

## 10 класс. Вариант 5

1. В солнечный день вблизи экватора в 10 часов утра местного времени диаметр тени шара, лежащего на земле, был равен 70 см. Известно, что ровно в полдень солнце окажется в зените. Считая, что солнце движется по небу по дуге окружности, определите длину тени, отбрасываемой шаром в 15 часов.

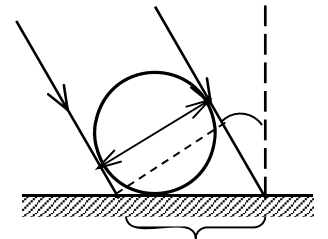
*Решение*

За сутки солнце совершает один полный оборот. Следовательно, за два часа до полудня солнце переместилось на  $\frac{360 \text{ градусов}}{24 \text{ часа}} \cdot 2 \text{ часа} = 30 \text{ градусов}$ . Это и есть угол падения солнечных лучей в 10 часов утра. Соответственно, в 15 часов (через 3 часа после полудня) угол падения солнечных лучей, будет равен 45 градусам.

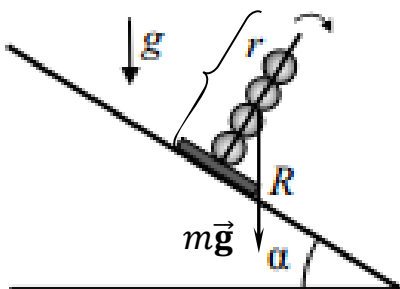
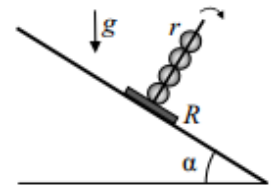
Из рисунка видно, что диаметр шара  $2R$ , длина тени  $l$  и угол падения солнечных лучей связаны между собой соотношением:  $2R = l_1 \cos \alpha_1$ . Следовательно, длина тени в 15 часов  $2R = l_2 \cos \alpha_2$ . Получаем, что:

$$l_2 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot l_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot l_1 = 85,7 \text{ см}$$

радиус шара: 30,3 см



2. На наклонном столе с углом  $\alpha$  при вершине стоит невесомая подставка, представляющая собой тонкий диск радиуса  $R$  с закреплённой в его центре длинной спицей. На спицу нанизывают массивные шарики радиуса  $r$ . Сколько необходимо шариков, чтобы подставка опрокинулась?



*Решение*

Спица опрокинется при условии, что линия действия силы тяжести пройдет через основание подставки.

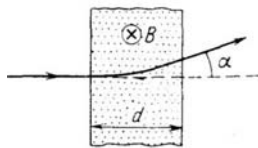
Центр тяжести однородной палочки располагается в середине. Т.е., если вдоль спицы суммарная длина линии, образованной насаженными шариками  $h$ , то центр тяжести находится на высоте  $h/2$ .

Тогда в образовавшемся прямоугольном треугольнике с углом  $\alpha$  при вершине,  $\text{tg } \alpha = R/(h/2)$ . Откуда  $h = R \cdot \text{ctg } \alpha$ . Но очевидно, что  $h = n \cdot 2r$ , откуда  $n = \left[ \frac{h}{2r} \right]$  (целой части числа, стоящего в скобке)

3. Какая часть теплоты, получаемой при изобарном нагревании идеального одноатомного газа расходуется на изменение внутренней энергии этого газа?

*Решение*

Запишем I закон термодинамики:  $Q = \Delta U + A$ , Необходимо найти отношение  $\Delta U/Q$ . Для одноатомного идеального газа  $\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \nu R \Delta T$  и  $A = \nu R \Delta T$ , тогда  $Q = \frac{5}{2} \cdot \nu R \Delta T$ . Отношение  $\frac{\Delta U}{Q} 100\% = \frac{3}{5} 100\% = 60\%$ .



4. Протон, ускоренный разностью потенциалов  $U = 500$  кВ, пролетает поперечное однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,51$  Тл. Толщина области с полем  $d = 10$  см (см. рис.). Найти смещение  $\Delta$  и угол  $\alpha$  отклонения вектора скорости протона от первоначального направления движения на выходе из области магнитного поля.

*Решение*

Протон, прошедший разность потенциалов равную  $U$ , приобретает скорость  $V$ , которую найдем из закона сохранения энергии:  $qU = \frac{mV^2}{2}$  или  $V = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ .

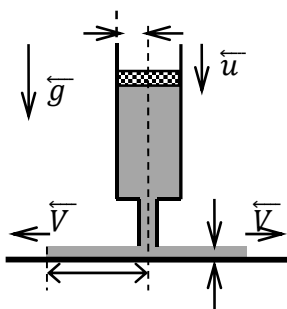
При попадании в область магнитного поля протон начинает двигаться по дуге окружности, радиус которой определяется силой Лоренца:

$qVB = \frac{mV^2}{R}$ , откуда  $R = \frac{mV}{qB} = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}$ , вершина, которой лежит на границе области магнитного поля

Угол от отклонения вектора скорости равен центральному углу поворота радиуса окружности, откуда следует, что  $\sin \alpha = d/R = \frac{dqB}{mV}$ , подставив значение скорости окончательно получим:

$$\sin \alpha = Bd \cdot \sqrt{\frac{q}{2mU}} = 0,51 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^5}} = 0,5 \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Смещение  $\Delta = R(1 - \cos \alpha) = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}} \cdot (1 - \cos \alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,51^2}} \cdot (1 - \cos 30^\circ) = 26,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

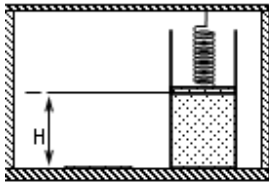


5. Из цилиндра радиуса  $r = 2$  см выдавливают поршнем текучую пасту. Она растекается по поверхности слоем толщины  $h = 2$  мм, образуя круговое пятно. Скорость движения поршня  $6$  см/с. Какова скорость расширения границы пятна при радиусе пятна  $R = 30$  см?

*Решение*

За малый промежуток времени  $\Delta t$  поршень, движущийся со скоростью  $V_1$  опускается расстояние  $V_1 \cdot \Delta t$  и выдавливает пасту объемом  $V_1 \cdot \Delta t \cdot S$ , где  $S = \pi r^2$ , при этом площадь пятна на поверхности увеличивается на  $\Delta S = 2 \pi R \cdot \Delta R$ , где  $\Delta R = V \cdot \Delta t$ . Увеличение объема пасты на поверхности  $\Delta S \cdot h$ . Объем вытесненный из поршня за время  $\Delta t$  равен увеличению объему пятна на столе за то же самое время. Следовательно:  $V_1 \cdot \Delta t \cdot \pi r^2 = 2 \cdot \pi R \cdot V \cdot \Delta t \cdot h$ , откуда следует, что  $V = \frac{r^2}{2rh} \cdot V_1$ ,

$$V = \frac{2^2}{2 \cdot 30 \cdot 0,2} \cdot 6 = 2 \text{ (см/с)}$$



6. В цилиндре содержится некоторое количество идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт невесомым поршнем, поршень поддерживается пружиной жесткостью  $k$  так, что высота поршня над дном цилиндра  $H = 40$  см. При подведении к газу количества теплоты  $Q = 200$  Дж высота положения поршня изменилась. Определите на какой высоте остановился поршень. Давление среды над поршнями равно нулю. Недеформированная пружина касается дна цилиндра.

*Решение:*

По первому началу термодинамики

$$Q = A + \Delta U$$

$$A = \frac{k}{2} (H_1^2 - H^2)$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} k (H_1^2 - H^2)$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{Q + 2kH^2}{2k}} = 60 \text{ см}$$

7. За время 20 с в цепи, состоящей из трех одинаковых проводников, соединенных последовательно и включенных в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить параллельно?

*Решение:*

Приравняем количества теплоты, выделившиеся в первой и второй цепи, используя закон Джоуля-Ленца:

$$\frac{3U^2}{R} \Delta t_2 = \frac{U^2}{3R} \Delta t_1$$

Отсюда следует, что

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{9} \approx 2,2 \text{ с}$$

8. Спутник движется по эллиптической орбите, апогей которой (максимальное удаление от центра Земли) равен утроенному радиусу Земли, а перигей (минимальное удаление от центра Земли) равен радиусу Земли. Найдите отношение скоростей в апогее и перигее.

*Решение.*

По второму закону Кеплера, вытекающему из закона сохранения момента импульса

$$3mR_3v_A = mR_3v_p.$$

Отсюда

$$\frac{v_A}{v_p} = \frac{1}{3}$$

9. Груз висающий на нити длины  $L$  м, привязанной к гвоздю, толкнули так, что он поднялся и затем попал в гвоздь. Какова его скорость в момент удара о гвоздь? Ускорение свободного падения  $g$ .

*Решение*

Траектория состоит из дуги окружности (пока нить натянута) и параболы, проходящей через гвоздь и продолжающей дугу по касательной к ней (нить смята) (см. рисунок.)

В точке перехода к параболе натяжение нити обращается в нуль. Из 2-го закона Ньютона для вращательного движения:

$$mu^2/L = m g \sin \alpha,$$

откуда, квадрат скорости в этой точке

$$u^2 = L g \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол, образуемый нитью с горизонталью.

Условие попадания в гвоздь:

$$\text{Перемещение по горизонтали } L \cos \alpha = u \sin \alpha t,$$

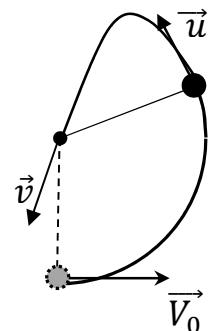
$$\text{по вертикали } L \sin \alpha = gt^2/2 - u \cos \alpha t.$$

$$\text{Получили систему уравнений } \begin{cases} u^2 = L g \sin \alpha \\ L \cos \alpha = u \sin \alpha t \\ L \sin \alpha = gt^2/2 - u \cos \alpha t \end{cases}$$

откуда найдем  $\sin^2 \alpha = 1/3$

Из закона сохранения энергии  $v^2 = u^2 + 2L g \sin \alpha$ , откуда  $v^2 = 3L g \sin \alpha$ , а ответ:

$$v = \sqrt[4]{3 L^2 g^2}$$



10. Поршень массы  $m = 20$  кг и сечения  $S = 100$  см<sup>2</sup> в исходном горизонтальном положении цилиндра находится посередине. Слева и справа воздух при атмосферном давлении  $P = 10^5$  Па. Клапан в торце цилиндра открыт только тогда, когда торец обращен строго вниз. Цилиндр поворачивают на  $90^\circ$ , приведя его в вертикальное положение. При какой массе поршня он опустится на нижний торец? Трения нет. Температура неизменна. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение*

После поворота на  $90^\circ$  давление в нижней части цилиндра при открытом клапане воздух перестаёт выходить, когда давление под поршнем сравнивается с атмосферным  $P$ .

Выше поршня тогда будет  $P' = P - mg/S$ . Пусть весь объём  $V$ , объём снизу  $V_1$ , тогда объём сверху  $V_2 = V - V_1$ . Из уравнения состояния идеального газа для изотермы имеем

$$PV_2 = (P - mg/S)V_2 = PV/2. \text{ Тогда } V_2 = \frac{PV}{2(P - mg/S)}.$$

Поскольку  $\nu RT = PV$ , а  $\nu_1 RT = PV_1$ , где  $\nu$  начальное общее число молей, а  $\nu_1$  число молей оставшихся под поршнем, откуда следует, что  $\nu_1/\nu = V_1/V$ . Т.к.  $V_1 = V - V_2$ , то

$$V_1/V = \nu_1/\nu = (PS - 2mg)/2(PS - mg). \text{ тогда } \nu_1 = \frac{\nu(P - 2mg/S)}{2(P - mg/S)} = \frac{\nu(PS - 2mg)}{2(PS - mg)}$$

Заметим, что при массе  $m = PS/2g = 50$  кг  $\nu_1 = 0$  и большей поршень выдавит весь газ из нижней части. Выйдет ровно половина газа. В этом случае при почти полном вытеснении газ в верхней части расширится вдвое, его давление станет  $P/2$ .

