

10 класс. Вариант 1

1. Тело соскальзывает с наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. На первых $k=1/3$ пути коэффициент трения $\mu_1 = 0,5$. Определите коэффициент трения μ_2 на оставшемся отрезке пути, если у основания наклонной плоскости скорость тела равна нулю.

Решение:

В конце первой части пути скорость тела равна

$$V = \sqrt{2kSg(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)},$$

где S – длина наклонной плоскости; g – ускорение свободного падения.

Эта же скорость будет в начале второго участка пути и может быть выражена следующим образом:

$$V = \sqrt{2(k-1)Sg(\mu_2 \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Приравнявая подкоренные выражения, получим

$$\mu_2 = (\operatorname{tg} \alpha - k\mu_1)/(1 - k) = 0,62.$$

2. Три одинаковых бруска, каждый массой m , связанных между собой невесомыми нерастяжимыми нитями, движутся по горизонтальной поверхности под действием силы, приложенной к первому бруску и направленной вверх под углом α к горизонту. Найдите эту силу, если сила натяжения нити между последними брусками T , а коэффициент трения брусков о поверхность μ .

Решение:

Запишем уравнения динамики движения для третьего, второго и первого тел соответственно:

$$T - \mu mg = ma$$

$$T' - T - \mu mg = ma$$

$$F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - T' - \mu(mg - F \sin \alpha) = ma$$

Решая эту систему уравнений относительно F , получим

$$F = \frac{3T}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

3. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дроби́нка при выстреле вертикально вниз с высоты 300 м, чтобы при неупругом ударе дроби́нка полностью расплавилась? Считать, что количество теплоты, выделившаяся при ударе, поровну распределяется между дроби́нкой и поверхностью, о которую произошел удар. Начальная температура дроби́нки 177°C , температура плавления свинца 327°C , его удельная теплоёмкость $130 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$, удельная теплота плавления $22 \text{ кДж}/\text{кг}$.

Решение:

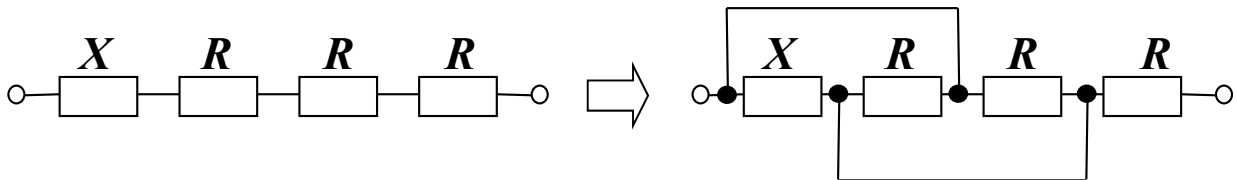
Составим уравнение по закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \left(m \frac{V^2}{2} + mgH \right) = cm\Delta T + \lambda m$$

Решая это уравнение относительно скорости, получим

$$V = 2\sqrt{c\Delta T + \lambda - gH} \approx 392,4 \text{ м/с}$$

4. Цепочку из четырех последовательных сопротивлений, содержащую три известных одинаковых сопротивления R и неизвестное сопротивление X с помощью двух проводов превращают в другую цепочку (см. рисунок). Каким должно быть неизвестное сопротивление X , чтобы полное сопротивление цепочки уменьшилось в три раза? Сопротивления проводов равны нулю.



Решение:

Начальное сопротивление цепочки $R_1 = 3R + X$. (1)

Конечное сопротивление $R_2 = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{X} \right)^{-1} + R = \frac{XR}{2X + R} + R$. (2)

Из уравнения $R_2 = \frac{R_1}{3} \Rightarrow \frac{XR}{2X + R} + R = R + \frac{X}{3}$. (3)

Полученное уравнение имеет два корня $X = 0$ и $X = R$.

5. Искусственный спутник Земли находится на круговой орбите высотой $h = 200$ км. Включается двигатель, и скорость спутника возрастает на $\Delta V = 5$ км/с. В результате он улетает в межпланетное пространство. Найдите скорость спутника вдали от Земли. Радиус Земли равен 6370 км, ускорение свободного падения у поверхности Земли $9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение:

$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$, где M_\oplus – масса Земли.

Для круговой орбиты по второму закону Ньютона

$\frac{mv^2}{R_\oplus + h} = G \frac{mM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{gR_\oplus^2}{R_\oplus + h}} \approx 7,8 \text{ км/с}$.

По закону сохранения механической энергии, считая, что вдали от Земли модуль потенциальной энергии мал по сравнению с кинетической

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - G \frac{mM_{\zeta}}{R_{\zeta} + h} = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - m \frac{gR_{\zeta}^2}{R_{\zeta} + h} = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - mv^2,$$

откуда

$$v_{\infty} = \sqrt{2v\Delta v + (\Delta v)^2 - v^2} \approx 6,5 \text{ км/с.}$$

6. В электрическом чайнике мощностью 1 кВт кипит вода. С какой скоростью из его носика вырывается струя пара, если площадь отверстия носика $S = 5 \text{ см}^2$, удельная теплота испарения воды $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$?

Ответ:

Количество теплоты, необходимое для испарения воды массой m , равно $Q = rm$. Мощность может быть определена как

$$N = \frac{dQ}{dt} = r \frac{dm}{dt}.$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева найдем

$$m = \frac{\mu p V}{RT},$$

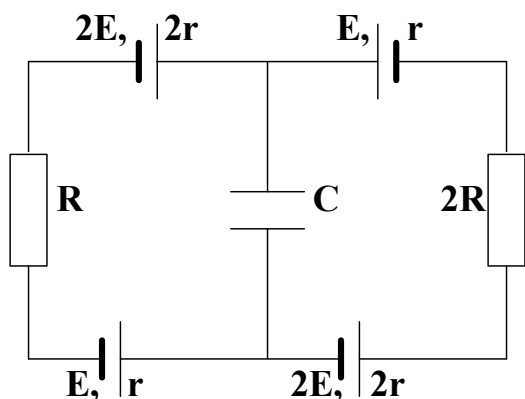
скорость испарения будет

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mu p}{RT} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{\mu p S}{RT} v,$$

где v - искомая скорость струи пара.

Из полученных выражений имеем

$$v = \frac{NRT}{rp\mu S} \approx 1,5 \text{ м/с.}$$



7. В схеме, приведенной на рисунке, найдите энергию конденсатора. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

Решение:

Выберем направление тока против часовой стрелки (по схеме). Сила тока равна

$$I = \frac{2E}{3R + 6r}$$

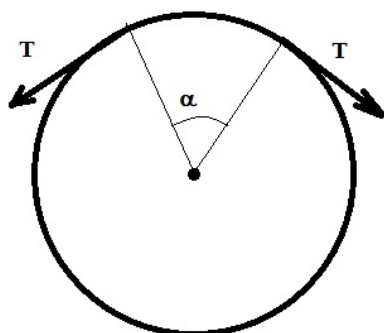
Напряжение между обкладками конденсатора равно

$$U = E \frac{12r + 5R}{6r + 3R}$$

Энергия конденсатора

$$W = \frac{CE^2}{2} \left(\frac{12r + 5R}{6r + 3R} \right)^2$$

8. Коэффициент жёсткости резинового жгута, длина которого L и масса m , равен k . Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определите радиус вращающегося кольца.



Решение:

В процессе вращения кольцо растягивается и увеличивает свою длину на ΔL .

Рассмотрим малый участок кольца, ограниченный радиусами $R = (L + \Delta L)/(2\pi)$, малый угол между которыми равен α . Масса этого участка равна

$$\Delta m = m \frac{\alpha}{2\pi}$$

При вращении кольца с угловой скоростью ω этот участок, так же, как и другие участки кольца, имеет центростремительное ускорение, равное

$$a_n = \omega^2 R = \omega^2 \frac{L + \Delta L}{2\pi}$$

Это ускорение создается силами натяжения $T = k\Delta L$, действующими на участок кольца со стороны остальной части кольца. Их равнодействующая с учетом малости угла α равна $T\alpha$.

По второму закону Ньютона

$$m \frac{\alpha}{2\pi} \omega^2 \frac{L + \Delta L}{2\pi} = k\Delta L\alpha$$

Изменение длины кольца равно

$$\Delta L = \frac{m\omega^2 L}{4\pi^2 k - m\omega^2}$$

Радиус вращающегося кольца равен

$$R = \frac{L}{2\pi} \left(1 + \frac{m\omega^2}{4\pi^2 k - m\omega^2} \right)$$

9. Два одинаковых шарика, сделанных из вещества с удельной теплоёмкостью 450 Дж/(кг·К), движутся навстречу друг другу со скоростями 40 м/с и 20 м/с. Определите, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого столкновения.

Решение:

Определим скорость u системы шариков после взаимодействия с помощью закона сохранения импульса:

$$2mu = mV_1 - mV_2$$

Потеря кинетической энергии системы шариков в процессе взаимодействия составляет

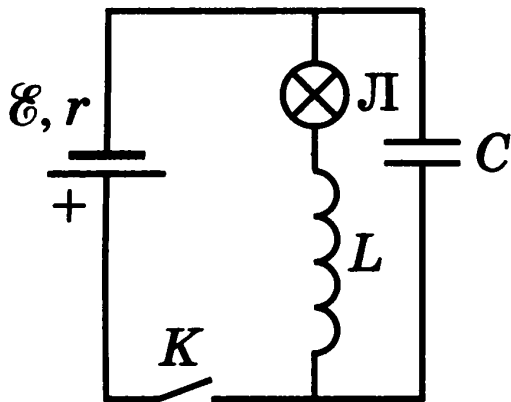
$$\Delta K = \frac{2mu^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} = m \left(\frac{V_1^2 + V_2^2}{2} - 2V_1V_2 \right)$$

В процессе соударения шарики получили количество теплоты Q , равное изменению их кинетической энергии, поскольку теплопередачей в окружающую среду за время соударения можно пренебречь. Тогда

$$cm\Delta t = m \left(2V_1V_2 - \frac{V_1^2 + V_2^2}{2} \right)$$

Изменение температуры

$$\Delta t = \frac{\left(2V_1V_2 - \frac{V_1^2 + V_2^2}{2} \right)}{c} \approx 1,3 \text{ } ^\circ\text{C}$$



10. В электрической цепи, показанной на рисунке, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока равны соответственно 12 В и 1 Ом, индуктивность катушки 36 мГн и сопротивление лампы 5 Ом. В начальный момент времени ключ K замкнут. После размыкания ключа в лампе выделяется энергия $W = 0,172$ Дж. Чему равна ёмкость конденсатора C ? Сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

Решение:

При размыкании ключа в лампе выделяется энергия, накопленная в конденсаторе и в катушке. Ток в катушке равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$$

Энергия, выделившаяся в лампе

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{2W(R + r)^2 + L\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 R^2} \approx 4,9 \text{ мФ}$$