_0R^2} = -\frac{mv^2}{2} \qquad (3)$$

Скорость спутника равна

$$V^2 = \frac{GM}{r} = \frac{g_0R^2}{r} \qquad v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Так как спутник движется в верхних слоях атмосферы, то можно считать, что радиус орбиты равен радиусу Земли, то есть

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} = \sqrt{g_0R}$$

Работа сил сопротивления уменьшает полную энергию спутника. Поэтому модуль скорости спутника возрастает (из выражения 3)

$$A_C = -F_C \cdot 2\pi R = E(v + \Delta v) - E(v)$$

$$E(v) = -\frac{mv^2}{2}; \quad E(v + \Delta v) = -\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} = -\frac{mv^2}{2} - mv \cdot \Delta v - \frac{m \cdot \Delta v^2}{2}$$

Слагаемым $\frac{m\cdot\Delta v^2}{2}$ ввиду его малости можно пренебречь. Тогда

$$-F_C\cdot 2\pi R=-mv\cdot\Delta v \qquad \Delta v=\frac{F_C\cdot 2\pi R}{mv}$$

И окончательно

$$\Delta v=\frac{F_C\cdot 2\pi R}{m\sqrt{g_0 R}}=\frac{F_C\cdot 2\pi}{m}\sqrt{\frac{R}{g_0}}=\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 3{,}14}{10}\sqrt{\frac{6{,}4\cdot 10^6}{9{,}8}}=0{,}25\frac{м}{с}$$

Задача 2. Решение

Молярная теплоемкость вещества $C_V = c_V\cdot\mu$, где c_V удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Откуда $c_V=\frac{C_V}{\mu}$

$Q = \Delta U + A$. Для изохорного процесса $A = 0$. Тогда $Q = \Delta U$

$$Q=\Delta U=m\cdot c_V\cdot\Delta T=\frac{mC_V\cdot\Delta T}{\mu} \qquad \Delta T=\frac{Q\cdot\mu}{m\cdot C_V} \quad (1)$$

$$pV=\frac{m}{\mu}RT \qquad m=\frac{pV\mu}{RT} \qquad (2)$$

(2) в (1)

$$\Delta T=\frac{QRT}{C_V pV}=\frac{8350\cdot 8{,}31\cdot 300}{21\cdot 10^7\cdot 10^{-3}}=99{,}1(К)$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 300 + 99{,}1 = 399{,}1\ (К)$$

Процесс изохорный

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T}$$

$$p_2=\frac{p_1T_2}{T_1}=\frac{p_1(T+\Delta T)}{T_1}=p_1\left(1+\frac{\Delta T}{T_1}\right)=10^7\left(1+\frac{99{,}1}{300}\right)=13{,}3(МПа)$$

Задача 3. Решение

Вычислим напряжения на каждом из конденсаторов при их последовательном соединении.

$$q_1 = q_2 \qquad C_1U_1 = C_2U_2 \qquad U = U_1 + U_2 \qquad U_2=\frac{C_1U_1}{C_2}$$

$$U=U_1+\frac{C_1U_1}{C_2}=U_1\frac{C_1+C_2}{C_2} \qquad U_1=\frac{C_2U}{C_1+C_2}$$

$$U_2=\frac{C_1C_2U}{C_2(C_1+C_2)}=\frac{C_1U}{C_1+C_2}$$

большее напряжение существует между пластинами конденсатора емкостью $C = 2/3 \cdot 10^3$ пФ ($U_1 > U_2$)

Поэтому вначале будет пробит диэлектрик в первом конденсаторе. После этого все напряжение источника будет приложено между пластинами второго конденсатора и диэлектрик пробивается

$$U_1 = E_1 d = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}$$

И напряженность поля, при которой происходит пробой диэлектрика, равна

$$E_1 = \frac{C_2 U}{d(C_1 + C_2)} = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}6 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{В}{м}\right)$$

<u>*Задача 4. Решение*</u>

Обозначим Q – количество теплоты, отданное при нагревании воды

kt – потери энергии в окружающее пространство

$$\begin{cases} \frac{U_1^2}{R} t = Q + kt_1 \\ \frac{U_2^2}{R} t = Q + kt \end{cases} \qquad \begin{cases} kt_1 = \frac{U_1^2}{R} - Q \\ kt_2 = \frac{U_2^2}{R} - Q \end{cases}$$

$$\frac{kt_1}{kt_2} = \frac{\frac{U_1^2}{R} t_1 - Q}{\frac{U_2^2}{R} t_2 - Q} \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{U_1^2 t_1 - RQ}{U_2^2 t_2 - RQ}$$

$$U_2^2 t_1 t_2 - RQt_1 = U_1^2 t_1 t_2 - RQt_2 \qquad RQ(t_2 - t_1) = (U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2$$

$$R = \frac{(U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2}{Q(t_2 - t_1)}$$

Выразим коэффициент пропорциональности

$$kt_1 = \frac{U_1^2 t_1}{R} - Q \qquad k = \frac{U_1^2}{R} - \frac{Q}{t_1}$$

$$k = \frac{U_1^2 Q(t_2 - t_1)}{(U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2} - \frac{Q}{t_1} = \frac{Q}{t_1}\left(\frac{U_1^2 (t_2 - t_1)}{(U_1^2 - U_2^2) t_1} - 1\right)$$

$$k = \frac{Q}{t_1} \frac{U_1^2 (t_2 - t_1) - U_1^2 t_2 + U_2^2 t_1}{(U_1^2 - U_2^2) t_2} = \frac{Q}{t_1} \frac{U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1}{(U_1^2 - U_2^2) t_1}$$

Запишем уравнение энергетического баланса при напряжении U_3

$$\frac{U_3^2}{R}t_3 = Q + kt_3 \qquad Q = \left(\frac{U_3^2}{R} - k\right)t_3$$

$$\frac{U_3^2 - kR}{R}t_3 = Q \qquad t_3 = \frac{QR}{U_3^2 - kR}$$

$$t_3 = \frac{Q\dfrac{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}{Q\left(t_2 - t_1\right)}}{U_3^2 - \dfrac{U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_2} \cdot \dfrac{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}{Q\left(t_2 - t_1\right)}} = \frac{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}{U_3^2\left(t_2 - t_1\right) - U_2^2 t_2 + U_1^2 t_1}$$

$$t_3 = \frac{\left(120^2 - 110^2\right)20 \cdot 28}{100^2\left(28 - 20\right) - 110^2 \cdot 28 + 120^2 20} \approx 44(\text{мин})$$

Задача 5. Решение

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1 + \Delta\ell}{g}}$$

$N_1 = \dfrac{\Delta t}{T_1}$ $\qquad N_2 = \dfrac{\Delta t}{T_2}$ - число колебаний каждого маятника за некоторый промежуток времени Δt

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta t \cdot T_2}{\Delta t \cdot T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{2\pi \cdot \sqrt{\ell_1 + \Delta\ell} \cdot \sqrt{g}}{2\pi \cdot \sqrt{\ell_1} \cdot \sqrt{g}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_1}} = \frac{8}{7} \qquad \frac{\Delta\ell}{\ell_1} = \frac{64}{49} - 1 = \frac{15}{49}$$

$$\ell_1 = \frac{49}{15}\Delta\ell \qquad \ell_2 = \ell_1 + \Delta\ell = \frac{64}{15}\Delta\ell$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{49\Delta\ell}{15g}} = 14\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{15g}} = 14\pi\sqrt{\frac{0,15}{15 \cdot 9,8}} = 1,4(\text{c})$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{64\Delta\ell}{15g}} = 16\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{15g}} = 16\pi\sqrt{\frac{0,15}{15 \cdot 9,8}} = 1,6(\text{c})$$