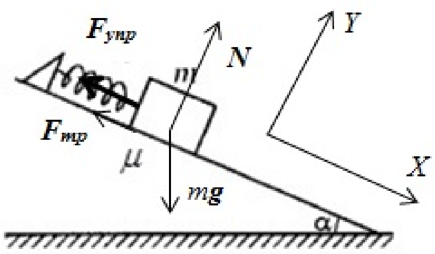
Олимпиада «ГАЗПРОМ», 11-класс
Решения. Вариант № 1

Задача 1. Решение:

Выберем систему координат: ось X направим вдоль наклонной плоскости, ось Y перпендикулярно ей (см. рисунок).



В момент времени, когда скорость максимальна – ускорение равно нулю: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$.
Уравнение движения кубика в этот момент времени, по оси X имеет вид:
$-kx + mg\sin\alpha - \mu N = 0$, где $x-$ величина абсолютной деформации пружины. Из уравнения движения в проекции на ось Y находим $N = mg \cdot \cos\alpha$. Отсюда величина абсолютной деформации пружины равна:

$$x = \frac{mg}{k}(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

Запишем для этого момента времени закон сохранения энергии:

$$mgH = mgh + \frac{kx^2}{2} + F_{тр} \cdot x + \frac{mv_{max}^2}{2} \qquad (2)$$

Из геометрических соображений, очевидно, что $H - h = x \cdot \sin\alpha$. Выражаем из уравнения (2) искомую максимальную скорость кубика:

$v_{max}^2 = 2g(H-h) - \frac{2 \cdot F_{тр}}{m} - \frac{k}{m}x^2 = 2gx\cos\alpha \cdot (tg\alpha - \mu) - \frac{k}{m}x^2$.

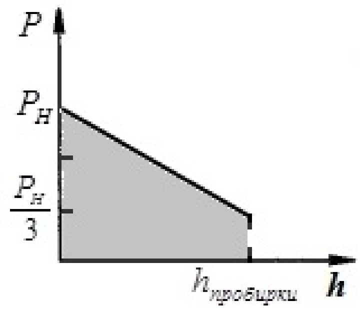
Учитывая выражение (1), получим:

$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}} g(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha$.

Ответ: $v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}} g(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha$.

Задача 2. Решение:

При открытой пробирке общее давление воздуха и пара в любом поперечном сечении пробирки равно атмосферному давлению P_0. Следовательно, парциальное давление воздуха в пробирке так же, как и давление пара, изменятся с высотой по линейному закону и равно $P_0 - P_H$ у поверхности воды и $P_0 - P_H/3$ у открытого конца пробирки (см. рисунок).



Очевидно, что среднее (по высоте) давление сухого воздуха будет равно:

$$P_{B\text{ср}} = P_0 - 2P_H/3. \qquad (1)$$

Уравнение состояния идеального газа для сухого воздуха в пробирке имеет вид:

$$P_{B\text{ср}} \cdot V = \frac{m}{\mu} RT, \qquad (2)$$

где $V -$ объем влажного воздуха в пробирке, $\mu -$ молярная масса сухого воздуха.

После того, как пробирку закроют, воздух равномерно распределится по высоте, но его общая масса сохранится, а пар во всем объеме остается насыщенным. После нагревания воздуха в пробирке пар остается насыщенным, а его масса не изменяется, т.к. испарением жидкости пренебрегаем. Обозначим $P'_{B\text{ср}} -$ давление сухого воздуха после нагревания, $P'_H -$ давление насыщенного пара после нагревания. Напишем давление влажного воздуха в закрытой пробирке после нагревания:

$$P = P'_{B\text{ср}} + P'_H = \frac{mR}{\mu V}(T + \Delta T) + P_H + \Delta P_H. \qquad (3)$$

Используя (1) и (2), а также соотношение между относительными изменениями температуры и давления насыщенного пара преобразуем (3):

$$P = \frac{P_{B\text{ср}}}{T}(T + \Delta T) + P_H + 18 \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot P_H = P_0 - \frac{2}{3}P_H + \left(P_0 - \frac{2}{3}P_H\right)\frac{\Delta T}{T} + P_H + 18 \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot P_H = P_0 +$$
$$+ \frac{1}{3}P_H + P_0\frac{\Delta T}{T} + \frac{52}{3}P_H\frac{\Delta T}{T}.$$

Отсюда изменение давления влажного воздуха в пробирке равно:

$P - P_0 = \frac{1}{3}P_H + P_0\frac{\Delta T}{T} + \frac{52}{3}P_H\frac{\Delta T}{T}$. Подстановка числовых значений величин в полученную формулу приводит к результату: $P - P_0 \approx 13$ мм рт. ст.

Ответ: $P - P_0 \approx 13$ мм рт. ст.

Задача 3. Решение:

После замыкания ключа K внутренняя сфера будет заземлена и её потенциал станет равным нулю. Согласно принципу суперпозиции потенциал на внутренней сфере создается зарядом Δq, прошедшим через гальванометр и потенциалом внешней сферы, который во всех точках внутри нее принимает одинаковые значения. Таким образом, можно написать уравнение:

$$\varphi'_1 = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0 \qquad (1)$$

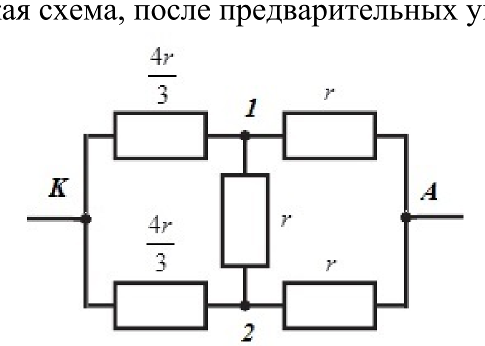
Отсюда выражаем искомый заряд, прошедший через гальванометр:

$$\Delta q = -\frac{R_1}{R_2} q. \qquad (2)$$

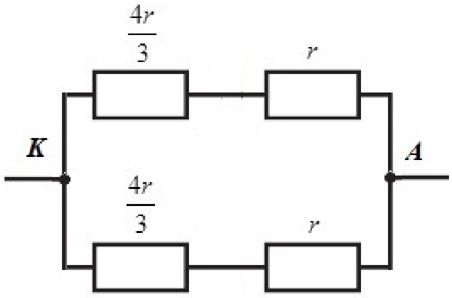
Ответ: $\Delta q = -\frac{R_1}{R_2} q.$

Задача 4. Решение:

Эквивалентная электрическая схема, после предварительных упрощений имеет вид:



В силу симметрии относительно оси AK потенциалы точек 1 и 2 равны: $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, падение напряжения на резисторе, включенном в эту ветвь равно нулю, и ток через него не течет. Поэтому исключение резистора из ветви 1-2 не изменит сопротивления цепи. Тогда схему можно еще упростить:



Сопротивление в верхней ветви цепи (равное сопротивлению в нижней ветви):

$R' = \frac{4r}{3} + r = \frac{7r}{3}$. Полное электрическое сопротивление: $R = \frac{\left(\frac{7r}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{7r}{3}} = \frac{7r}{6}$.

<u>*Ответ:*</u> $R = \frac{7}{6}r$.

<u>*Задача 5. Решение:*</u>

Установившейся ток после замыкания ключа: $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Запишем 2-е правило Кирхгофа для контура с переменной индуктивностью:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_i = \mathcal{E} - \frac{d(L\cdot I)}{dt}. \qquad (1)$$

Вычислим производную в правой части уравнения (1).

$$\frac{d(L\cdot I)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_0(1 + A\sin\omega t)\cdot I\right) = L_0\frac{dI}{dt} + L_0\frac{d}{dt}(I\cdot A\sin\omega t). \qquad (2)$$

В случае медленного, по сравнению с τ, изменения индуктивности, ток не успевает значительно измениться и поэтому в указанном приближении можно положить: $\frac{dI}{dt} \approx 0$.

Тогда из (1) с учетом (2) получим:

$$IR = \mathcal{E} - I\cdot L_0 A\omega\cos\omega t. \qquad (3)$$

Выразим из (3) силу тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + L_0 A\omega\cos\omega t} = \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\left(1 + \frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t\right)^{-1}. \qquad (4)$$

Учтем, что согласно условию $\frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t \ll 1$ и поэтому можно воспользоваться известной приближенной формулой: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,\ |x| < 1$.

Тогда получаем из (4):

$$I \approx \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\left(1 - \frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}\cos\omega t. \qquad (5)$$

Таким образом, амплитуда переменной составляющей равна:

$$I_m \approx \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}.$$

<u>*Ответ:*</u> $I_m \approx \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}$.