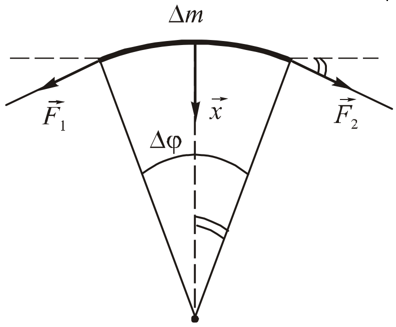
Олимпиада «ГАЗПРОМ», 11-класс
Решения. Вариант № 7

Задача 1. Решение

Дано: L, m, k, ω.

Найти: R.



Рассмотрим движение элемента кольца, соответствующего <u>малому</u> центральному углу $\Delta\varphi$. Для него

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi}\Delta\varphi, \quad \Delta m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \text{где } a = a_n = \omega^2 R,$$

силы упругости $\qquad F_1 = F_2 = F = k(2\pi R - L)$; $\qquad$ (1)

в проекции на ось Ox $\quad \Delta m a_n = 2F\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \approx F\Delta\varphi$, т.е.

$$\frac{m}{2\pi}\Delta\varphi\cdot\omega^2 R = F\Delta\varphi. \qquad (2)$$

Из (2) $\quad F = \dfrac{m}{2\pi}\omega^2 R \quad$ с учетом (1) получим

$$R = \frac{2\pi kL}{(2\pi)^2 k - m\omega^2}.$$

Ответ: $R = \dfrac{2\pi kL}{(2\pi)^2 k - m\omega^2}$.

Задача 2. Решение

Дано: T, $V_1 = V/3$,
$V_2 = 2V/3$,
$V_1' = 2V/3$,
$V_2' = V/3$.

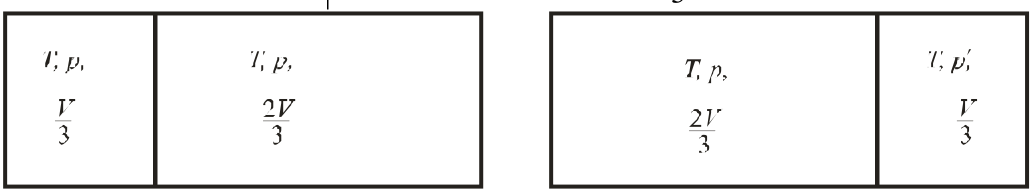
Найти: V_2.

Решение.

Давления с обеих сторон поршня в состоянии равновесия одинаковы. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа слева и справа от поршня в начальном состоянии.

$$p\frac{V}{3} = \nu_1 RT, \qquad (1)$$

$$p\frac{2V}{3} = \nu_2 RT, \qquad (2)$$



И в конечном состоянии:

$$p'\frac{2V}{3} = \nu_1 RT, \qquad (3)$$

$$p'\frac{V}{3} = \nu_2 RT_2. \qquad (4)$$

Решая систему (1)–(4) относительно T_2, получим $T_2 = \frac{1}{4}T$.

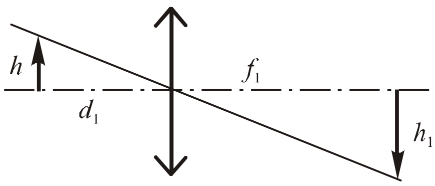
Ответ: $T_2 = \frac{1}{4}T$

Задача 3. Решение

Дано: L, $\frac{k_1}{k_2} = m$.

Найти: D.

На экране получается действительное изображение предмета, причем увеличение



$$k_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}; \quad k_2 = \frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2}. \qquad (1)$$

Расстояние d от линзы до источника и f от линзы до изображения связаны формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \qquad (2)$$

и соотношением $d + f = L$, (3)

где $F = D^{-1}$ – фокусное расстояние линзы.

Решая систему (2)–(3), получим $d_1 = \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}$, $f_1 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}$,

$$d_2 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}, \quad f_1 = \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}. \qquad (4)$$

По условию, $k_1/k_2 = m$. Учитывая (1) и (4), получим

$d_1 = f_2$, $d_2 = f_1$, $m = \left(f_1/d_1\right)^2$, откуда $f_1 = d_1\sqrt{m}$.

Используя (3), получим $d_1 = \frac{L}{1+\sqrt{m}}$, $f_1 = \frac{L\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$;

учитывая (2), имеем $D = \frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^2}{L\sqrt{m}}$.

Ответ: $D = \frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^2}{L\sqrt{m}}$.

Задача 4. Решение.

Дано: $y = -bx$,
$y = kx^2$,
B, a,
$v_0 = 0$,
ρ.

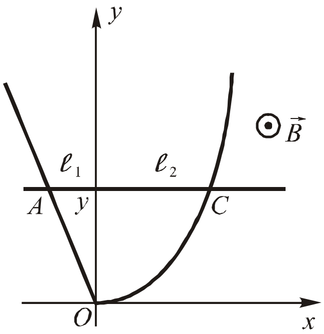
Найти: $p(y)$.

Решение.

При движении перемычки в контуре OAC изменяется магнитный поток и возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\ell v,$$

где S – площадь контура OAC; ℓ – длина перемычки AC; $\ell = \ell_1 + \ell_2$, где $\ell_1 = y/b$, $\ell_2 = \sqrt{y/k}$.



Скорость перемычки $v = at$; учитывая, что при равноускоренном движении с $v_0 = 0$ $y = \frac{1}{2}at^2$, получим

$$v = \sqrt{2ay} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_i = B\left(\frac{y}{b} + \sqrt{y/k}\right)\sqrt{2ay} = B\left(\sqrt{2ay^3/b^2} + y\sqrt{2a/k}\right).$$

В перемычке выделяется тепловая мощность

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R}, \quad \text{где } R = \rho\ell; \quad \text{отсюда} \quad P = \frac{2aB}{\rho}\left(\frac{y^2}{b} + \sqrt{y^3/k}\right).$$

Ответ: $P = \dfrac{2aB}{\rho}\left(\dfrac{y^2}{b} + \sqrt{y^3/k}\right)$.

Задача 5. Решение

Дано: $m_1 = 6$ кг,
$m_2 = 6$ т,
$t_1 = 24$ ч,

Найти: t_2.

Решение.

В обоих случаях теплота, которую должно получить тело, пропорциональна его массе m: $Q = \alpha m$

Коэффициент пропорциональности α должен быть одним и тем же, поскольку речь идет об объектах одинаковой природы. Удобно ввести характерный размер тела l. Очевидно, что в обоих случаях можно принять $m = \rho l^3$. Плотность ρ в обоих случаях также можно принять одинаковой.

Время, в течение которого тело будет разморожено, можно оценить как

$t = \dfrac{Q}{P}$, где P - тепловая мощность, которая поступает через поверхность тела. В соответствии с законом теплопроводности, $P = \beta S\dfrac{dT}{dx}$, где β - коэффициент пропорциональности. Производную $\dfrac{dT}{dx}$ можно оценить: $\dfrac{dT}{dx} \approx \dfrac{\Delta T}{l}$, где ΔT - разность температур между атмосферным воздухом и внутренней частью тела. Учитывая, что $S : \; l^2$, получим

$$t = \frac{\alpha\rho l^3}{\beta S \dfrac{dT}{dx}} : \; \frac{l^3}{l^2 l^{-1}} = l^1 : \; m^{2/3}.$$

Соответственно, $\dfrac{t_2}{t_1} = \left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = 100$.

Размораживание мамонта продлится примерно 100 суток (около трех месяцев).

Ответ: $t_2 \approx 100$ суток.