Вариант 1

1. Найти все решения уравнения $(x+1)(x+2)(x+3)=x(x^2-4)$.

Решение: $(x+1)(x+2)(x+3)=x(x^2-4),\ x\in R$

$(x+1)(x+2)(x+3)=x(x-2)(x+2), \Rightarrow x=-2$ - решение.

$x^2+4x+3=x^2-2x,\ 6x=-3,\ x=-\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** $x=-2,\ x=-\dfrac{1}{2}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}=2$.

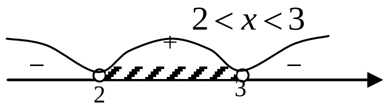
Решение: ОДЗ: $x\ge -4;\ x\ge 0 \Rightarrow x\ge 0$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}=2 \Rightarrow x+4=4+4\sqrt{2x}+2x \Rightarrow -x=4\sqrt{2x} \Rightarrow x\le 0$. С учетом ОДЗ, $x=0$.

Проверка $\sqrt{0+4}-\sqrt{2\cdot 0}=2$ **Ответ:** $x=0$.

3. Решить неравенство $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>1$.

Решение: ОДЗ $x\ne 2,\ x\ne 3$, $\dfrac{x(x-3)-2(x-2)-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}>0$,



$\dfrac{x^2-3x-2x+4-x^2+5x-6}{(x-2)(x-3)}>0,\ \dfrac{-2}{(x-2)(x-3)}>0$. **Ответ:** $(2;3)$.

4. Решить уравнение $\log_2(x-3)+\log_2(3+x)=4$.

Решение: ОДЗ: $x>3, x>-3 \Rightarrow x>3$

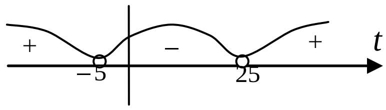
$\log_2(x-3)(x+3)=\log_2 2^4,\ x^2-9=16,\ x^2=25,$

$x=5,\quad x=-5$(не удовлетворяет ОДЗ) $\Rightarrow x=5$ **Ответ:** $x=5$.

5. Решить неравенство $5^x-5^{3-x}>20$.

Решение: $x\in R$

$5^x-\dfrac{5^3}{5^x}>20 \Rightarrow 5^{2x}-5^3>20\cdot 5^x\ \ (5^x>0) \Rightarrow (5^x)^2-20\cdot 5^x-5^3>0$



$5^x=t>0,\ t^2-20t-125>0,\ t_{1,2}=\dfrac{20\pm\sqrt{400+500}}{2}=\dfrac{20\pm 30}{2}=\left[\begin{array}{l}25\\-5\end{array}\right.$

$t>25, 5^x>25,\ x>2$. **Ответ:** $(2;+\infty)$.

6. На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

Решение: x - количество «2», $x+3$ - количество «5», $4x$ - количество «4», $4x-1$ - количество «3».

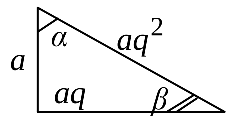
Всего $x+(x+3)+4x+4x-1=32 \Rightarrow 10x=30,\ x=3 \Rightarrow$ «5»: $x+3=6$; «4»: - $4x=12$

Ответ: $6; 12$.

7. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти острые углы этого треугольника.

Решение: т.Пифагора $(aq^2)^2=a^2+(aq)^2,\ a^2q^4=a^2(1+q^2);\ q^4-q^2-1=0$;

$(q^2)_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$;



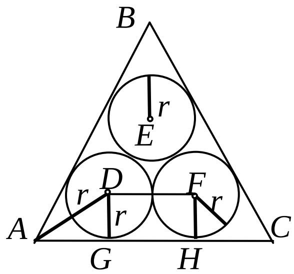
$\cos\alpha=\dfrac{a}{aq^2}=\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{-4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\in$ I четв.

$\cos\beta=\dfrac{aq}{aq^2}=\dfrac{1}{q}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ **Ответ:** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\arccos\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

8. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Дано: $r = 4$ дм

Найти: $S_{\Delta ABC}$



Решение: Круги равны $\Rightarrow \Delta ABC$ - правильный

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^o$

$DG \perp AC$ (радиус перпенд. касат.), $DG = r \Rightarrow$ из ΔADG $AD = 2r$

(катет против угла 30^o)

$AG = r\sqrt{3}$ (т.Пифагора)

$\Rightarrow AC = AG + GH + HC = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(AC)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(4+2\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 2r^2\left(2\sqrt{3}+3\right).$$

Ответ: $32\left(2\sqrt{3}+3\right)$см^2.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1; \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Решение: $x, y \in R$

$$\begin{cases} \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1; \\ y = \dfrac{\pi}{3} - x. \end{cases} \quad \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1;\ 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{3} - x}{2}\cos\frac{x - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{2} = 1;\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1;$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1;\ x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{3} - \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi k \end{cases}$$

Ответ: $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi k \end{cases} \ k \in Z$.

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

Решение: $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = A$ (обозначим)

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^3 = 6 + \sqrt{\frac{847}{27}} + 3\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} +$$

$$+3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2 + 6 - \sqrt{\frac{847}{27}} = 12 + 3\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}\left[\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right] =$$

$$= 12 + 3\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} \cdot A = 12 + 3\sqrt[3]{\frac{36\cdot 27 - 847}{27}} \cdot A = 12 + 5A$$

$A^3 = 12 + 5A \Rightarrow A^3 - 5A - 12 = 0$. Делители 12: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12$.

$A = 3$

$$\begin{array}{r|l} A^3 - 5A - 12 & A - 3 \\ \cline{2-2} -\underline{A^3 - 3A^2} & A^2 + 3A + 4 \\ 3A^2 - 5A & \\ -\underline{3A^2 - 9A} & \\ 4A - 12 & \\ -\underline{4A - 12} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\left(A-3\right)\left(A^2+3A+4\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} A = 3 \\ A^2 + 3A + 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow A = 3$$

Ответ: 3.

Вариант 2

1. Решить уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x-1)=3$.

Решение: $x\in R$, $\left(x^2+x\right)^2-1=3 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)^2=4 \Leftrightarrow x^2+x=\pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x^2+x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\left[\begin{array}{l}-2\\1\end{array}\right. \\ \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; 1$.

2. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

Решение: ОДЗ: $x\ge -1;\ x\ge -\dfrac{13}{4};\ x\ge -4 \Rightarrow x\ge -1$, $\qquad x+1+2\sqrt{4x^2+17x+13}+4x+13=3x+12$,

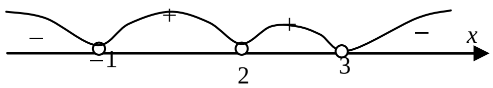
$$2\sqrt{4x^2+17x+13}=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+13)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{13}{4} \notin \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$$

Проверка: $\sqrt{0}+\sqrt{9}=\sqrt{9}$

Ответ: $x=-1$.

3. Решить неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$

Решение: $x\in(-1;2)\cup(2;3)$



Ответ: $x\in(-1;2)\cup(2;3)$.

4. Решить уравнение $\left(\lg\sqrt[5]{x}+\dfrac{1}{10}\right)\lg x=0{,}5+2\lg\sqrt{x}$.

Решение: $x>0$, $\qquad \dfrac{1}{5}\lg^2 x+\dfrac{1}{10}\lg x=\dfrac{1}{2}+\lg x \Leftrightarrow 2\lg^2 x+\lg x-10\lg x-5=0 \Leftrightarrow 2\lg^2 x-9\lg x-5=0$;

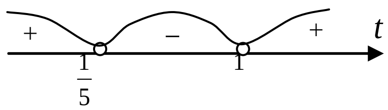
$$(\lg x)_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{121}}{4}=\left[\begin{array}{l}5\\-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.,\quad x_{1,2}=10^{\frac{9\pm\sqrt{121}}{4}}=\left[\begin{array}{l}10^5\\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{array}\right..$$

Ответ: $10^5;\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

5. Решить неравенство $5\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1\le 0$.

Решение: $x\in R$, $5\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^x+1\le 0$, $2^x=t>0$,

$5t^2-6t+1\le 0$,



$$t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{10}=\frac{6\pm 4}{10}=\left[\begin{array}{l}1\\ \dfrac{1}{5}\end{array}\right.,\ \frac{1}{5}\le 2^x\le 1,\ \log_2\frac{1}{5}\le x\le 0.$$

Ответ: $\left[\log_2\dfrac{1}{5};0\right]$.

6. При выполнении контрольной работы по математике 12% учеников не выполнили ни одного задания, 32% допустили ошибки, а остальные 14 человек решили задания верно. Сколько всего учеников в классе?

Решение: 12% - 0 заданий, 32% - с ошибками, 14 человек – верно решили.

44% $\Rightarrow$ 56% - 14 человек $\Rightarrow$ всего учеников $\dfrac{14\cdot 100}{56}=\dfrac{100}{4}=25$.

Ответ: 25.

7. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4, 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

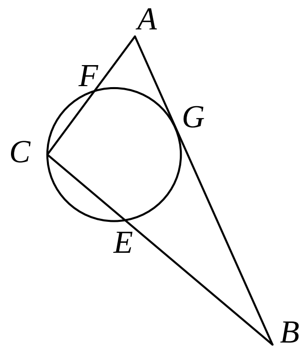
Решение: $a+a+d+a+2d=15$, $a+1, a+d+4, a+2d+19$,

$$\begin{cases} 3(a+d)=15 \\ \dfrac{a+2d+19}{a+d+4}=\dfrac{a+d+4}{a+1}; \end{cases} \begin{cases} a+d=5 \\ \dfrac{29-a}{9}=\dfrac{9}{a+1} \end{cases};\ 29a+29-a^2-a=81,\ a^2-28a+52=0,$$

$$a_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{28^2-52\cdot 4}}{2}=\frac{28\pm\sqrt{576}}{2}=14\pm 12=\left[\begin{array}{l}26\\2\end{array}\right.,\begin{cases}a_1=26\\d_1=-21\end{cases} \text{- не возрастает или } \begin{cases}a_2=2\\d_2=3\end{cases} \Rightarrow 2{,}5{,}8.$$

Ответ: $2{,}5{,}8$.

8. Две стороны треугольника соответственно равны 3 см и 5 см. Окружность, проходящая через середины этих сторон и их общую вершину, касается третьей стороны. Найти площадь треугольника.



Дано: $AC = 3$, $BC = 5$, $AF = FC$, $CE = BE$. **Найти** $S_{\Delta ABC}$.

Решение: $AG^2 = AF \cdot FC = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$, $AG = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$,

(по теореме о касательной и секущей)

$GB^2 = BE \cdot EC = \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{2}$, $GB = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

$AB = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$; $p = \frac{8+4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(-1+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)} = \sqrt{(16-8)(8-1)} = \sqrt{8 \cdot 7} = 2\sqrt{14}.$$

Ответ: $2\sqrt{14}$ см^2.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}; \\ \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = -\frac{3}{4}. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \frac{\cos x \cdot \cos y}{\sin x \cdot \sin y} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \sin x \cdot \sin y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) + \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{6} \\ \cos(x+y) = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = \pm arctg\,\frac{1}{6} + 2\pi k \\ x + y = \pm arctg\,\frac{1}{3} + 2\pi n \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2,3,4,} = \frac{1}{2}\left[\pm arctg\,\frac{1}{6} \pm arctg\,\frac{1}{3}\right] + \pi(k+n) \\ y_{1,2,3,4,} = \frac{1}{2}\left[\pm arctg\,\frac{1}{3} \mp arctg\,\frac{1}{6}\right] + \pi(n-k) \end{array} \right. \quad k, n \in Z.$$

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}$.

Решение: $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} = A$ (обозначим)

$$A^3 = 26 + \sqrt{675} + 3\left(\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\right)^2 \sqrt[3]{26-\sqrt{675}} + 3\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\left(\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}\right)^2 + 26 - \sqrt{675} =$$

$$= 52 + 3\sqrt[3]{\left(26+\sqrt{675}\right)\left(26-\sqrt{675}\right)}\left[\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\right] = 52 + 3\sqrt{676-675} \cdot A = 52 + 3A,$$

$A^3 - 3A - 52 = 0$, $A = 4$, $52 \vdots \pm 1; \pm 2; \pm 4; \ldots$, $(A-4)\left(A^2 + 4A + 13\right) = 0 \Rightarrow A = 4$

Ответ: 4.

Вариант3

1. Найти все решения уравнения $(x-1)(x-2)(x-3)=x(x^2-4)$.

Решение: $x\in R$, $(x-1)(x-2)(x-3)=x(x-2)(x+2)\Rightarrow x=2$ - решение,

$x^2-4x+3=x^2+2x$, $6x=3\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ **Ответ:** $\frac{1}{2}$; 2.

2. Решить уравнение $\sqrt{3x-14}-\sqrt{x-1}=3$.

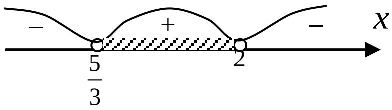
Решение: ОДЗ: $x\ge\frac{14}{3}$; $x\ge1$; $\Rightarrow x\ge\frac{14}{3}$.

$\sqrt{3x-14}=3+\sqrt{x-1}$, $3x-14=9+3\cdot2\sqrt{x-1}+x-1\Rightarrow 2x-22=3\cdot2\sqrt{x-1}\Rightarrow x-11=3\sqrt{x-1}$, $x>11$,

$x^2-22x+121=9(x-1)$, $x^2-31x+130=0$. $x_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{31\pm21}{2}=\left[\begin{array}{l}26\\ 5-\textit{постороннее}\end{array}\right.$.

Проверка: $\sqrt{78-14}-\sqrt{25}=3$. **Ответ:** $x=26$.

3. Решить неравенство $\frac{x-1}{2-x}>2$.



Решение: $\frac{x-1}{2-x}>2$, $x\ne2$

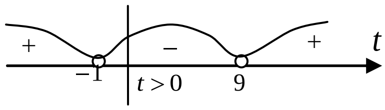
$\frac{x-1}{2-x}-2>0$, $\frac{x-1-2(2-x)}{2-x}>0$, $\frac{3x-5}{2-x}>0$ **Ответ:** $x\in\left(\frac{5}{3};2\right)$.

4. Решить уравнение $\lg(3x^2+7)-\lg(3x-2)=1$.

Решение: ОДЗ $x>\frac{2}{3}$, $\frac{3x^2+7}{3x-2}=10$, $3x^2-30x+27=0$; $x^2-10x+9=0$, $x=\left[\begin{array}{l}1\\ 9\end{array}\right.$

Проверка: $x=1:\lg10-\lg1=1$; $x=9:\ \lg(250)-\lg25=1$. **Ответ:** $1; 9$.

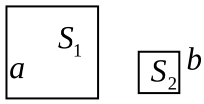
5. Решить неравенство $9^x-9^{1-x}>8$.



Решение: $x\in R$, $9^x-\frac{9}{9^x}-8>0$, $9^{2x}-8\cdot9^x>0$, $t=9^x>0$

$t^2-8t-9>0\Rightarrow t_1=-1, t_2=9$, $t>9$, $9^x>9\Rightarrow x>1$ **Ответ:** $x>1$.

6. От нити, равной периметру квадрата, отрезано с одного конца 36 см. Укороченная нить представляет периметр другого квадрата, площадь которого в $2\frac{1}{4}$ раза меньше площади первого квадрата. Определить первоначальную длину нити.



Решение: $\begin{cases}4a-36=4b\\ S_1=\frac{9}{4}\cdot S_2\end{cases}$, $\begin{cases}a-b=9\\ a^2=\frac{9}{4}b^2\end{cases}$, $\begin{cases}\frac{3}{2}b-b=9\\ a=\frac{3}{2}b\end{cases}$, $\begin{cases}b=18\\ a=27\end{cases}$, $4a=108$. **Ответ:** 108 см.

7. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, если известно, что сумма первого и последнего чисел равна 14, а сумма средних чисел равна 12.

Решение: a, aq, aq^2, aq^2+d - алгебраическая прогрессия.

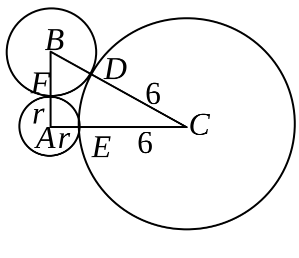
$$\begin{cases}a+aq+2d=14\\ aq+aq^2=12\\ aq^2=aq+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+aq+2aq^2-2aq=14\\ a(q+q^2)=12\\ aq^2-aq=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}aq^2-aq=d\\ a(q+q^2)=12\\ a(2q^2-q+1)=14\end{cases}\Rightarrow\frac{12}{q+q^2}=\frac{14}{2q^2-q+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow12q^2-6q+6=7q+7q^2\Rightarrow5q^2-13q+6=0,\ q_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{13\pm7}{10}=\left[\begin{array}{l}2\\ \frac{3}{5}\end{array}\right.$$

$q_1=2\Rightarrow a_1=\frac{12}{2+2^2}=2$, $2,4,8,12$, $(d_1=8-4=4)$

$$q_2=\frac{3}{5}\Rightarrow a_2=\frac{12}{\frac{3}{5}+\frac{9}{25}}=\frac{12\cdot 25}{24}=\frac{25}{2}\ ,\ \frac{25}{2},\frac{75}{10}=\frac{15}{2},\frac{225}{50}=\frac{9}{2},\frac{3}{2},\ \left(d_2=-\frac{6}{2}=-3\right).$$

Ответ: $2,4,8,12$; $\frac{25}{2},\frac{15}{2},\frac{9}{2},\frac{3}{2}$.



8. Центры трех попарно касающихся друг друга окружностей разных радиусов лежат в вершинах прямоугольного треугольника. Найти площадь этого треугольника, если известно, что радиусы наибольшей и средней окружностей соответственно равны 6 см и 4 см.

Дано: $CD=6=R_3,\ BD=4=R_2,\ \Delta ABC$ - прямоугольный. **Найти** $S_{\Delta ABC}$.

Решение: $BC=6+4=10$ (т.касания D лежит на BC), r - радиус малой окружности. $AB=r+4,\ AC=r+6,\ AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow(r+4)^2+(r+6)^2=10^2$,

$$r^2+8r+16+r^2+12r+36=100,\ r^2+10r-24=0,\ r_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\frac{-10\pm 14}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-12\end{array}\right.$$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}6\cdot 8=24$. **Ответ:** 24 см^2.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=\frac{\sqrt{3}-1}{4};\\ \cos x\cdot\cos y=\frac{\sqrt{3}+1}{4}.\end{cases}$

Решение: $x,y\in R\ \Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\\ \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(x-y)+\cos(x+y)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \cos(x-y)-\cos(x+y)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos(x+y)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\end{cases}\Rightarrow\ 2x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi n\\ -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi n\\ -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{9}+2\pi k+2\pi n\\ -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+\pi(k+n)\\ \frac{\pi}{12}+\pi(k+n)\\ -\frac{\pi}{4}+\pi(k+n)\\ -\frac{\pi}{12}+\pi(k+n)\end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n),-\frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)\\ \left(-\frac{\pi}{4}+\pi(s+l),\frac{\pi}{12}+\pi(s-l)\right)\\ \left(\frac{\pi}{12}+\pi(m+r),-\frac{\pi}{4}+\pi(m-r)\right)\\ \left(-\frac{\pi}{12}+\pi(t+u),\frac{\pi}{4}+\pi(t-u)\right)\end{array}\ k,n,l,s,m,r,t,u\in Z$.

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

Решение: $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=A$ (обозначим)

$$A^3=54+30\sqrt{3}+3\left(\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}\right)^2\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\right)^2+54-30\sqrt{3}=$$

$$=108+3\sqrt[3]{\left(54+30\sqrt{3}\right)\left(54-30\sqrt{3}\right)}\left[\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}-\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\right]=108+3\sqrt[3]{54^2-900\cdot 3}\cdot A=,$$

$$=108+3\cdot 3\sqrt[3]{27^2\cdot 2^2-100}\cdot A=108+18A,\ A^3-18A-108=0,\ A=6,\ (A-6)\left(A^2+6A+18\right)=0\Rightarrow A=6$$

Ответ: 6 .

Вариант 4

1. Решить уравнение $(x^2-x+1)(x^2-x-1)=3$.

Решение: $\left(x^2-x\right)^2-1=3$, $\left(x^2-x\right)^2=4$, $x^2-x=\pm 2$; $\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$,

$x^2-4x+3=x^2+2x$, $6x=3 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ **Ответ:** -1; 2.

2. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-13}=3$.

Решение: ОДЗ: $x\ge -2; x\ge 13; \Rightarrow x\ge 13$, $\sqrt{x+2}=3+\sqrt{x-13}$, $x+2=9+6\sqrt{x-13}+x-13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\sqrt{x-13}=6 \Rightarrow \sqrt{x-13}=1$, $x=14$. Проверка: $\sqrt{16}-\sqrt{1}=3$. **Ответ:** $x=14$.

3. Решить уравнение $\log_{16}x+\log_8 x+\log_2 x=\dfrac{19}{36}$.

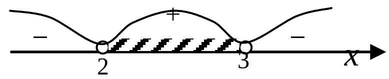
Решение: ОДЗ: $x>0$.

$\dfrac{1}{4}\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 x+\log_2 x=\dfrac{19}{36}$, $\dfrac{19}{12}\log_2 x=\dfrac{19}{36}$, $\log_2 x=\dfrac{1}{3}$, $x=2^{\frac{1}{3}}$ **Ответ:** $\sqrt[3]{2}$.

4. Решить неравенство $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>1$.

Решение: ОДЗ $x\ne 2; x\ne 3$,

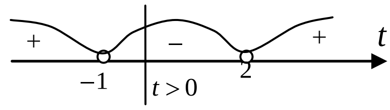
$\dfrac{x(x-3)-2(x-2)-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}>0$, $\dfrac{x^2-3x-2x+4-\left(x^2-5x+6\right)}{(x-2)(x-3)}>0$,



$\dfrac{-2}{(x-2)(x-3)}>0$; $x\in(2;3)$. **Ответ:** $(2;3)$.

5. Решить неравенство $3^{2x}>3^x+2$.

Решение: $x\in R$, $3^x=t>0$, $t^2-t-2>0 \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right.$,



$t>2$, $3^x>2 \Rightarrow x>\log_3 2$ **Ответ:** $(\log_3 2;+\infty)$.

6. Весной катер идет против течения в $1\dfrac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 10 км/ч медленнее, и катер идет против течения в $1\dfrac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найти скорость течения реки.

Решение: $\dfrac{v_{\text{к}}+v_{\text{т}}}{v_{\text{к}}-v_{\text{т}}}=\dfrac{5}{3}$ и $\dfrac{v_{\text{к}}+v_{\text{т}}-10}{v_{\text{к}}-(v_{\text{т}}-10)}=\dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{l} 3v_{\text{к}}+3v_{\text{т}}=5v_{\text{к}}-5v_{\text{т}} \\ 2v_{\text{к}}=8v_{\text{т}} \\ v_{\text{к}}=4v_{\text{т}} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} 2v_{\text{к}}+2v_{\text{т}}-20=3v_{\text{к}}-3v_{\text{т}}+30 \\ 5v_{\text{т}}-4v_{\text{т}}=50 \qquad v_{\text{т}}=50 \end{array}.$$

Ответ: 50 км/ч.

7. Найти три числа, составляющих геометрическую прогрессию, если известно, что их сумма равна 26, и при прибавлении к ним соответственно 1, 6 и 3 получится арифметическая прогрессия.

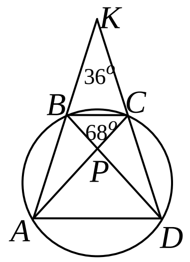
Решение:

$$\begin{cases} a+aq+aq^2=26 \\ aq+6-(a+1)=aq^2+3-(aq+6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(1+q+q^2\right)=26 \\ aq^2-2aq-8+a=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{26}{1+q+q^2} \Rightarrow$$

$$\frac{26q^2}{1+q+q^2}-\frac{52q}{1+q+q^2}-8+\frac{26}{1+q+q^2}=0 \Rightarrow 18q^2-60q+18=0 \Rightarrow 3q^2-10q+3=0,$$

$q_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\dfrac{10\pm 8}{6}=\left[\begin{array}{l} 3 \\ \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$, $\begin{array}{l} a=\dfrac{26}{1+3+9}=2 \\ a=\dfrac{26}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}}=18 \end{array}$, 2,6,18 или 18,6,2. **Ответ:** 2,6,18; 18,6,2.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи AB и CD пересекаются в точке K, а диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Найти угол BAC, если известно, что $\angle BPC = 68°$, $\angle AKD = 36°$.



Дано: $\angle BPC = 68^o$, $\angle AKD = 36^o$. **Найти** $\angle BAC.$

Решение: $$\begin{array}{l} \angle AKD = \dfrac{\cup AD - \cup BC}{2} \\ \angle BPC = \dfrac{\cup AD + \cup BC}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cup AD - \cup BC = 2\cdot 36^o \\ \cup AD + \cup BC = 2\cdot 68^o \end{cases}$$

$2 \cup BC = 2(68-36)$, $\cup BC = 32^o \Rightarrow \angle BAC = 32^o : 2 = 16^o$.

Ответ: 16^o.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}; \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Решение: $$\begin{array}{l} \sin y \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \sqrt{3}\cos x \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \\ \sin y = \pm\sqrt{1-3\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} = 3 \Rightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-3\cos^2 x} = 3,$$

$$1-\cos^2 x = 3-9\cos^2 x; 8\cos^2 x = 2,\ \cos^2 x = \frac{1}{4},\ \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2}; \cos = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \cos = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \left\{x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m\right\}; \left\{x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l\right\}; \\ \left\{x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi s\right\}; \left\{x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi t,\ y = -\dfrac{2\pi}{6} + 2\pi p\right\}. \end{array}$$

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$.

Решение: $\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55-\sqrt{3024}} = A$ (обозначим)

$$A^3 = 55+\sqrt{3024} + 3\left(\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\right)^2 \sqrt[3]{55-\sqrt{3024}} + 3\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\left(\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}\right)^2 + 55-\sqrt{3024} =$$

$$= 110 + 3\sqrt[3]{\left(55+\sqrt{3024}\right)\left(55-\sqrt{3024}\right)}\left[\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\right] = 110 + 3\sqrt[3]{3025-3024}\cdot A = 110 + 3A,$$

$A^3 - 3A - 110 = 0$, Делители $110 \vdots \pm1; \pm2; \pm5; \ldots$ $A = 5$, $(A-5)\left(A^2+5A+22\right) = 0 \Rightarrow A = 5$

Ответ: 5.

Вариант5

1. Найти все решения уравнения $(x+1)(x+3)(x+5)=x(x^2-9)$.

Решение: $x\in R$, $(x+1)(x+3)(x+5)=x(x-3)(x+3)$, $x=-3$- решение.

$x^2+6x+5=x^2-3x$, $9x=-5\Rightarrow x=-\frac{5}{9}$. **Ответ:** $-3;-\frac{5}{9}$.

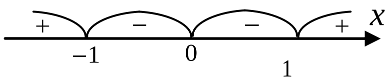
2. Решить уравнение $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

Решение: ОДЗ: $x\le 10$, $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$, $22-x=4+4\sqrt{10-x}+10-x\Rightarrow$

$\Rightarrow 8=4\sqrt{10-x}\Rightarrow\sqrt{10-x}=2$, $10-x=4$, $x=6$.

Проверка: $\sqrt{22-6}-\sqrt{10-6}=2$. **Ответ:** $x=6$.

3. Решить неравенство $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$.



Решение: ОДЗ: $x\ne\pm1$. $\frac{x^2+2}{x^2-1}+2<0$, $\frac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1}<0$,

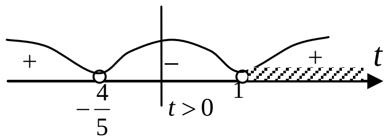
$\frac{3x^2}{(x-1)(x+1)}<0$ $x\in(-1;0)\cup(0;1)$ **Ответ:** $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

4. Решить уравнение $\lg(x-13)+3\lg2=\lg(3x+1)$.

Решение: ОДЗ $x>13; x>-\frac{1}{3}\Rightarrow x>13$, $(x-13)\cdot2^3=3x+1$, $5x=105$, $x=21$.

Проверка: $\lg8+\lg8=\lg64$. **Ответ:** 21.

5. Решить неравенство $5^{2x+1}>5^x+4$.



Решение: $x\in R$, $5\cdot5^{2x}-5^x-4>0$, $5^x=t>0\Rightarrow 5t^2-t-4>0$,

$t>1$, $5^x>1\Rightarrow x>0$

Ответ: $(0;+\infty)$.

6. В трех корпусах туристической базы живет 119 человек. В первом корпусе живет на 4 человека больше, чем во втором, и на 3 человека меньше, чем в третьем. Сколько человек живет в каждом корпусе?

Решение: x - живущих в 1-ом корпусе. Тогда $x-4$ - во 2-ом, $x+3$ - в 3-ем.

$x+x-4+x+3=119$, $3x=120$, $x=40$, $x-4=36$, $x+3=43$. **Ответ:** $40,36,43$.

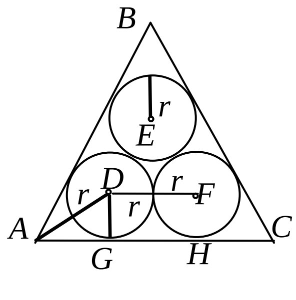
7. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если ее сумма равна 3, а сумма квадратов ее членов равна 4,5.

Решение:

$$\begin{matrix} a,aq,aq^2 \\ a^2,a^2q^2,a^2q^4 \end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{1-q}=3\\ \frac{a^2}{1-q^2}=4{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{1-q}=3\\ \frac{a}{1+q}=1{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3-3q=1{,}5+1{,}5q\\ a=3-3q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=\frac{1}{3}\\ a=2\end{cases}.$$

Ответ: $2,\frac{2}{3},\frac{2}{9};\dots$.

8. Три одинаковые круглые пиццы упакованы в треугольную коробку, попарно соприкасаясь, но не перекрывая друг друга. Найти радиус пиццы, если известно, что наименьшая возможная площадь такой коробки равна $4\sqrt{3}+6$ дм^2.



Решение: ΔABC - правильный, $\angle A=60^o$, $\angle DAC=30^o$. Построим $DG\perp AC$ и $FH\perp AC$, $DG=r\Rightarrow AD=2r$,

$AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=r\sqrt{3}$, $\Rightarrow AC=2r\sqrt{3}+2r$,

$S_{\Delta ABC}=\frac{(AC)^2\sqrt{3}}{4}$, $AC^2=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\Delta ABC}$. $AC^2=\frac{4}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}+6)$,

$4r^2(\sqrt{3}+1)^2=16+\frac{24}{\sqrt{3}}$. $4r^2=\frac{16+8\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}$; $r^2=\frac{4+2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}=1$, $r=1$. **Ответ:** 1 дм.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{3}{4}; \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

Решение: $x, y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) - \cos(x+y) = \dfrac{3}{2} \\ \cos(x-y) + \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n); \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n); \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + (m+l)\pi; \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(m-l). \end{cases}$

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

Решение: $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = A$ (обозначим)

$A^3 = 9 + \sqrt{80} + 3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2 \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} + 3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2 + 9 - \sqrt{80} =$

$= 18 + 3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}\left[\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right] = 18 + 3\sqrt[3]{81-80} \cdot A = 18 - 3A$,

$A^3 - 3A - 18 = 0$, $A = 3$, $(A-3)\left(A^2 + 3A + 6\right) = 0 \Rightarrow A = 3$

Ответ: 3.

Вариант 6

1. Решить уравнение $(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$.

Решение: $x\in R$, $\left(x^2+2x\right)^2-4=5$, $\Rightarrow \left(x^2+2x\right)^2=9$, $x^2+2x=\pm3$ $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3 \\ x^2+2x+3=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ответ: $-3;1$.

2. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

Решение: ОДЗ: $x\ge-\dfrac{1}{2}, x\ge3, x\ge0 \Rightarrow x\ge3$,

$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$, $\quad 2\sqrt{2x^2-5x-3}=x+2; \Rightarrow x\ge-2 \Rightarrow 4\left(2x^2-5x-3\right)=x^2+4x+4$,

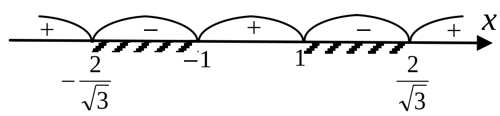
$7x^2-24x-16=0$, $x_{1,2}=\dfrac{24\pm\sqrt{(3\cdot8)^2+4\cdot16\cdot7}}{14}=\dfrac{24\pm8\sqrt{3^2+7}}{14}=\dfrac{12\pm16}{7}=\left[\begin{array}{l} 4 \\ -\dfrac{4}{7} \end{array}\right.$

Проверка: $\sqrt{2\cdot4+1}+\sqrt{4-3}=2\sqrt{4}; 3+1=4$.

Ответ: $x=4$.

3. Решить неравенство $\dfrac{x^2-2}{x^2-1}<-2$.

Решение: ОДЗ: $x\ne\pm1$. $\dfrac{x^2-2}{x^2-1}+2<0$, $\dfrac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1}<0$,



$\dfrac{3x^2-4}{(x-1)(x+1)}<0$ $\qquad x\in\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Решить уравнение $\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4\left(\dfrac{16}{3}\right)$.

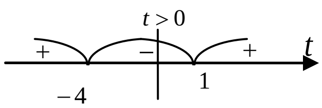
Решение: ОДЗ $x>-\dfrac{3}{2}; x>1 \Rightarrow x>1$, $\qquad (2x+3)(x-1)=\dfrac{16}{\left(\dfrac{16}{3}\right)}$, $2x^2+x-6=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{-1\pm7}{4}=\left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} \\ -2\notin \text{ОДЗ} \end{array}\right.$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

5. Решить неравенство $4^x>4-3\cdot2^x$.

Решение: $x\in R$, $2x=t>0$, $t^2+3t-4>0 \Rightarrow t_{1,2}=1;-4$,



$t>1$, $5^x>1\Rightarrow x>0$ **Ответ:** $(0;+\infty)$.

6. Факультет по плану принимает абитуриентов по специальностям *A*, *B* и *C* в отношении 4 : 3 : 6, однако в действительности на специальность *A* было принято на 4 человека, а на специальности *B* и *C* – на 5 и 6 человек больше, чем планировалось. При этом план приема был превышен на $7\dfrac{9}{13}$ %. Сколько человек было принято на каждую специальность?

Решение: $\left.\begin{array}{ll} A & 4k \\ B & 3k \\ C & 6k \end{array}\right\} 13k-100\%$, $4+5+6$ чел. $7\dfrac{9}{13}\%=\dfrac{100}{13}\%\Rightarrow$ всего принять следовало $15\cdot13=195$ чел.

$\Rightarrow k=15 \Rightarrow A-60; \Rightarrow B-45; \Rightarrow c-90$.

Ответ: $60,45,90$.

7. Найти сумму тринадцати первых членов геометрической прогрессии, если сумма пятого и девятого членов равна 6, а первый член равен 1.

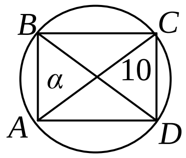
Решение: $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ...$ $a=1$, $aq^4+aq^8=6$, $q^4=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.$, $q=\pm\sqrt[4]{2}$,

$$S_n=\frac{q^n-1}{q-1},\quad S_{13}=\frac{\sqrt[4]{2}^{13}-1}{\sqrt[4]{2}-1}\frac{\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\left(8\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) \text{ или } S_{13}=\frac{\left(-\sqrt[4]{2}\right)^{13}-1}{-\sqrt[4]{2}-1}.$$

8. В круг радиуса 10 см вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Найти стороны прямоугольника.

Дано: $R=10$ см, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{окр}$. **Найти** AB, AD.

Решение: $R=10\text{ см}=1$ дм $S_{окр}=\pi R^2=\pi\cdot 1^2=\pi$, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{окр}=\frac{\pi}{2}$,



$$\begin{cases}AB\cdot AD=\frac{\pi}{2}\\AB^2+AD^2=2^2\end{cases},\quad \begin{cases}AD=\frac{\pi}{2AB}\\AB^2+\frac{\pi^2}{4AB^2}-4=0\end{cases}.\quad 4AB^4-16AB^2+\pi^2=0,$$

$$AB^2=\frac{16\pm\sqrt{16^2-16\pi^2}}{8}=\frac{16\pm 4\sqrt{16-\pi^2}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{16-\pi^2}}{2},\quad AB=\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{2}},\ AD=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{4\pm\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$ см.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2};\\\sin x\cdot\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}\sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\\sin x\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4\sin x}\\\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4\sin x}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=0\end{cases}\Rightarrow 4\sin^2 x+2\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x-\sqrt{3}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sin x=\frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{4\left(\sqrt{3}-1\right)^2+16\sqrt{3}}}{8}=\frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{4\left(4-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\right)}}{8}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{4}=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right..$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,$$
$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Решение: $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=A$ (обозначим)

$$A^3=20+\sqrt{392}+3\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^2\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^2+20-\sqrt{392}=$$

$$=40+3\sqrt[3]{\left(20+\sqrt{392}\right)\left(20-\sqrt{392}\right)}\left[\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right]=40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot A=40+6A,$$

$A^3-6A-40=0$, $A=4$, $(A-4)\left(A^2+4A+10\right)=0\Rightarrow A=4$

Ответ: 4.

Вариант7

1. Найти все решения уравнения $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$.

Решение: $x\in R$, $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x-3)(x+3)$, $x=3$- решение.

$x^2-6x+5=x^2+3x$, $5=9x\Rightarrow x=\dfrac{5}{9}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{9};3$.

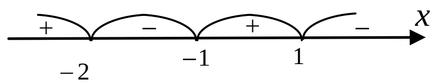
2. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$.

Решение: ОДЗ: $x\ge 1, x\ge -\dfrac{1}{3}\Rightarrow x\ge 1$, $x-1+2\sqrt{3x^2-2x-1}+3x+1=4$, $\sqrt{3x^2-2x-1}=2-2x;$

$(\Rightarrow x\le 1)\Rightarrow 3x^2-2x-1=4-8x+4x^2$, $x^2-6x+5=0$, $x=\left[\begin{array}{l}1\\ 5-\text{пост.}\end{array}\right.$

Проверка: $\sqrt{1-1}+\sqrt{3+1}=2$. **Ответ:** $x=1$.

3. Решить неравенство $\dfrac{2}{x+1}\ge\dfrac{3}{x+2}$.



Решение: ОДЗ: $x\ne -1, x\ne -2$. $\dfrac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}\ge 0$,

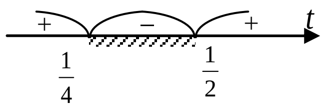
$\dfrac{-x+1}{(x+1)(x+2)}\ge 0$, $x\in(-\infty;-2)\cup[-1;1)$ **Ответ:** $(-\infty;-2)\cup[-1;1)$.

4. Решить уравнение $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{12}$.

Решение: ОДЗ $x>0$, $\log_3 x+\dfrac{1}{3}\log_3 x+\dfrac{1}{3}\log_3 x=\dfrac{11}{12}$, $\dfrac{11}{6}\log_3 x=\dfrac{11}{12}\Rightarrow\log_3 x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$.

5. Решить неравенство $8\cdot 4^x+1\le 6\cdot 2^x$.



Решение: $x\in R$, $2^x=t>0$, $8t^2-6t+1\le 0\Rightarrow$

$t_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2\cdot 8}=\dfrac{6\pm 2}{16}=\dfrac{3\pm 1}{8}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{array}\right.$, $\dfrac{1}{4}\le 2^x\le\dfrac{1}{2}$, $[-2;-1]$. **Ответ:** $[-2;-1]$.

6. На выставке кошек были представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сиамских кошек было в 2 раза больше, чем ангорских, персидских было в 1,5 раза больше, чем сиамских, а сибирских было на 13 меньше, чем персидских. Сколько было кошек каждой породы, если всего было представлено 77 кошек?

Решение: x - ангорских кошек. $2x$ - сиамских, $3x$ - персидских, $3x-13$ - сибирских.

$x+2x+3x+3x-13=77$, $9x=90$, $x=10$.

Ответ: 10 - ангорских кошек. 20 - сиамских, 30 - персидских, 17 - сибирских.

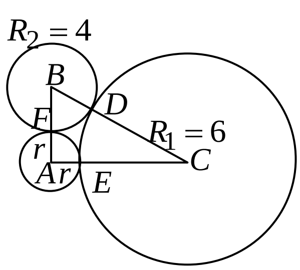
7. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\lg(2^x+1)$ образуют арифметическую прогрессию?

Решение: $\lg 2, \lg(2^x-1), \lg(2^x+1)$, арифметическая. $\lg(2^x-1)-\lg 2=\lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)$, $2^x-1>0$, ,

$x>0$. $\dfrac{2^x-1}{2}=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$, $(2^x-1)^2=2(2^x+1)$, $2^{2x}-42^x-1=0$, $2^x=2+\sqrt{2}$, $x=\log_2(2+\sqrt{5})$.

Ответ: $\log_2(2+\sqrt{5})$.

8. Центры трех попарно касающихся друг друга окружностей разных радиусов лежат в вершинах прямоугольного треугольника. Найти радиус меньшей окружности, если известно, что радиусы наибольшей и средней окружностей соответственно равны 6 см и 4 см.



Дано: $R_1=6$, $R_2=4$. **Найти** r.

Решение: $BC=BD+DC=6+4=10$ (т.касания D лежит на BC).

$AB=r+4, AC=r+6$, $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow(r+4)^2+(r+6)^2=10^2$,

$r^2+10r-24=0$, $r_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\dfrac{-10\pm 14}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\ -12\text{ - пост.}\end{array}\right.$ **Ответ:** 2 см.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2). \end{cases}$

Решение: ОДЗ: $x, y \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ tgx+tgy=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right) \end{cases} \Rightarrow$

$$tgx+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{3},\quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right);\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}-\frac{\sqrt{2}}{2}<-1$$

Ответ: $\varnothing$.

10. Вычислить значение выражения A^3+3A, если $A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Решение: $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=A$ (обозначим)

$$A^3=\sqrt{5}+2-3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-2\right)=$$

$$=4-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\left[\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right]=4-3\sqrt[3]{5-4}\cdot A=4-3A,$$

$$A^3+3A=4-3A+3A=4.$$

Ответ: 4.

Вариант 8

1. Решить уравнение $(x^2-2x+2)(x^2-2x-2)=5$.

Решение: $\left(x^2-2x\right)^2-4=5$, $\left(x^2-2x\right)^2=9$; $x^2-2x=\pm3$; $\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ x^2-2x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{array}\right.$.

$x^2-6x+5=x^2+3x$, $5=9x \Rightarrow x=\dfrac{5}{9}$. **Ответ:** $-1;3$.

2. Решить уравнение $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}=4$.

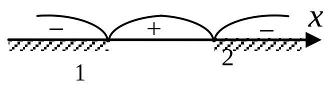
Решение: ОДЗ: $x\ge1, x\ge3 \Rightarrow x\ge3$,

$3x-3=16+x-3+8\sqrt{x-3}$, $2x-16=8\sqrt{x-3} \Rightarrow x-8=4\sqrt{x-3}$ $\quad(\Rightarrow x\ge8)$, $x^2-16x+64=16x-48$,

$x^2-32x+112=0$, $x_{1,2}\dfrac{32\pm\sqrt{(4\cdot8)^2-4\cdot4\cdot28}}{2}=\dfrac{32\pm4\sqrt{64-28}}{2}=16\pm12=\left[\begin{array}{l} 28 \\ 4 - \text{пост.} \end{array}\right.$

Проверка: $\sqrt{81}-\sqrt{25}=4$. **Ответ:** 28.

3. Решить неравенство $\dfrac{-x^3+2x^2+x-1}{2-x}<x^2$.



Решение: ОДЗ: $x\ne2$. $\dfrac{-x^3+2x^2+x-1-2x^2+x^3}{2-x}<0$, $\dfrac{x-1}{2-x}<0$,

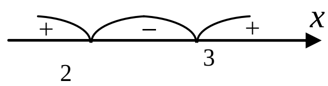
$x\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$ **Ответ:** $(-\infty;-2)\cup[-1;1)$.

4. Решить уравнение $\lg(3x-1)-\dfrac{1}{2}\lg(x+1)=\dfrac{1}{2}\lg(x+13)$.

Решение: ОДЗ $x>\dfrac{1}{3},\ x>-1,\ x>-13 \Rightarrow x>\dfrac{1}{3}$. $\qquad 2\lg(3x-1)-\lg(x+1)=\lg(x+13)$,

$(3x-1)^2=(x+13)(x+1)$, $9x^2-6x+1=x^2+14x+13$, $8x^2-20x-12=0$, $2x^2-5x-3=0$. **Ответ:** 3.

5. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$.



Решение: $x\in R$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+2}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left(2x^2-8x+14\right)}$, $2x+2<2x^2-8x+14$,

$2x^2-10x+12>0$, $x^2-5x+6>0$. **Ответ:** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

6.На заводе для изготовления одного электродвигателя типа A расходуется 2 кг меди и 4 кг свинца, на изготовление одного электродвигателя типа B расходуется 3 кг меди и 5 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа произведено на заводе, если известно, что израсходовали 146 кг меди и 258 кг свинца?

Решение: k - двигателей А $\Leftrightarrow$ $2k$ кг меди $+4k$ кг свинца,

n - двигателей В $\Leftrightarrow$ $3n$ кг меди $+5n$ кг свинца.

$\left\{\begin{array}{l} 2k+3n=146 \\ 4k+5n=258 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4k+6n=292 \\ 4k+5n=258 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n=34; \\ k=\dfrac{146-3\cdot34}{2}=22. \end{array}\right.$ **Ответ:** $22,34$.

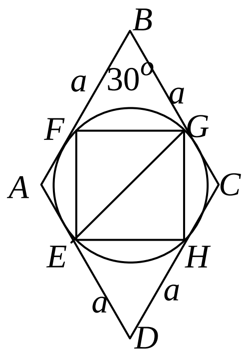
7. Найти количество членов арифметической прогрессии, сумма которой равна 36, если ее первый член равен 4, а последний 5.

Решение: $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$, $a=4$, $a_n=a+(n-1)d=5$; $S=36$.

$\left.\begin{array}{l} a_n=a+(n-1)d=5 \\ a=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (n-1)d=5-4,\ (n-1)d=1$,

$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n=\dfrac{4+4+(n-1)d}{2}n=\dfrac{9}{2}n=36 \Rightarrow n=8,\ d=\dfrac{1}{7}$. **Ответ:** 8.

8. В ромб с острым углом $30°$ вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.



Дано: $ABCD$ - ромб, $AB = a$, $\angle ABC = 30^o$ **Найти** $S_{ромб} : S_{квадр}$.

Решение: $S_{ABCD} = a^2 \sin 30^o = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow h = \dfrac{a}{2}$; $d = h = \dfrac{a}{2}$ диаметр окрестности.

$S_{ABCD} = a \cdot h$

$EG = d = \dfrac{a}{2}$ диагональ квадрата $EFGH$, $EF = \dfrac{EG}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, $S_{квадр} = EF^2 = \dfrac{a^2}{8}$;

$$\frac{S_{ромб}}{S_{квадр}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{8}} = 4$$ **Ответ:** 4.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} \sin x + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x - \cos x = 1+\sqrt{3}; \left(2+\sqrt{3}\right)\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}t^2 - 2\left(2+\sqrt{3}\right)t + 2\sqrt{3} = 0;\ t_{1,2} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{4\left(7+4\sqrt{3}\right) - 4\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}+2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = arctg\left(\sqrt{3}+2\right) + \pi k \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2arctg\left(\sqrt{3}+2\right) + 2\pi k \\ y = \dfrac{2\pi}{3} - 2arctg\left(\sqrt{3}+2\right) - 2\pi n \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \\ y = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi n. \end{array}\right.$$

10. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}$.

Решение: $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}} = A$ (обозначим)

$$A^3 = 40+\sqrt{1573} + 3\left(\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}\right)^2\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}} + 3\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}\left(\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}\right)^2 + 40-\sqrt{1573} =$$

$$= 80 + 3\sqrt[3]{\left(40+\sqrt{1573}\right)\left(40-\sqrt{1573}\right)}\left[\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}\right] = 80 + 3\sqrt[3]{27} \cdot A = 80 + 9A,$$

$A^3 - 9A - 80 = 0;\ A = 5;\ (A-5)\left(A^2 + 5A + 16\right) = 0;\ A = 5.$ **Ответ:** 5.