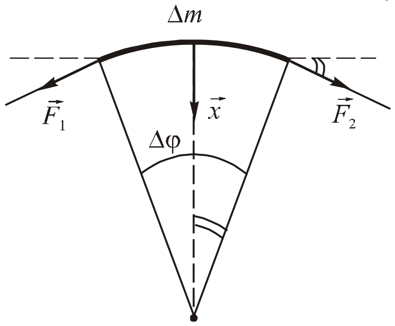
Олимпиада «ГАЗПРОМ», 11-класс
Решения. Вариант № 8

Задача 1. Решение.

Дано: L, m, k, F_0.

Найти: ω.



Рассмотрим движение элемента кольца, соответствующего малому центральному углу $\Delta\varphi$. Для него

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi}\Delta\varphi, \quad \Delta m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \text{где } a = a_n = \omega^2 R,$$

силы упругости $\quad F_1 = F_2 = F_0 = k(2\pi R - L)$; $\qquad$ (1)

в проекции на ось Ox $\quad \Delta m a_n = 2F_0 \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx F_0\Delta\varphi$,

т.е. $$\frac{m}{2\pi}\Delta\varphi\cdot\omega^2 R = F_0\Delta\varphi. \qquad (2)$$

Из (1) $\quad R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{F_0}{k} + L\right)$; $\quad$ из (2) $\quad \omega = 2\pi\sqrt{\frac{F_0 k}{m(F_0 + kL)}}$.

Ответ: $\omega = 2\pi\sqrt{\frac{F_0 k}{m(F_0 + kL)}}$.

Задача 2. Решение

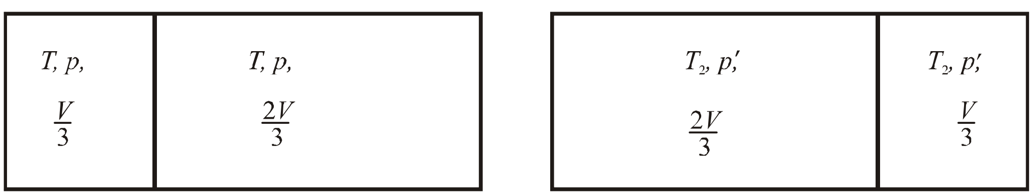
Дано: T, $V_1 = V/3$,
$V_2 = 2V/3$,
$V_1' = 2V/3$,
$V_2' = V/3$.

Найти: T_2.

Решение.

Давления с обеих сторон поршня в состоянии равновесия одинаковы.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа слева и справа от поршня в начальном состоянии.



$$p\frac{V}{3} = \nu_1 RT, \qquad (1)$$

$$p\frac{2V}{3} = \nu_2 RT, \qquad (2)$$

И в конечном состоянии:

$$p'\frac{2V}{3}=\nu_1 RT_2, \qquad (3)$$

$$p'\frac{V}{3}=\nu_2 RT\ . \qquad (4)$$

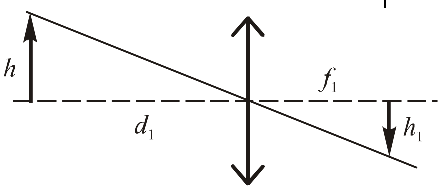
Решая систему (1)–(4) относительно T_2, получим $T_2=4T$.

Ответ: $T_2=4T$.

<u>*Задача 3. Решение*</u>

Дано: h , h_1.

Найти: h_2 .



На экране получается действительное изображение предмета, причем увеличение

$$\frac{h_1}{h}=\frac{f_1}{d_1};\quad \frac{h_2}{h}=\frac{f_2}{d_2}. \qquad (1)$$

Расстояние d от линзы до предмета и f – от линзы до изображения связаны формулой линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \qquad (2)$$

и соотношением $d+f=L$, (3)

где F – фокусное расстояние линзы, L – расстояние от источника до экрана.

Решая систему (2)–(3), получим

$$d_1=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}\ ,\quad f_1=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}\ ,$$

$$d_2=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}\ ,\quad f_1=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}\ ,$$ т.е. $d_1=f_2$, $d_2=f_1$.

Подставив полученный результат в (1), получим

$$\frac{h_1}{h}=\frac{f_1}{d_1},\quad \frac{h_2}{h}=\frac{d_1}{f_1}=\frac{h}{h_1},$$ откуда $h_2=h^2/h_1$.

Ответ: $h_2=h^2/h_1$.

<u>*Задача 4. Решение*</u>

Дано: $\alpha=60^\circ$,
$\vec{B}$, v ,
ρ , L .

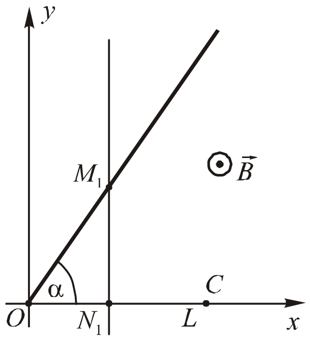
Решение.

При изменении магнитного потока Φ_B в контуре M_1ON_1 возникает ЭДС индукции

Найти: Q.

$$\mathrm{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\frac{dS}{dt} = Byv,$$

где S – площадь контура M_1ON_1; y – длина отрезка M_1N_1.



В контуре течет ток $I = \frac{\mathrm{E}_i}{R}$, где $R = \rho y$ – сопротивление отрезка M_1N_1.

В перемычке выделяется тепловая мощность

$$P = I^2R = \frac{\mathrm{E}_i^2}{R} = \frac{B^2v^2}{\rho}y.$$

Учитывая, что $y = x\,\mathrm{tg}\alpha = vt\sqrt{3}$, получим

$$P = P(t) = \frac{B^2v^3\sqrt{3}}{\rho}t.$$

За время движения от точки O до точки C, равное $\tau = L/v$, в перемычке выделится теплота $Q = \int_0^\tau P(t)dt = \frac{B^2v^3\sqrt{3}}{\rho}\cdot\frac{\tau^2}{2} = \frac{B^2L^2v\sqrt{3}}{2\rho}$.

Ответ: $Q = \frac{B^2L^2v\sqrt{3}}{2\rho}$.

<u>*Задача 5. Решение.*</u>

Дано: $m_1 = 6$ кг,
$m_2 = 6$ кг,
$t_1 = 48$ ч,

Найти: t_2.

Решение.
В обоих случаях теплота, которую должно отдать тело, пропорциональна его массе m: $Q = \alpha m$

Коэффициент пропорциональности α должен быть одним и тем же, поскольку речь идет об объектах одинаковой природы. Удобно ввести характерный размер тела l. Очевидно, что в обоих случаях можно принять $m = \rho l^3$. Плотность ρ в обоих случаях также можно принять одинаковой.

Время, в течение которого тело будет заморожено, можно оценить как

$t = \frac{Q}{P}$, где P - тепловая мощность, которая излучается через поверхность тела. В соответствии с законом теплопроводности, $P = \beta S\frac{dT}{dx}$, где β - коэффициент пропорциональности. Производную $\frac{dT}{dx}$ можно оценить: $\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{l}$, где ΔT - разность температур между атмосферным воздухом и внутренней частью тела. Учитывая, что $S : l^2$, получим

$$t = \frac{\alpha\rho l^3}{\beta S \dfrac{dT}{dx}} : \quad \frac{l^3}{l^2 l^{-1}} = l^1 : \quad m^{2/3}.$$

Соответственно, $\dfrac{t_2}{t_1} = \left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = \dfrac{1}{100}$.

Мышонок будет заморожен примерно за 1700 с(около 29 минут).

Ответ: $t_2 \approx 1700$ с.