Решения для 9 класса подготовительного варианта

1. Тема "Действия с дробями"

Выполните действия: $\dfrac{\left(0,5:1,25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

Решение. Выполним действия в следующем порядке:

1) $0,5:1,25=\dfrac{1}{2}:1\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

2) $\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}=\dfrac{7}{5}:\dfrac{11}{7}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{7}{11}=\dfrac{49}{55}$.

3) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{49}{55}-\dfrac{3}{11}=\dfrac{2\cdot 11+49-3\cdot 5}{55}=\dfrac{56}{55}$.

4) $1,5+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$.

5) $\dfrac{7}{4}:18\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}:\dfrac{55}{3}=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{3}{55}=\dfrac{21}{4\cdot 55}$.

6) $\dfrac{56}{55}\cdot 3:\dfrac{21}{4\cdot 55}=\dfrac{56\cdot 3\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=8\cdot 4=32$.

Ответ: 32.

2. Тема "Преобразование рациональных выражений"

Упростите выражение: $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}+\dfrac{ab}{a+b}$.

Варианты ответов:

А. $a+b$

Б. $a-b$

В. ab

Г. a^2-b^2

Д. $\dfrac{1}{a+b}$

Решение.

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}+\frac{ab}{a+b}=\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a-b)(a+b)}+\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b.$$

Ответ: А.

3. Тема "Рациональные уравнения"

Решите уравнение: $\dfrac{x+0,5}{9}=\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{17}{18}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 18 – наименьшее общее кратное знаменателей всех дробей в уравнении, получим уравнение $2x+1=9x+18-17$. Приведем подобные члены, получим уравнение $7x=0$. Его корнем является $x=0$.

Ответ: 0.

4. Тема “Решение квадратных уравнений”

Решите уравнение: $(x-4)(x+8)+11=0$. В ответ запишите положительный корень.

Решение. Для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ вспомним формулу $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где D – дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Дискриминант вычисляется по формуле $D=b^2-4ac$. Для того, чтобы воспользоваться этой формулой, в левой части уравнения раскроем скобки и приведем подобные члены, получим уравнение $x^2+4x-21=0$. Найдем корни полученного квадратного уравнения по формуле: $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 21}}{2}$. Откуда $x_1=-7, x_2=3$.

Ответ: 3.

5. Тема “Теорема Виета”

Вычислите $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2-4x-7=0$.

Решение. По теореме Виета для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, имеющего корни x_1 и x_2, справедливы равенства: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$. Вычислим для квадратного трехчлена x^2-4x-7 дискриминант $D=16+4\cdot 7=44$. Поскольку $D>0$, квадратное уравнение имеет два различных корня. Значит, можно воспользоваться теоремой Виета: $x_1+x_2=4$ и $x_1\cdot x_2=-7$. Тогда $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{7}{4}$.

Ответ: $-1,75$.

6. Тема “Уравнения с модулем”

Решите уравнение: $\left|x^2-5x\right|=6$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите наименьший положительный корень.

Решение. По определению модуль числа *a* равен числу *a*, если $a\ge 0$, и равен числу $-a$, если $a<0$. Геометрический смысл модуля числа состоит в том, что модуль числа *a* равен расстоянию от точки числовой оси, соответствующей числу *a,* до нуля. В данной задаче удобнее воспользоваться геометрическим смыслом модуля. Точки, находящиеся на числовой оси на расстоянии от нуля равном 6, соответствуют числам 6 и – 6. Тогда уравнение разбивается на совокупность двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} x^2-5x=6 \\ x^2-5x=-6 \end{array}\right.$. Корнями первого уравнения являются числа –1 и 6, а корнями второго уравнения - числа 2 и 3.

Ответ: 2.

7. Тема “Пропорции”

Бизнесмен приобрел акции трех компаний A, B и C на сумму 880 тысяч рублей. При этом на каждые 2 рубля, вложенные в акции компании A, приходится 3 рубля, вложенные в акции компании B, а на каждый рубль, вложенный в акции компании B, приходится 2 рубля, вложенные в акции компании C. Сколько тысяч рублей вложил бизнесмен в акции компании B?

Решение. Пусть x_A, x_B и x_C – стоимости приобретенных бизнесменом акций компаний A, B и C соответственно. Тогда $x_A:x_B=2:3$, $x_B:x_C=1:2$. Последнюю пропорцию можно записать в виде: $x_B:x_C=3:6$. Тогда $x_A:x_B:x_C=2:3:6$. Это значит, что на сумму 880

тысяч рублей приходится $2+3+6=11$ частей. Таким образом, величина одной части равна $880:11=80$ тысячам рублей. При этом на акции компании В приходится 3 части, значит стоимость приобретенных акций компании В, равна $80\cdot 3=240$ тысяч рублей.
Ответ: 240.

8. Тема “Проценты”
На сколько процентов число 120 меньше числа 150? Знак процента в ответе не пишите.
Решение. Чтобы узнать, на сколько процентов число a меньше числа b, нужно воспользоваться формулой $\frac{b-a}{b}100\%$. В данной задаче $\frac{150-120}{150}100\%=20\%$.
Заметим, что для того, чтобы узнать, на сколько процентов число b больше числа a, нужно использовать формулу $\frac{b-a}{a}100\%$.
Ответ: 20.

9. Тема “Иррациональные числа”
Вычислите $(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-\sqrt{200}$.
Решение.
$$(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-\sqrt{200}=5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}+10-\sqrt{2\cdot 100}=15+2\sqrt{50}-10\sqrt{2}=15+10\sqrt{2}-10\sqrt{2}=15.$$

Ответ: 15.

10. Тема “Задачи на проценты”
Пальто подорожало на 15% и стало стоить 8625 рублей. Сколько рублей стоило пальто до подорожания?
Решение. Пусть x – цена пальто в рублях до подорожания. Тогда после подорожания цена пальто стала равной $x+0{,}15x=1{,}15x$. Составим уравнение $1{,}15x=8625$, откуда $x=7500$.
Ответ: 7500.

11. Тема “Задачи на работу”
На изготовление 425 деталей первый рабочий затрачивает на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 525 таких же деталей. Первый рабочий за час изготавливает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?
Решение. Пусть x - производительность труда первого рабочего, т. е. количество деталей, изготовленных за 1 час первым рабочим. Будем использовать формулу, выражающую время работы через выполненную работу и производительность труда: $t=\frac{A}{w}$.
Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Время работы t (часы)	Производительность труда w (количество деталей в час)	Выполненная работа A (количество деталей)
Первый рабочий	$\frac{425}{x}$	x	425
Второй рабочий	$\frac{525}{x-4}$	$x-4$	525

Учитывая, что время работы первого рабочего на 8 часов меньше, чем время работы второго, составим уравнение $\frac{525}{x-4}-\frac{425}{x}=8$.

Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим $\frac{525x-425x+425\cdot 4}{x(x-4)}=8$. Приведем подобные члены и умножим обе части уравнения на $x(x-4)$. После упрощения получим квадратное уравнение $2x^2-33x-425=0$. Его корнями являются числа 25 и $-8{,}5$. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.
Ответ: 25.

12. Тема “Задачи на смеси”
Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл содержит 4% примесей. Сколько тонн металла получится из 24 тонн руды?
Решение. Процесс выплавки металла состоит в избавлении руды от примесей. При этом количество чистого металла остается неизменным. Руда содержит 40% примесей, значит, чистый металл в руде составляет 60%. Тогда вес чистого металла в 24 тоннах руды равен $24\cdot 0{,}6=14{,}4$ тонны. В выплавленном металле примеси составляют 4%, значит, на чистый металл приходится 96%. Пусть x – вес выплавленного металла. Тогда $0{,}96x$ – вес чистого металла в выплавленном. Составим уравнение $0{,}96x = 14{,}4$. Решая его, получим $x = 15$.
Ответ: 15.

13. Тема “Задачи на движение”
Катер прошел расстояние между двумя речными пристанями, равное 90 км, туда и обратно за 12 часов. Скорость течения реки равна 4 км/час. Сколько километров в час составляет скорость катера в стоячей воде?
Решение. Пусть x – скорость катера в стоячей воде. Тогда $x + 4$ – скорость катера на пути по течению реки, а $x - 4$ – скорость катера на пути против течения реки. Будем использовать формулу, выражающую время движения через пройденный путь и скорость движения: $t=\frac{S}{v}$. Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Время движения t (часы)	Скорость движения v (км/час)	Пройденный путь S (км)
Движение по течению	$\frac{90}{x+4}$	$x+4$	90
Движение против течения	$\frac{90}{x-4}$	$x-4$	90

Учитывая, что весь путь занял 12 часов, составим уравнение $\frac{90}{x+4}+\frac{90}{x-4}=12$. Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим $\frac{90(x-4)+90(x+4)}{(x-4)(x+4)}=12$.
Раскроем в числителе скобки, приведем подобные члены и умножим обе части уравнения на $(x-4)(x+4)$. После упрощения получим квадратное уравнение $x^2-15x-16=0$. Его корнями являются числа 16 и -1. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.
Ответ: 16.

14. Тема “Задачи на целые числа”

В первый день магазин продавал холодильники по цене 12 тысяч рублей за штуку, а во второй день со скидкой по 11 тысяч рублей за штуку. При этом оказалось, что стоимость всех холодильников, проданных в первый день, составляет 80% от стоимости всех холодильников, проданных во второй день. Какое наименьшее количество холодильников могло быть продано во второй день?

Решение. Пусть n – количество холодильников, проданных в первый день, а m – количество холодильников, проданных во второй день. Очевидно, что n и m – целые числа. Стоимость всех холодильников, проданных в первый день равна $12n$ тысяч рублей, а во второй день – $11m$ тысяч рублей. Составим уравнение $12n = 0,8 \cdot 11m$. Разделим обе части уравнения на 0,8, получим уравнение с целыми коэффициентами $15n = 11m$. Поскольку n и m являются целыми числами, из уравнения следует, что $11m$ должно делиться на 15. Поскольку 11 на 15 не делится, то на 15 должно делиться число m. Наименьшим целым положительным числом, делящимся на 15, является само число 15. Значит наименьшее количество холодильников, проданных во второй день, равно 15.

Ответ: 15.

15. Тема “Тригонометрические функции”

В прямоугольном треугольнике ΔABC гипотенуза BC равна 65, а катет AB равен 60. Найдите тангенс угла $\angle C$.

Решение. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего этому углу катета к длине прилежащего катета. Значит, $tg\angle C = \frac{AB}{AC}$. Найдем длину AC по теореме Пифагора: $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 65^2 - 60^2 = 625$.

Значит, $AC = 25$. Тогда $tg\angle C = \frac{60}{25} = 2,4$.

Ответ: 2,4.

16. Тема “Геометрия”

Меньшая сторона прямоугольника равна 125, а величина угла между диагоналями равна $120°$. Найдите длину диагонали.

Решение. Обозначим последовательные вершины прямоугольника буквами *A, B, C* и *D,* а точку пересечения его диагоналей буквой *O*. Пусть $AB = CD = 125$. Тогда $\angle BOC = 120°$. Угол $\angle AOB$ является смежным углом с углом $\angle BOC$, следовательно, $\angle AOB = 60°$. В треугольнике $\triangle ABO$ стороны AO и BO равны, так как диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам. Таким образом, $\triangle ABO -$ равнобедренный треугольник с углом при вершине равным $60°$. Значит, $\triangle ABO$ является также равносторонним: $AO = AB = 125$. Поскольку AO является половиной диагонали AC, то $AC = 250$.

Ответ: 250.

17. Тема “Системы уравнений”

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 17x + 6y = 27 \\ 2x - 11y = 50 \end{cases}.$$

В ответ запишите сумму найденных значений x и y.

Решение. Выразим из первого уравнения системы неизвестную величину x и подставим во второе уравнение. Получим систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{27-6y}{17} \\ 2\cdot\dfrac{27-6y}{17} - 11y = 50 \end{cases}.$$

Найдем из второго уравнения неизвестную величину y :

$$2\cdot\frac{27-6y}{17} - 11y = 50 \Leftrightarrow 54-12y-187y = 850 \Leftrightarrow -199y = 796 \Leftrightarrow y = -4.$$

Подставим найденное значение y в первое уравнение: $x = \dfrac{27-6\cdot(-4)}{17}$, получим $x = 3$.

Тогда $x + y = -1$.

Ответ: – 1.

18. Тема “ Линейные неравенства”

Решите неравенство:

$$x + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x - 3 < 6.$$

Варианты ответов:

А**.** $x > \dfrac{43}{8}$

Б. $x < 5{,}375$

В. $x < 17$

Г. $x > 21{,}5$

Д. $x < \dfrac{19}{8}$

Решение. Умножим обе части неравенства на 5 и приведем подобные члены. Получим неравенство $8x < 43$, откуда $x < 5{,}375$.

Ответ: Б.

19. Тема “Квадратные неравенства”

Решите неравенство:

$x^2 > 11$.

Варианты ответов:

А. $\left(-\sqrt{11};\sqrt{11}\right)$

Б. $\left(-\infty;\sqrt{11}\right)$

В. $\left(-\infty;-\sqrt{11}\right);\left(\sqrt{11};+\infty\right)$

Г. $\left(-\sqrt{11};+\infty\right)$

Д. $\left(\sqrt{11};+\infty\right)$

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Приведем его к виду $x^2 - 11 > 0$. Решим уравнение $x^2 - 11 = 0$. Его корнями являются числа $\sqrt{11}$ и $-\sqrt{11}$. Отметим на числовой оси точки, соответствующие этим числам. Эти точки выделяют на числовой оси на три интервала $\left(-\infty;-\sqrt{11}\right)$, $\left(-\sqrt{11};\sqrt{11}\right)$ и $\left(\sqrt{11};+\infty\right)$, на каждом из которых, выражение $x^2 - 11$ принимает одинаковые по знаку значения. Подставляя в это выражение вместо x

числа из полученных интервалов, получим, что $x^2 - 11 > 0$ при x из интервалов $\left(-\infty; -\sqrt{11}\right)$ и $\left(\sqrt{11}; +\infty\right)$.

Ответ: В.

20. Тема “Функции”

Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Если точка является точкой пересечения двух линий, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих линий. Значит, чтобы найти точки пересечения графиков данных функций, нужно решить систему уравнений:

$\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$. Запишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ x^2 = \frac{8}{x} \end{cases}$. Умножив обе части второго уравнения на x, приведем его к виду $x^3 = 8$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 2$. Тогда и неизвестная величина y также принимает единственное значение $y = 4$. Следовательно, графики функций имеют единственную точку пересечения.

Ответ: 1.

Решения для 10 класса подготовительного варианта

1. Тема "Действия с дробями"

Выполните действия: $\dfrac{\left(0,5:1,25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

Решение. Выполним действия в следующем порядке:

1) $0,5:1,25=\dfrac{1}{2}:1\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

2) $\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}=\dfrac{7}{5}:\dfrac{11}{7}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{7}{11}=\dfrac{49}{55}$.

3) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{49}{55}-\dfrac{3}{11}=\dfrac{2\cdot 11+49-3\cdot 5}{55}=\dfrac{56}{55}$.

4) $1,5+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$.

5) $\dfrac{7}{4}:18\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}:\dfrac{55}{3}=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{3}{55}=\dfrac{21}{4\cdot 55}$.

6) $\dfrac{56}{55}\cdot 3:\dfrac{21}{4\cdot 55}=\dfrac{56\cdot 3\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=8\cdot 4=32$.

Ответ: 32.

2. Тема "Преобразование рациональных выражений"

Упростите выражение: $\left(\dfrac{x}{y^2+xy}-\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{y}{x^2+xy}\right):\left(\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}\right)$.

Варианты ответов:

А. $\dfrac{1}{x+y}$

Б. $\dfrac{1}{x-y}$

В. $\dfrac{1}{y-x}$

Г. $\dfrac{1}{xy}$

Д. $\dfrac{2}{x+y}$

Решение.

$$\left(\frac{x}{y^2+xy}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{x}{y(y+x)}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x(x+y)}\right):\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{yx}\right)=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}\cdot\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x+y}.$$

Ответ: А.

3. Тема "Рациональные уравнения"

Решите уравнение: $\frac{6x+12}{x^2+x-2}=x$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите наименьший корень.
Решение. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Для этого определим, при каких значениях неизвестной величины x знаменатель дроби в левой части уравнения обращается в нуль. Решим уравнение $x^2+x-2=0$. Его корнями являются числа $x_1=-2, x_2=1$. Значит, в ОДЗ входят все действительные числа за исключением – 2 и 1.
Выполним преобразования уравнения: $\frac{6x+12}{x^2+x-2}=x \Leftrightarrow \frac{6(x+2)}{(x+2)(x-1)}=x.$ Поскольку $x \neq -2$, можно сократить дробь в левой части уравнения на $x+2$. Получим уравнение $\frac{6}{x-1}=x$. Умножим обе части на отличный от нуля множитель $x-1$, после упрощения получим квадратное уравнение $x^2-x-6=0$. Корнями квадратного уравнения являются числа – 2 и 3. Первый корень не входит в ОДЗ, значит, исходное уравнение имеет единственный корень 3.
Ответ: 3.

4. Тема “Иррациональные уравнения”
Решите уравнение: $\sqrt{4-3x}=x$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите их сумму.
Решение. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Для этого определим, при каких значениях неизвестной величины x выражение, стоящее под знаком квадратного корня неотрицательно, т. е. решим неравенство $4-3x \geq 0$. Получим, что ОДЗ состоит из чисел промежутка $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.
Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $4-3x=x^2$. Корнями этого уравнения являются числа $x_1=-4; x_2=1$. Оба корня входят в ОДЗ. Поскольку возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к уравнению, не равносильному исходному, необходимо сделать проверку. Подставим найденные корни в исходное уравнение, получим, что только $x_2=1$ обращает его в верное равенство. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень 1.
Ответ: 1.

5. Тема “Теорема Виета”
Вычислите $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2-4x-7=0$.
Решение. По теореме Виета для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, имеющего корни x_1 и x_2, справедливы равенства: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$. Вычислим для квадратного трехчлена x^2-4x-7 дискриминант $D=16+4\cdot 7=44$. Поскольку $D>0$, квадратное уравнение имеет два различных корня. Значит, можно воспользоваться теоремой Виета: $x_1+x_2=4$ и $x_1 \cdot x_2=-7$. Тогда $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}=-\frac{7}{4}$.
Ответ: $-1,75$.

6. Тема “Уравнения с модулем”

Решите уравнение: $\left|3-|x+1|\right|=1$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите сумму корней.
Решение. По определению модуль числа *a* равен числу *a*, если $a \geq 0$, и равен числу $-a$, если $a<0$. Геометрический смысл модуля числа состоит в том, что модуль числа *a* равен расстоянию от точки числовой оси, соответствующей числу *a,* до нуля. В данной задаче удобнее воспользоваться геометрическим смыслом модуля. Точки, находящиеся на числовой оси на расстоянии от нуля равном 1, соответствуют числам 1 и – 1. Тогда уравнение разбивается на совокупность двух уравнений: $\left[\begin{array}{l}3-|x+1|=1\\3-|x+1|=-1\end{array}\right.$. Приведем уравнения совокупности к виду: $\left[\begin{array}{l}|x+1|=2\\|x+1|=4\end{array}\right.$. Еще раз воспользуемся геометрическим смыслом модуля для каждого из уравнений совокупности, получим совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}x+1=2\\x+1=-2\\x+1=4\\x+1=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\\x=3\\x=-5\end{array}\right.$. Сумма полученных корней равна -4.
Ответ: – 4.

7. Тема “Пропорции”
Бизнесмен приобрел акции трех компаний А, В и С на сумму 880 тысяч рублей. При этом на каждые 2 рубля, вложенные в акции компании А, приходится 3 рубля, вложенные в акции компании В, а на каждый рубль, вложенный в акции компании В, приходится 2 рубля, вложенные в акции компании С. Сколько тысяч рублей вложил бизнесмен в акции компании В?
Решение. Пусть x_A, x_B и x_C – стоимости приобретенных бизнесменом акций компаний А, В и С соответственно. Тогда $x_A : x_B = 2:3$, $x_B : x_C = 1:2$. Последнюю пропорцию можно записать в виде: $x_B : x_C = 3:6$. Тогда $x_A : x_B : x_C = 2:3:6$. Это значит, что на сумму 880 тысяч рублей приходится $2+3+6=11$ частей. Таким образом, величина одной части равна $880:11=80$ тысячам рублей. При этом на акции компании В приходится 3 части, значит стоимость приобретенных акций компании В, равна $80 \cdot 3 = 240$ тысяч рублей.
Ответ: 240.

8. Тема “Проценты”
Сколько процентов числа 7 составляет сумма его и четырех процентов числа 28? Знак процента в ответе не пишите.
Решение. Четыре процента от числа 28 равны $0,04 \cdot 28 = 1,12$. Тогда $7+1,12=8,12$. Чтобы узнать, сколько процентов составляет число 8,12 от 7, вычислим $\frac{8,12}{7}100\% = 116\%$.
Ответ: 116.

9. Тема “Иррациональные числа”
Вычислите $(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-\sqrt{200}$.
Решение.
$$(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-\sqrt{200}=5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}+10-\sqrt{2\cdot 100}=15+2\sqrt{50}-10\sqrt{2}=15+10\sqrt{2}-10\sqrt{2}=15.$$
Ответ: 15.

10. Тема “Задачи на проценты”
Товар стоимостью 3500 рублей уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цены товар стал стоить 2835 рублей. Знак процента в ответе не пишите.
Решение. Пусть искомое число процентов равно x, тогда после первого снижения цена товара стала равна $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)$ рублей, а после второго – $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$ рублей.

Составим уравнение $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = 2835$. Разделим обе части уравнения на 3500,

сократим полученную дробь в правой части. Получим уравнение $\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{81}{100}$. Это

уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 1-\frac{x}{100}=\frac{9}{10} \\ 1-\frac{x}{100}=-\frac{9}{10} \end{array}\right.$. Из первого уравнения

следует, что $x=10$. Из второго следует, что $x=190$. Это значение не подходит по смыслу задачи: нельзя снизить цену более, чем на 100%
Ответ: 10.

11. Тема “Задачи на работу”
На изготовление 425 деталей первый рабочий затрачивает на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 525 таких же деталей. Первый рабочий за час изготавливает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?
Решение. Пусть x - производительность труда первого рабочего, т. е. количество деталей, изготовленных за 1 час первым рабочим. Будем использовать формулу, выражающую время работы через выполненную работу и производительность труда: $t=\frac{A}{w}$.

Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Время работы t (часы)	Производительность труда w (количество деталей в час)	Выполненная работа A (количество деталей)
Первый рабочий	$\frac{425}{x}$	x	425
Второй рабочий	$\frac{525}{x-4}$	$x-4$	525

Учитывая, что время работы первого рабочего на 8 часов меньше, чем время работы второго, составим уравнение $\frac{525}{x-4}-\frac{425}{x}=8$.

Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим
$\frac{525x-425x+425\cdot 4}{x(x-4)}=8$. Приведем подобные члены и умножим обе части уравнения на

$x(x-4)$. После упрощения получим квадратное уравнение $2x^2-33x-425=0$. Его корнями являются числа 25 и $-8{,}5$. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.
Ответ: 25.

12. Тема “Задачи на смеси”

Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл содержит 4% примесей. Сколько тонн металла получится из 24 тонн руды?

Решение. Процесс выплавки металла состоит в избавлении руды от примесей. При этом количество чистого металла остается неизменным. Руда содержит 40% примесей, значит, чистый металл в руде составляет 60%. Тогда вес чистого металла в 24 тоннах руды равен $24\cdot 0,6=14,4$ тонны. В выплавленном металле примеси составляют 4%, значит, на чистый металл приходится 96%. Пусть x – вес выплавленного металла. Тогда $0,96x$ – вес чистого металла в выплавленном. Составим уравнение $0,96x = 14,4$. Решая его, получим $x = 15$.

Ответ: 15.

13. Тема “Задачи на движение”

Катер прошел расстояние между двумя речными пристанями, равное 90 км, туда и обратно за 12 часов. Скорость течения реки равна 4 км/час. Сколько километров в час составляет скорость катера в стоячей воде?

Решение. Пусть x – скорость катера в стоячей воде. Тогда $x + 4$ – скорость катера на пути по течению реки, а $x – 4$ – скорость катера на пути против течения реки. Будем использовать формулу, выражающую время движения через пройденный путь и скорость движения: $t=\frac{S}{v}$. Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Время движения t (часы)	Скорость движения v (км/час)	Пройденный путь S (км)
Движение по течению	$\frac{90}{x+4}$	$x+4$	90
Движение против течения	$\frac{90}{x-4}$	$x-4$	90

Учитывая, что весь путь занял 12 часов, составим уравнение $\frac{90}{x+4}+\frac{90}{x-4}=12$. Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим $\frac{90(x-4)+90(x+4)}{(x-4)(x+4)}=12$.

Раскроем в числителе скобки, приведем подобные члены и умножим обе части уравнения на $(x-4)(x+4)$. После упрощения получим квадратное уравнение $x^2-15x-16=0$. Его корнями являются числа 16 и -1. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 16.

14. Тема “Задачи на целые числа”

В первый день магазин продавал холодильники по цене 12 тысяч рублей за штуку, а во второй день со скидкой по 11 тысяч рублей за штуку. При этом оказалось, что стоимость всех холодильников, проданных в первый день, составляет 80% от стоимости всех холодильников, проданных во второй день. Какое наименьшее количество холодильников могло быть продано во второй день?

Решение. Пусть n – количество холодильников, проданных в первый день, а m – количество холодильников, проданных во второй день. Очевидно, что n и m – целые числа. Стоимость всех холодильников, проданных в первый день равна $12n$ тысяч рублей, а во второй день – $11m$ тысяч рублей. Составим уравнение $12n=0,8\cdot 11m$. Разделим обе

части уравнения на 0,8, получим уравнение с целыми коэффициентами $15n = 11m$. Поскольку n и m являются целыми числами, из уравнения следует, что $11m$ должно делиться на 15. Поскольку 11 на 15 не делится, то на 15 должно делиться число m. Наименьшим целым положительным числом, делящимся на 15, является само число 15. Значит наименьшее количество холодильников, проданных во второй день, равно 15.
Ответ: 15.

15. Тема “Тригонометрические уравнения”
Решите уравнение $2\sin x + \sqrt{3}tgx = 0$ на промежутке $[180°;270°]$. Если корней несколько, в ответ запишите их сумму, выраженную в градусах. Знак градуса в ответе не пишите.
Решение. Запишем уравнение в виде: $2\sin x + \sqrt{3}\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$. Определим область допустимых значений (ОДЗ) неизвестной величины x. Поскольку $\cos x$ находится в знаменателе дроби, должно выполняться условие $\cos x \neq 0$.
Умножим обе части уравнения на $\cos x$ и вынесем за скобку $\sin x$. Получим уравнение $\sin x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$.
На промежутке $[180°;270°]$ первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 180°$, а второе уравнение – единственный корень $x_2 = 210°$. Тогда $x_1 + x_2 = 390°$
Ответ: 390.

16. Тема “Геометрия”
Около окружности описана равнобедренная трапеция с боковой стороной равной 10. Найдите среднюю линию трапеции.
Решение. Будем использовать теорему: в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон четырехугольника равны.
Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований трапеции. Значит, длина средней линии равна также полусумме длин боковых сторон трапеции: $\dfrac{10+10}{2} = 10$.
Ответ:10.

17. Тема “Системы уравнений”
Решите систему уравнений:
$$\begin{cases}\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 5\end{cases}.$$
В ответ запишите сумму найденных значений x и y.

Решение. Сделаем замену неизвестных величин: обозначим $t=\frac{1}{x};z=\frac{1}{y}$. Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases}2t+3z=2\\4t+9z=5\end{cases}$. Сделаем преобразования уравнений системы:

$$\begin{cases}4t+6z=4\\4t+9z=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3z=1\\4t+9z=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{1}{3}\\4t+3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{1}{3}\\t=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Тогда $x=2;y=3$, значит $x+y=5$.

Ответ: 5.

18. Тема “Прогрессии”

Завод по плану должен был выпустить некоторое количество станков за 12 дней. В первый день было выпущено 5% от всего запланированного количества станков, а в каждый следующий день выпускали на 2 станка больше, чем в предыдущий. В результате за 12 дней выпустили станков на 20% больше, чем было запланировано. Сколько станков нужно было выпустить по плану?

Решение. Пусть x – количество станков, которое нужно было выпустить по плану. Тогда в первый день было выпущено $0,05x$ станков. Выпуски станков в последующие дни образуют арифметическую прогрессию первым членом $a_1=0,05x$ и разностью $d=2$. По формуле суммы арифметической прогрессии найдем количество станков, выпущенное за 12 дней:

$$S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=\frac{a_1+a_1+11d}{2}\cdot 12=12a_1+66d=12a_1+132=12\cdot 0,05x+132=0,6x+132.$$

Поскольку за 12 дней было выпущено на 20% станков больше, чем запланировано, составим уравнение: $0,6x+132=1,2x\Leftrightarrow x=220$.

Ответ: 220.

19. Тема “Рациональные неравенства”

Решите неравенство:

$\left(x^2+6x+7\right)^2<\left(x^2+4x+5\right)^2$.

Варианты ответов:

А. $\left(-3;-2\right);\left(-1;+\infty\right)$

Б. $\left(-\infty;-1\right)$

В. $\left(-\infty;-3\right);\left(-2;-1\right)$

Г. $\left(-3;+\infty\right)$

Д. $\left(-3;-1\right)$

Решение. Приведем уравнение к виду $\left(x^2+6x+7\right)^2-\left(x^2+4x+5\right)^2<0$ и воспользуемся формулой для разности квадратов. Получим неравенство:

$$\left(x^2+6x+7-x^2-4x-5\right)\left(x^2+6x+7+x^2+4x+5\right)<0\Leftrightarrow\left(2x+2\right)\left(2x^2+10x+12\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2+5x+6\right)<0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)<0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов, получим, что неравенству удовлетворяют точки из промежутков $\left(-\infty;-3\right);\left(-2;-1\right)$.

Ответ: **В**.

20. Тема “Функции”

Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = x^2$?

Решение. Если точка является точкой пересечения двух линий, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих линий. Значит, чтобы найти точки пересечения графиков данных функций, нужно решить систему уравнений:

$\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$. Запишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ x^2 = \frac{8}{x} \end{cases}$. Умножив обе части второго уравнения на x, приведем его к виду $x^3 = 8$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 2$. Тогда и неизвестная величина y также принимает единственное значение $y = 4$. Следовательно, графики функций имеют единственную точку пересечения.

Ответ: 1.

11 класс подготовительный вариант, решения

1. Тема "Действия с дробями"

Выполните действия: $\dfrac{\left(0,5:1,25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

Решение. Выполним действия в следующем порядке:

1) $0,5:1,25=\dfrac{1}{2}:1\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

2) $\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}=\dfrac{7}{5}:\dfrac{11}{7}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{7}{11}=\dfrac{49}{55}$.

3) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{49}{55}-\dfrac{3}{11}=\dfrac{2\cdot 11+49-3\cdot 5}{55}=\dfrac{56}{55}$.

4) $1,5+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$.

5) $\dfrac{7}{4}:18\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}:\dfrac{55}{3}=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{3}{55}=\dfrac{21}{4\cdot 55}$.

6) $\dfrac{56}{55}\cdot 3:\dfrac{21}{4\cdot 55}=\dfrac{56\cdot 3\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=8\cdot 4=32$.

Ответ: 32.

2. Тема "Рациональные уравнения"

уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите наименьший корень.

Решение. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Для этого определим, при каких значениях неизвестной величины x знаменатель дроби в левой части уравнения обращается в нуль. Решим уравнение $x^2+x-2=0$. Его корнями являются числа $x_1=-2, x_2=1$. Значит, в ОДЗ входят все действительные числа за исключением – 2 и 1.

Выполним преобразования уравнения: $\dfrac{6x+12}{x^2+x-2}=x \Leftrightarrow \dfrac{6(x+2)}{(x+2)(x-1)}=x.$. Поскольку $x\neq -2$, можно сократить дробь в левой части уравнения на $x+2$. Получим уравнение $\dfrac{6}{x-1}=x$. Умножим обе части на отличный от нуля множитель $x-1$, после упрощения получим квадратное уравнение $x^2-x-6=0$. Корнями квадратного уравнения являются числа – 2 и 3. Первый корень не входит в ОДЗ, значит, исходное уравнение имеет единственный корень 3.

Ответ: 3.

3. Тема "Иррациональные уравнения"

Решите уравнение: $x^2-1=\sqrt{4x^2-20x+1}+5x$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите их сумму.

Решение. Приведем уравнение к виду $x^2-5x-1=\sqrt{4(x^2-5x)+1}$. Обозначим $t=x^2-5x$. Тогда уравнение примет вид $t-1=\sqrt{4t+1}$. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) полученного уравнения. Для этого определим, при каких значениях неизвестной величины t подкоренное выражение неотрицательно: $4t+1\geq 0$. Решая это неравенство, получим, что ОДЗ состоит из чисел промежутка $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $t^2 - 2t + 1 = 4t + 1$. Его корнями являются числа $t_1 = 0, t_2 = 6$. Оба корня входят в ОДЗ. Поскольку возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к уравнению, не равносильному исходному, необходимо сделать проверку. Подставим найденные корни в уравнение $t - 1 = \sqrt{4t + 1}$, получим, что только $t_2 = 6$ обращает его в верное равенство. Подставим найденное значение *t* в равенство $t = x^2 - 5x$, получим уравнение $6 = x^2 - 5x$. Его корнями являются числа $x_1 = -1; x_2 = 6$. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

4. Тема “Теорема Виета”

Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Дискриминант квадратного трехчлена в левой части уравнения $D = 9 - 4 = 5$. Значит, квадратное уравнение имеет действительные корни. По теореме Виета сумма корней $x_1 + x_2 = -3$, а произведение корней $x_1 x_2 = 1$. Представим сумму кубов корней в виде $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$, а сумму квадратов корней в виде $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 = 9 - 2 = 7$, а отсюда $x_1^3 + x_2^3 = -3(7 - 1) = -18$.

Ответ: -18.

5. Тема “Уравнения с модулем”

Решите уравнение: $\left|3 - |x + 1|\right| = 1$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите сумму корней.

Решение. По определению модуль числа *a* равен числу *a*, если $a \ge 0$, и равен числу $-a$, если $a < 0$. Геометрический смысл модуля числа состоит в том, что модуль числа *a* равен расстоянию от точки числовой оси, соответствующей числу *a,* до нуля. В данной задаче удобнее воспользоваться геометрическим смыслом модуля. Точки, находящиеся на числовой оси на расстоянии от нуля равном 1, соответствуют числам 1 и – 1. Тогда уравнение разбивается на совокупность двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} 3 - |x + 1| = 1 \\ 3 - |x + 1| = -1 \end{array}\right.$. Приведем уравнения совокупности к виду: $\left[\begin{array}{l} |x + 1| = 2 \\ |x + 1| = 4 \end{array}\right.$. Еще раз воспользуемся геометрическим смыслом модуля для каждого из уравнений совокупности, получим совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x + 1 = 2 \\ x + 1 = -2 \\ x + 1 = 4 \\ x + 1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 3 \\ x = -5 \end{array}\right.$. Сумма полученных корней равна – 4.

Ответ: – 4.

6. Тема “Пропорции”

Бизнесмен приобрел акции трех компаний A, B и C на сумму 880 тысяч рублей. При этом на каждые 2 рубля, вложенные в акции компании A, приходится 3 рубля, вложенные в акции компании B, а на каждый рубль, вложенный в акции компании B, приходится 2 рубля, вложенные в акции компании C. Сколько тысяч рублей вложил бизнесмен в акции компании B?

Решение. Пусть x_A, x_B и x_C – стоимости приобретенных бизнесменом акций компаний А, В и С соответственно. Тогда $x_A : x_B = 2:3$, $x_B : x_C = 1:2$. Последнюю пропорцию можно записать в виде: $x_B : x_C = 3:6$. Тогда $x_A : x_B : x_C = 2:3:6$. Это значит, что на сумму 880 тысяч рублей приходится $2+3+6=11$ частей. Таким образом, величина одной части равна $880:11=80$ тысячам рублей. При этом на акции компании В приходится 3 части, значит стоимость приобретенных акций компании В, равна $80 \cdot 3 = 240$ тысяч рублей.
Ответ: 240.

7. Тема “Проценты”
Сколько процентов числа 7 составляет сумма его и четырех процентов числа 28? Знак процента в ответе не пишите.
Решение. Четыре процента от числа 28 равны $0,04 \cdot 28 = 1,12$. Тогда $7+1,12=8,12$. Чтобы узнать, сколько процентов составляет число 8,12 от 7, вычислим $\frac{8,12}{7}100\% = 116\%$.
Ответ: 116.

8. Тема “Иррациональные числа”
Вычислите $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.
Решение. Каждую дробь умножим и разделим на число сопряженное знаменателю дроби, от этого величина дроби, очевидно, не изменится. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)} - \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} - \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}.$$

Используя формулу для разности квадратов, приведем выражение к виду

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} - \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} - \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2} = \sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{2}=0$$

Ответ: 0.

9. Тема “Задачи на проценты”
Товар стоимостью 3500 рублей уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цены товар стал стоить 2835 рублей. Знак процента в ответе не пишите.
Решение. Пусть искомое число процентов равно x, тогда после первого снижения цена товара стала равна $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)$ рублей, а после второго – $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$ рублей.

Составим уравнение $3500\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = 2835$. Разделим обе части уравнения на 3500,

сократим полученную дробь в правой части. Получим уравнение $\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{81}{100}$. Это

уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{x}{100}=\dfrac{9}{10} \\ 1-\dfrac{x}{100}=-\dfrac{9}{10} \end{array}\right.$. Из первого уравнения следует, что $x=10$. Из второго следует, что $x=190$. Это значение не подходит по смыслу задачи: нельзя снизить цену более, чем на 100%
Ответ: 10.

10. Тема "Задачи на работу"
Бригада выпускала за смену 500 деталей. После того, как из состава бригады вывели 5 человек, а каждый из оставшихся в бригаде рабочих увеличил производительность труда на 5 деталей за смену, бригада стала выпускать за смену на 10% деталей меньше. Сколько рабочих было в бригаде вначале?
Решение. Будем использовать формулу, выражающую выполненную за смену работу A через количество рабочих n и производительность труда одного рабочего w (количество деталей, выпущенное одним рабочим за смену): $A = nw$. Пусть x – количество рабочих в бригаде вначале. Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Количество рабочих n	Производительность труда одного рабочего w (количество деталей за смену, выпущенное одним рабочим)	Выполненная работа за смену A (количество деталей за смену, выпущенное бригадой)
Первоначальный состав бригады	x	$\dfrac{500}{x}$	500
Измененный состав бригады	$x-5$	$\dfrac{500}{x}+5$	450

Составим уравнение $\left(x-5\right)\left(\dfrac{500}{x}+5\right)=450$. Приведем его к квадратному уравнению $x^2+5x-500=0$. Его корнями являются числа 20 и -25. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.
Ответ: 20 человек.

11. Тема "Задачи на смеси"
Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл содержит 4% примесей. Сколько тонн металла получится из 24 тонн руды?
Решение. Процесс выплавки металла состоит в избавлении руды от примесей. При этом количество чистого металла остается неизменным. Руда содержит 40% примесей, значит, чистый металл в руде составляет 60%. Тогда вес чистого металла в 24 тоннах руды равен $24\cdot 0,6=14,4$ тонны. В выплавленном металле примеси составляют 4%, значит, на чистый металл приходится 96%. Пусть x – вес выплавленного металла. Тогда $0,96x$ – вес чистого металла в выплавленном. Составим уравнение $0,96x = 14,4$. Решая его, получим $x = 15$.
Ответ: 15.

12. Тема "Задачи на движение"
Катер прошел расстояние между двумя речными пристанями, равное 90 км, туда и обратно за 12 часов. Скорость течения реки равна 4 км/час. Сколько километров в час составляет скорость катера в стоячей воде?

Решение. Пусть x – скорость катера в стоячей воде. Тогда $x + 4$ – скорость катера на пути по течению реки, а $x - 4$ – скорость катера на пути против течения реки. Будем использовать формулу, выражающую время движения через пройденный путь и скорость движения: $t = \frac{S}{v}$. Запишем в таблицу данные задачи и результаты вычислений по формуле.

	Время движения t (часы)	Скорость движения v (км/час)	Пройденный путь S (км)
Движение по течению	$\frac{90}{x+4}$	$x + 4$	90
Движение против течения	$\frac{90}{x-4}$	$x - 4$	90

Учитывая, что весь путь занял 12 часов, составим уравнение $\frac{90}{x+4} + \frac{90}{x-4} = 12$. Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим $\frac{90(x-4) + 90(x+4)}{(x-4)(x+4)} = 12$.

Раскроем в числителе скобки, приведем подобные члены и умножим обе части уравнения на $(x-4)(x+4)$. После упрощения получим квадратное уравнение $x^2 - 15x - 16 = 0$. Его корнями являются числа 16 и -1. Второй корень, очевидно, не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 16.

13. Тема “Задачи на целые числа”

В первый день магазин продавал холодильники по цене 12 тысяч рублей за штуку, а во второй день со скидкой по 11 тысяч рублей за штуку. При этом оказалось, что стоимость всех холодильников, проданных в первый день, составляет 80% от стоимости всех холодильников, проданных во второй день. Какое наименьшее количество холодильников могло быть продано во второй день?

Решение. Пусть n – количество холодильников, проданных в первый день, а m – количество холодильников, проданных во второй день. Очевидно, что n и m – целые числа. Стоимость всех холодильников, проданных в первый день равна $12n$ тысяч рублей, а во второй день – $11m$ тысяч рублей. Составим уравнение $12n = 0{,}8 \cdot 11m$. Разделим обе части уравнения на 0,8, получим уравнение с целыми коэффициентами $15n = 11m$. Поскольку n и m являются целыми числами, из уравнения следует, что $11m$ должно делиться на 15. Поскольку 11 на 15 не делится, то на 15 должно делиться число m. Наименьшим целым положительным числом, делящимся на 15, является само число 15. Значит наименьшее количество холодильников, проданных во второй день, равно 15.

Ответ: 15.

14. Тема “Тригонометрические уравнения”

Решите уравнение $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ на промежутке $\left[45°;180°\right]$. Если корней несколько, в ответ запишите их сумму, выраженную в градусах. Знак градуса в ответе не пишите.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, (заметим, что значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, поскольку для таких значений x было бы верно также $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству).

Получим уравнение $3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-4\frac{\sin x}{\cos x}+1=0 \Leftrightarrow 3tg^2x-4tgx+1=0$. Положим $t=tgx$. Решим квадратное уравнение $3t^2-4t+1=0$. Его корнями являются числа $t_1=1, t_2=\frac{1}{3}$. Решением уравнения $tgx=1$ являются числа $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,$ где $k\in Z$, а решением уравнения $tgx=\frac{1}{3}$ являются числа $x=arctg\frac{1}{3}+\pi k,$ где $k\in Z$. Выразим концы промежутка $[45°;180°]$ в радианах, получим промежуток $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$. Среди всех полученных значений x, только $x=\frac{\pi}{4}$ попадает в данный промежуток. Следовательно, исходное уравнение имеет на данном промежутке только один корень $x=\frac{\pi}{4}$, или $x=45°$.

Ответ: 45.

15. Тема “Геометрия”

Около окружности описана равнобедренная трапеция с боковой стороной равной 10. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение. Будем использовать теорему: в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон четырехугольника равны.

Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований трапеции. Значит, длина средней линии равна также полусумме длин боковых сторон трапеции: $\frac{10+10}{2}=10$.

Ответ:10.

16. Тема “Логарифмическое уравнение”

$\log_{27}x+\log_9 x+\log_3 x=\frac{11}{3}$.

Решение. Под знаком логарифма могут стоять только положительные числа, значит областью допустимых значений (ОДЗ) неизвестной величины x является множество $(0;+\infty)$. Запишем уравнение в виде: $\log_{3^3}x+\log_{3^2}x+\log_3 x=\frac{11}{3}$. Пользуясь свойством логарифмов, приведем уравнение к виду: $\frac{1}{3}\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3 x=\frac{11}{3}\Leftrightarrow\frac{11}{6}\log_3 x=\frac{11}{3}$, откуда $\log_3 x=2$. Из определения логарифма следует, что $x=9$.

Ответ: 9.

17. Тема “Прогрессии”

Завод по плану должен был выпустить некоторое количество станков за 12 дней. В первый день было выпущено 5% от всего запланированного количества станков, а в каждый следующий день выпускали на 2 станка больше, чем в предыдущий. В результате за 12 дней выпустили станков на 20% больше, чем было запланировано. Сколько станков нужно было выпустить по плану?

Решение. Пусть x – количество станков, которое нужно было выпустить по плану. Тогда в первый день было выпущено $0{,}05x$ станков. Выпуски станков в последующие дни образуют арифметическую прогрессию первым членом $a_1=0{,}05x$ и разностью $d=2$. По формуле суммы арифметической прогрессии найдем количество станков, выпущенное за 12 дней:

$$S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=\frac{a_1+a_1+11d}{2}\cdot 12=12a_1+66d=12a_1+132=12\cdot 0,05x+132=0,6x+132.$$

Поскольку за 12 дней было выпущено на 20% станков больше, чем запланировано, составим уравнение: $0,6x+132=1,2x \Leftrightarrow x=220$.

Ответ: 220.

18. Тема “Рациональные неравенства”

Решите неравенство:

$\left(x^2+6x+7\right)^2<\left(x^2+4x+5\right)^2$.

Варианты ответов:

А. $(-3;-2);(-1;+\infty)$

Б. $(-\infty;-1)$

В. $(-\infty;-3);(-2;-1)$

Г. $(-3;+\infty)$

Д. $(-3;-1)$

Решение. Приведем уравнение к виду $\left(x^2+6x+7\right)^2-\left(x^2+4x+5\right)^2<0$ и воспользуемся формулой для разности квадратов. Получим неравенство:

$$\left(x^2+6x+7-x^2-4x-5\right)\left(x^2+6x+7+x^2+4x+5\right)<0 \Leftrightarrow (2x+2)\left(2x^2+10x+12\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+5x+6\right)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)<0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов, получим, что неравенству удовлетворяют точки из промежутков $(-\infty;-3);(-2;-1)$.

Ответ: В.

19. Тема “Функции”

Сколько точек пересечения имеют графики функций $y=\frac{8}{x}$ и $y=x^2$?

Решение. Если точка является точкой пересечения двух линий, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих линий. Значит, чтобы найти точки пересечения графиков данных функций, нужно решить систему уравнений:

$\begin{cases} y=\frac{8}{x} \\ y=x^2 \end{cases}$. Запишем систему в виде $\begin{cases} y=\frac{8}{x} \\ x^2=\frac{8}{x} \end{cases}$. Умножив обе части второго уравнения на x, приведем его к виду $x^3=8$. Это уравнение имеет единственный корень $x=2$. Тогда и неизвестная величина y также принимает единственное значение $y = 4$. Следовательно, графики функций имеют единственную точку пересечения.

Ответ: 1.

20. Тема “Задачи с параметрами”

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет два различных положительных корня. Варианты ответов:

А. $-2<a<2$

Б. $a<0;a>2$

В. $a < -2$
Г. $a > -2$
Д. $a > 0; a < -2$

Решение. Количество корней квадратного уравнения определяется знаком дискриминанта квадратного трехчлена *D*. Для того, чтобы уравнение имело два различных корня, необходимо и достаточно, чтобы $D > 0$. Данное уравнение имеет два различных корня, если дискриминант $D = a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 2 \end{array}\right.$.

Пусть x_1, x_2 – корни данного уравнения. Тогда условие того, что они оба положительны, можно записать в виде: $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$. По теореме Виета в данном уравнении $x_1 + x_2 = -a$ и $x_1 x_2 = 1$. Таким образом, условие $x_1 x_2 > 0$ выполняется для всех значений *a*, а условие $x_1 + x_2 > 0$ выполняется для $-a > 0 \Leftrightarrow a < 0$. Учитывая условие положительности дискриминанта, получим, что все требуемые условия выполняются при $a < -2$.

Ответ: В.