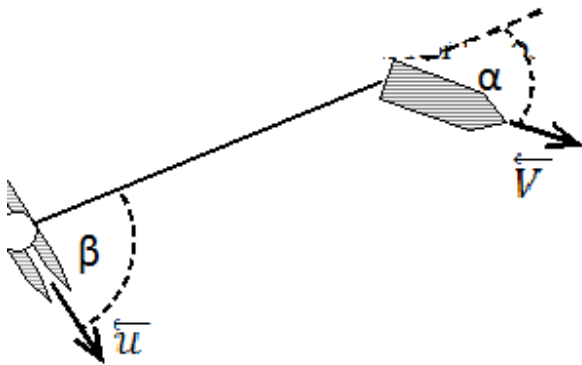


10 класс. Вариант 6



1. Катер, который движется по озеру со скоростью V , с помощью фала тащит за собой спортсмена на водных лыжах; причем угол между вектором скорости V и фалом составляет угол α , а угол между вектором скорости u лыжника и тем же фалом составляет угол β . Найдите скорость спортсмена.

Решение

Очевидно, что проекции скоростей V и u на линию фала равны, т.е. $V \cdot \cos \alpha = u \cdot \cos \beta$ откуда следует, что $u = V \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$

2. Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них равен d , другой $2d$. Первая пружинка под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

Решение

Удлинение пружин равно $\Delta l = n \cdot 2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, где n – число витков пружины, а α – угол, на который разворачиваются соседние витки пружины. Так как удлинение пружины мало, то этот угол мал и $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\Delta l = nd\alpha$.

Угол α пропорционален моментам сил F , которые растягивают виток: $\alpha = Fd$. Сила F равна весу груза, подвешенного к пружине, и одинакова в обоих случаях, поэтому $\Delta l \sim nd^2$.

Диаметр витков второй пружины вдвое меньше, следовательно, абсолютное удлинение второй пружины вдвое больше, чем у первой. Таким образом, вторая пружина растянется на $2/5$ своей длины.

3. В комнате объемом $V = 75 \text{ м}^3$ температура воздуха такая же, как на улице $T_1 = -20^\circ\text{C}$. Включают электрокамин и он медленно прогревает воздух в комнате до $T_2 = +23^\circ\text{C}$. Часть воздуха при этом выходит наружу через негерметичное окно. Найти изменение внутренней энергии воздуха в комнате и работу, которую совершает воздух при расширении наружу. Атмосферное давление принять равным 10^5 Па .

Решение

По условию задачи, в силу не герметичности помещения, процесс изобарный. Следовательно, часть газа, выходящая наружу, и совершает работу.

Внутренняя энергия воздуха в комнате $U = \nu C_V T = \nu \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} p_0 V$. Из полученного результата следует, что внутренняя энергия воздуха в комнате не зависит от температуры. Т.е. внутренняя энергия воздуха в комнате в процессе нагревания при постоянном давлении не меняется.

Запишем уравнение состояния для газа в комнате после прогрева:

$$p_0 V = \nu_2 R T_2 \quad (1)$$

Уравнение состояния для воздуха в количестве ν_2 в комнате в начальный момент

$$p_0 (V - \Delta V) = \nu_2 R T_1, \quad (2)$$

где ΔV - объем газа вышедшего на улицу при температуре среды ниже ($T_1 < T_2$),

Работа совершается при постоянном давлении, поэтому

$$A = p_0 \Delta V \quad (3)$$

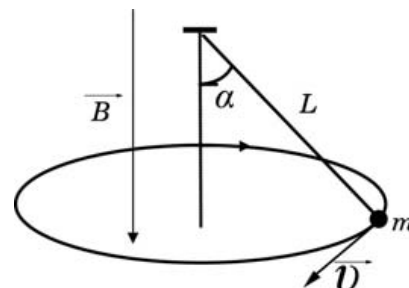
Найдем ΔV из (1) и (2), вычтя второе уравнение из первого $p_0 \Delta V = \nu_2 R (T_2 - T_1)$.

$$\text{Вынесем в этом равенстве } T_2: \quad p_0 \Delta V = \nu_2 R T_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

Из (1) видно, что произведение $\nu_2 R T_2$ равно $p_0 V$.

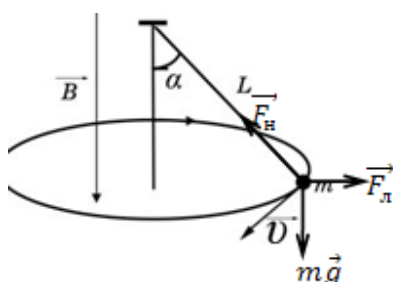
$$\text{Окончательно работа равна: } A = p_0 V \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 10^5 \cdot 75 \left(1 - \frac{260}{300}\right) = 1 \text{ МДж}$$

4. Положительно заряженный шарик массой $m = 1$ г подвешен на нити длиной $L = 1$ м и равномерно движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} (см. рисунок). Заряд шарика $q = 1$ мкКл. Нить образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Найдите угловую скорость равномерного обращения шарика по окружности.



Решение

После расстановки сил (силы натяжения \vec{F}_H , силы тяжести $-m\vec{g}$, силы Лоренца \vec{F}_L) см. рисунок, модуль $F_L = qvB$



Напишем уравнение вращательного движения тела массы m :

$$m a_{\text{цс}} = F_H \sin \alpha - qvB$$

$$\text{очевидно, что } F_H \cos \alpha = mg \text{ и } a_{\text{цс}} = \omega^2 r$$

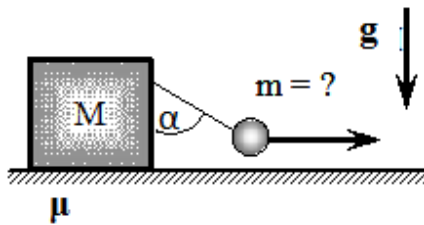
тогда уравнение вращательного движения тела примет вид:

$$m \omega^2 r = mg \tan \alpha - q \omega r B. \text{ Учитывая, что } r = L \sin \alpha$$

окончательно получим $m \omega^2 L \cos \alpha + q \omega L \cos \alpha B + mg = 0$.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{-qBL \cos \alpha + \sqrt{q^2 B^2 L^2 \cos^2 \alpha + m^2 g L \cos \alpha}}{2 m L \cos \alpha} =$$

$$= \frac{qB}{2m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{m^2 g}{q^2 B^2 L \cos \alpha}} \right) = 0,5 \text{ рад/с}$$



5. Тяжелый шар привязан нитью к кубу массы $M = 4 \text{ кг}$. За другую нить шар тянут по горизонтали, так что он и куб движутся с постоянной скоростью. Наклонная нить образует угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью. Найдите массу шара, если коэффициент трения куба с полом $\mu = 0,5$.

Решение:

Т.к. куб движется с постоянной скоростью, то, векторная сумма сил действующих на каждое из тел равна нулю.

$$\text{Для шара: } \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0;$$

$$\text{для куба: } \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{T}' + M\vec{g} = 0$$

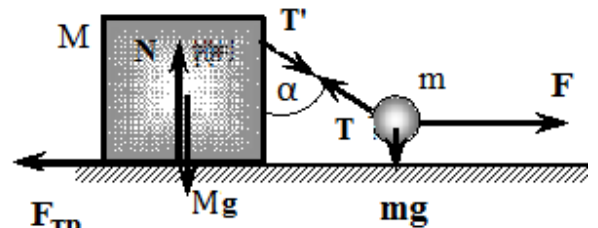
$$\text{Из равновесия шара: } T_y = mg, \text{ тогда } T_x = F = mg \cdot \text{tg } \alpha. \quad (1)$$

$$\text{Равновесие куба. Проекция на вертикальную ось: } N - T'_y - Mg = 0 \rightarrow N = (M + m)g \quad (2)$$

$$\text{Проекция на горизонтальную ось } T_x - F_{\text{тр}} = 0 \text{ или } F_{\text{тр}} = T_x = mg \cdot \text{tg } \alpha. \quad (3)$$

$$\text{Сила трения при проскальзывании } F_{\text{тр}} = \mu N \rightarrow F_{\text{тр}} = \mu(M + m)g \quad (4)$$

Откуда после подстановки (3) в (4) получим $\mu(m + M) = m \cdot \text{tg } \alpha$ или $m = \mu M(\text{tg } \alpha - \mu) = 1 \text{ кг}$.



6. Какую среднюю мощность развивает двигатель мотоцикла, если при скорости движения 90 км/ч расход бензина составляет 4 л на 100 км пути, а КПД двигателя 25 %? Удельную теплоту сгорания бензина принять 44 МДж/кг, плотность бензина – 750 кг/м³.

Решение:

Мощность двигателя определяется как

$$N = \frac{\rho \vartheta q V}{\eta s} = \frac{750 \cdot 0,004 \cdot 44 \cdot 10^6 \cdot 25}{0,25 \cdot 10^5} = 33 \text{ кВт}$$

7. Электрон влетает в область пространства, в котором созданы однородные электрическое и магнитное поля. Скорость электрона направлена перпендикулярно силовым линиям электрического поля. Значение индукции магнитного поля B . Определите значение напряженности E электрического поля, которое создано в этой области, если электрон пролетает область, не испытывая отклонения. Энергия электрона W .

Решение:

Для пролета без отклонения модули составляющих силы Лоренца должны быть равны между собой, т.е.

$$eE = eVB$$

Учитывая, что

$$V = \sqrt{\frac{2W}{m}},$$

получим

$$E = B \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

8. Космический корабль, представляющий собой цилиндр небольшой длины и имеющий площадь поперечного сечения S , движется вдали от тяготеющих тел со скоростью u . Вектор скорости направлен вдоль оси цилиндра. Масса корабля – M_0 . Корабль влетает в пылевой слой толщиной L и плотностью ρ . При движении в слое корабль испытывает неупругие соударения с частицами пыли. Определите время его движения в пылевом слое.

Решение

Поскольку корабль движется в слое, испытывая неупругие соударения, то к моменту выхода из слоя его масса станет равной

$$M = M_0 + \rho LS$$

а скорость

$$v = u \frac{M_0}{M_0 + \rho LS} = u \frac{1}{1 + \frac{\rho LS}{M_0}}$$

Величина, обратная скорости, линейно изменяется в зависимости от пройденного пути L :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} \left(1 + \frac{\rho LS}{M_0} \right)$$

Площадь под графиком этой зависимости и есть искомое время:

$$\tau = \frac{L}{u} \left(1 + \frac{\rho LS}{2M_0} \right)$$

9. На обнаруженной в Космосе планете ускорение свободного падения в 5 раз больше, чем на Земле. Космонавты, высадившиеся на этой планете, построили для нужд научной станции гидроэлектростанцию, для чего возвели плотину высотой 100 м. Оцените, какую мощность может развивать такая плотина, если оказалось, что в водохранилище до плотины и у подножия плотины температура воды отличается на 1 °С, а каждую секунду через плотину проходит 2 тонны воды.

Решение:

Потенциальная энергия воды переходит в полезную работу и частично теряется в виде теплоты. Выразим полезную мощность:

$$\frac{m}{t}gh - c \frac{m}{t} \Delta t = 1,6 \text{ МВт}$$

10. Поршень массы $m = 20$ кг и сечения $S = 100 \text{ см}^2$ в исходном горизонтальном положении цилиндра находится посередине. Слева и справа воздух при атмосферном давлении $P = 10^5$ Па. Клапан в торце цилиндра открыт только тогда, когда торец обращен строго вниз. Цилиндр поворачивают на 90°, приводя его в вертикальное положение. Какая доля воздуха выйдет? Трения нет. Температура неизменна. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение

После поворота на 90° давление в нижней части цилиндра при открытом клапане воздуха перестает выходить, когда давление под поршнем сравнивается с атмосферным P .

Выше поршня тогда будет $P' = P - mg/S$. Пусть весь объем V , объем снизу V_1 , тогда объем сверху $V_2 = V - V_1$. Из уравнения состояния идеального газа для изотермы имеем

$$PV_2 = (P - mg/S)V_2 = PV/2. \text{ Тогда } V_2 = \frac{PV}{2(P - mg/S)}.$$

Поскольку $\nu RT = PV$, а $\nu_1 RT = PV_1$, где ν начальное общее число молей, а

ν_1 число молей оставшихся под поршнем, откуда следует, что $\nu_1/\nu = V_1/V$. Т.к. $V_1 = V - V_2$, то

$$V_1/V = \nu_1/\nu = (PS - 2mg)/2(PS - mg).$$

$$\text{тогда } \nu_1 = \frac{\nu(P - 2mg/S)}{2(P - mg/S)} = \frac{\nu(PS - 2mg)}{2(PS - mg)}$$

Заметим, что при массе $m = PS/2g = 50$ кг $\nu_1 = 0$ и большей поршень выдавит весь газ из нижней части. Выйдет ровно половина газа. В этом случае при почти полном вытеснении газ в верхней части расширится вдвое, его давление станет $P/2$.

В случае, когда $\nu_1 > 0$ ($m < PS/2g$). Тогда число вышедших молей газа $\Delta\nu = \nu/2 - \nu_1$, подставив значение ν_1 , получим $\Delta\nu = \frac{\nu mg}{2(PS - mg)}$, а искомая доля $\Delta\nu/\nu = mg/2(PS - mg) = 1/8$.

