Заключительный этап Отраслевой олимпиады школьников «ГАЗПРОМ» по математике проводится только в письменной форме. Вариант билета может содержать от 6 до 10 задач, связанных с преобразованием алгебраического выражения, решением алгебраического, иррационального, тригонометрического показательного (или логарифмического) уравнения или неравенства, или их систем, задачи на прогрессию, задачи на применение производной, задачи по геометрии, текстовые задачи, задачи с параметром.

Задачи рассчитаны на выявление математической смекалки и эрудиции каждого участника олимпиады. При решении следует учитывать, что в вариант включены задачи разной сложности, как правило, сложность возрастает в порядке возрастания номера задачи. Выполнение более сложной задачи оценивается большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные дроби и наоборот. В решениях также не требуется приводить пространных словесных пояснений, но следует выполнить все необходимые математические выкладки.

В целом уровень предлагаемых заданий не выходит за рамки программы средней общеобразовательной школы. Типовые примеры дают представление об уровне требований, предъявляемых к участникам олимпиады.

1. Тождественные преобразования выражение. Прогрессии

1.1. Задачи на вычисление значений выражений

Задача 1. Найти значение числового выражения A, если

$$A=(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right).$$

Решение.

$$(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5\cdot 2}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{\frac{7\cdot 8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-140\sqrt{\frac{1}{50}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{28\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-140\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot\left(\frac{5\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}(28-3+1+4-28)}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=1000\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot(1+1{,}017)=1000\cdot 2{,}017=2017.$$

Ответ. 2017.

Задача 2. Найти сумму $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2$.

Решение.

Поскольку $-n^2+(n+1)^2=n+(n+1)$, то

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2=$$
$$=1+(2+3)+(4+5)+\ldots+(100+101)=$$
$$=1+2+3+4+5+\ldots+100+101=$$

$$=\frac{(1+101)\cdot 101}{2}=5151.$$

Ответ. 5151.

Задача 3. Найти сумму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Решение.

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$, поэтому

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)+\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)=$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=10-1=9.$$

Ответ. 9.

Задача 4. Найти значение выражения A, если $A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)$.

Решение.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right).$$

Упростим это выражение.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9-1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\ldots\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}\cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}.$$

Полученное выражение можно сократить на произведение

$2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 2017^2\cdot 2018.$

Тогда, $A=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\ldots\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}\cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}=\frac{2019}{2\cdot 2018}=\frac{2019}{4036}$.

Ответ. $A=\frac{2019}{4036}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{87\cdot 101}$.

Указание. Представить каждое слагаемых суммы по формуле $\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$.

Ответ. $\frac{25}{101}$.

Задача 6. Доказать, что число $(998\cdot 999\cdot 1000\cdot 1001+1)\cdot(999\cdot 1000\cdot 1001\cdot 1002+1)(1000\cdot 1001\cdot 1002\cdot 1003+1)$ есть полный квадрат.

Указание. Доказать, что каждый множитель произведения можно представить по формуле $(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=\left(n^2-n-1\right)^2$.

Задача 7. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

Указание. Обозначить данное выражение A, возвести в куб, выразить A^3 через A, получив кубическое уравнение. Решив полученное уравнение, найти значение A, т.е. значение данного выражения.

Ответ. 3.

Задача 8. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}+\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}$.

Ответ. 5.

1.2. Задачи на доказательство тождеств и упрощение выражений

Задача 9. Найти значение выражение A при $x=8$, если

$$A=\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}.$$

Решение.

Упростим выражение A, пользуясь формулами сокращенного умножения и свойствами степеней.

$$A=\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}(x-1)}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\right)\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\;\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}=\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}-1}.$$

При $x=8$ значение выражения $A=\frac{1}{\left(8^{\frac{2}{3}}-1\right)}=\frac{1}{3}$.

Ответ. $A=\frac{1}{3}$.

Задача 10. Упростить выражение $\sqrt{p^2-2pq+q^2}\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{-1}+\frac{q^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}}\right)$.

Решение.

Так как $\sqrt{p^2-2pq+q^2}=\sqrt{(p-q)^2}=|p-q|$, то

$$\sqrt{p^2-2pq+q^2}\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{-1}+\frac{q^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}}\right)=$$

$$=|p-q|\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}+\frac{q}{p-q}+\frac{p}{p+q}\right)=$$

$$=|p-q|\,\frac{2pq+pq+q^2+p^2-pq}{p^2-q^2}=$$

$$=\frac{|p-q|(p+q)^2}{(p-q)(p+q)}=\frac{|p-q|(p+q)}{(p-q)}=(p+q)\operatorname{sgn}(p-q)=$$

$$=\left[\begin{array}{l} p+q,\ p>q; \\ -p-q,\ p<q. \end{array}\right.$$

Ответ. $p+q$ при $p>q$,
$-p-q$ при $p<q$.

Задача 11. Докажите, что $(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot\ldots\cdot(1+b^{2n})=1+b+b^2+b^3+..b^{2n}$, где b – рациональное число, n – натуральное число.

Решение. Умножим и разделим левую часть равенства на $(1-b)$. В числителе в результате последовательного применения формулы разности квадратов получим

$$(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot\ldots\cdot(1+b^{2n})=\frac{(1-b)(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot\ldots\cdot(1+b^{2n})}{1-b}=$$

$$=\frac{(1-b)(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot\ldots\cdot(1+b^{2n})}{1-b}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}$$

В правой части записана сумма $(2n+1)$ членов геометрической прогрессии с первым членом равным 1, и знаменателем равным b. Тогда $1+b+b^2+b^3+..b^{2n}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}$.

Следовательно, равенство верно.

Что и требовалось доказать.

Задача 12. Доказать тождество $1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Решение.
Для доказательства тождества применим метод математической индукции.

1) Проверим справедливость тождества при $n=1$: $1=\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$, $1=1$.

2) Предположим, что данное тождество справедливо при $n=k\geq 1$, т.е. что верно равенство

$$1+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

3) Докажем, что тождество справедливо при $n=k+1$, т.е.

$$1+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Используя индукционное предположение, в левой части тождества получим

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=$$

$$(k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Что требовалось доказать.

Задача 13. Вычислить значение выражения A, если $A=\cos 260^\circ\cdot\sin 130^\circ\cdot\cos 160^\circ$.

Решение.
Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения.

$$A=\cos 260^\circ\cdot\sin 130^\circ\cdot\cos 160^\circ=$$
$$=\cos(270^\circ-10^\circ)\cdot\sin(180^\circ-50^\circ)\cdot\cos(180^\circ-20^\circ)=$$
$$=-\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot(-\cos 20^\circ)=(\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ)\cdot\cos 20^\circ=$$

(по формуле произведения синусов)

$$=\frac{1}{2}(\cos 40^\circ-\cos 60^\circ)\cos 20^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ=$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ-1}{4}\cdot\cos 20^\circ=\frac{2\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ}{4}=$$

(по формуле произведения косинусов)

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(\cos20^\circ+\cos60^\circ)-\cos20^\circ}{4}=\frac{\cos60^\circ}{4}=\frac{1}{8}$$

Ответ. $A=\frac{1}{8}$.

Задача 14. Найти значение выражения A, если $A=tg\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение.

$$tg\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\left[\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ |a|\le1\right]=$$

$$=tg\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\cdot\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}\right)\right)=tg\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=tg\left(\frac{6\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=tg\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\left[tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha,\ \alpha\ne\pi n, n\in Z\right]=ctg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\left[ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha},\quad \alpha\ne\pi n, n\in Z\right]=\frac{1}{tg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1},\ \alpha\ne\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z;\\ \frac{4}{5}\in[0;1]\Rightarrow\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{8}\right)\\ \Rightarrow tg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)>0\ \Rightarrow\ tg\alpha=+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}. \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{tg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)\right)}-1}}=$$

$$=\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \frac{4}{5}\in[0;1]\Rightarrow\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)>0\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}}=\left[\cos(\arccos a)=a,\ |a|\le1\right]=\\ =\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3\sqrt{10}}{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20}{10+3\sqrt{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20-\left(10+3\sqrt{10}\right)}{10+3\sqrt{10}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{10-3\sqrt{10}}\cdot\frac{10+3\sqrt{10}}{10+3\sqrt{10}}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{10^2-\left(3\sqrt{10}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{100-90}}=\frac{10+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}+3.$$

Ответ. $\sqrt{10}+3$.

Задача 15. Доказать тождество $tg55^\circ\cdot tg65^\circ\cdot tg75^\circ=tg85^\circ$.

Решение.

Применим в левой части формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и формулы обратных преобразований.

$$tg55^\circ\cdot tg65^\circ\cdot tg75^\circ=\frac{\sin 55^\circ\cdot\sin 65^\circ}{\cos 55^\circ\cdot\cos 65^\circ}\cdot tg75^\circ=\frac{\cos 10^\circ-\cos 120^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 120^\circ}\cdot tg75^\circ=$$

$$=\frac{\cos 10^\circ+\frac{1}{2}}{\cos 10^\circ-\frac{1}{2}}\cdot tg75^\circ=\frac{2\sin 10^\circ\left(\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\right)}{2\sin 10^\circ\left(\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\right)}\cdot tg75^\circ=\frac{\sin 20^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ-\sin 10^\circ}\cdot ctg15^\circ=$$

$$\frac{2\sin 15^\circ\cos 5^\circ}{2\cos 15^\circ\sin 5^\circ}\cdot\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot\frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ}=ctg5^\circ=tg85^\circ.$$

Что требовалось доказать.

Задача 16. Доказать тождество $\frac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=ctg^4\alpha$.

Решение.

$$\frac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=ctg^4\alpha,$$

$$\frac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\left(1-\sin^2\alpha\right)\right)}{1-8\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)}=ctg^4\alpha,$$

$$\frac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha\right)}{1-8\sin^2\alpha-1+2\sin^2 2\alpha}=ctg^4\alpha,$$

$$\frac{-8\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{-8\sin^2\alpha+8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=ctg^4\alpha,$$

$$\frac{-8\cos^4\alpha}{-8\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=ctg^4\alpha,$$

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=ctg^4\alpha,$$

$$ctg^4\alpha=ctg^4\alpha.$$

Что требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 17. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt{2}\,z+1\right)^2-\frac{4}{\sqrt{2}}z}{\left(\sqrt[4]{z}-1\right)^2\left(z^{\frac{1}{4}}+1\right)^2+2\left(\sqrt[4]{z}-1\right)\left(z^{\frac{2}{8}}+1\right)+1}-\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ответ. $2z$.

Задача 18. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Ответ. 1.

Задача 19. Упростить выражение

$$\left(\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}\right)^2-\frac{(a^2+2)^2}{a^3}.$$

Ответ. 0.

Задача 20. Доказать тождеств $tg20°+tg40°+tg80°-tg60°=8\sin 40°$.

Задача 21. Доказать тождество $tg15°\cdot tg25°\cdot tg35°=tg5°$.

Указание. Привести тождество к виду $tg25°\cdot tg35°=tg5°\cdot ctg15°$ *и преобразовать произведения синусов и косинусов в суммы.*

1.3. Последовательности. Прогрессии

Задача 22. Найти сумму первых 19 членов арифметической прогрессии, если $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

Решение.

Если $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – члены арифметической прогрессии, то $a_k=a_1+(k-1)d$, где d – разность прогрессии, и, следовательно,

$$a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=(a_1+3d)+(a_1+7d)+(a_1+11d)+(a_1+15d)=$$
$$=4a_1+36d=4(a_1+9).$$

По условию $4(a_1+9)=224$, то есть, $a_1+9d=224/4=56$.

$$S_{19}=\frac{2a_1+(19-1)d}{2}\cdot 19=(a_1+9d)\cdot 19=56\cdot 19=1064.$$

Ответ. 1064.

Задача 23. С помощью арифметической прогрессии найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение.

Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, … образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=6$. Общий член прогрессии задается формулой $a_n=102+(n-1)\cdot 6$, и, так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102+(n-1)\cdot 6\le 999,\ n\le 1+\frac{999-102}{6}=1+\frac{897}{6}=150.5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n=150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n=n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d=150\cdot 102+\frac{150\cdot 149}{2}\cdot 150=82305.$$

Ответ. 82305.

Задача 24. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение.

Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a,b,c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac=b^2$; если три числа (a,b,c) образуют арифметическую прогрессию, то $a+c=2b$.

Обозначим x и y – первые два числа. Тогда

$$\begin{cases}12x=y^2,\\ x+9=2y.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы: $x=2y-9$.

Подставляя в первое уравнения, получаем $(2y-9)12=y^2$, $y^2-24y+108=0$, $y_1=18$, $y_2=6$.

Тогда, $x_1=27$, $x_2=3$.

Ответ: две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12;
две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9.

Задача 25. Решить уравнение $x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}=16$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

Перепишем левую часть уравнения в виде

$$x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

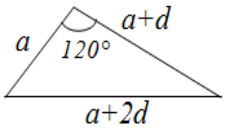
Получим уравнение $x^2=16$, откуда, учитывая ОДЗ, $x=4$.

Ответ. $x=4$.

Задача 26. Один из углов треугольника равен $120°$, а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

Решение.

Обозначим длины сторон треугольника в порядке возрастания через a, $a+d$, $a+2d$. Тогда наибольшая сторона расположена против наибольшего угла треугольника, равного $120°$.



Применим теорему косинусов.

$$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2-2a(a+d)\cos 120°,$$

$$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2+2a(a+d)\cdot\frac{1}{2},$$

$$a^2+4ad+4d^2=a^2+a^2+2ad+d^2+a^2+ad,$$

$$a^2+4ad+4d^2=3a^2+3ad+d^2,$$

$2a^2-ad-3d^2=0$. Поделим все на d^2, $d^2\neq 0$.

$$2\left(\frac{a}{d}\right)^2-\left(\frac{a}{d}\right)-3=0.$$

Учитывая, что $a>0, d>0$, получаем $\frac{a}{d}=\frac{3}{2}$.

Тогда, $a=\frac{3}{2}d$, $a+d=\frac{3}{2}d+d=\frac{5}{2}d$, $a+2d=\frac{3}{2}d+2d=\frac{7}{2}d$.

Найдем отношение длин сторон треугольника:

$$a:(a+d):(a+2d)=\frac{3}{2}d:\frac{5}{2}d:\frac{7}{2}d,$$

$$a:(a+d):(a+2d)=3:5:7.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Ответ. Все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 27. Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого члена. Сколько процентов от первого составляет пятый член этой прогрессии?

Ответ. 52%.

Задача 28. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от первого числа отнять единицу, а от третьего отнять 19, то новая тройка чисел составляет арифметическую прогрессию. Найти первоначальные числа.

Ответ. 5; 15; 45.

Задача 29. Найти количество членов арифметической прогрессии, сумма которой равна 36, если ее первый член равен 4, а последний 5.

Ответ. 8.

Задача 30. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти острые углы этого треугольника.

Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \arccos\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 31. В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий – на $\frac{1}{2}$ очка больше, чем за предыдущий промах. Определить, сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков.

Ответ. 21.

2. Уравнения и системы уравнений

2.1. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Задача 32. Решить уравнение $x^4+8x^3+18x^2+11x+2=0$.

Решение.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого представим её в виде:

$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$, где a,b,c,d подберем методом неопределённых коэффициентов. Получим

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$$

Одно из решений системы (находить все её решения не обязательно)

$$\begin{cases} a+c=8, \\ b+d+ac=18, \\ ad+bc=11, \\ bd=2. \end{cases}$$

находим методом подбора: $a=5$, $b=2$, $c=3$, $d=1$.

Значит, $x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+5x+2\right)\left(x^2+3x+1\right)$.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$x^2+5x+2=0$ или $x^2+3x+1=0$.

Решение этих уравнений элементарно. $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Задача 33. Решить уравнение $x^4-4x^3-1=0$.

Решение.

Введем новую переменную $t=x-1$, $x=t+1$. Тогда, получим уравнение

$(t+1)^4-4(t+1)^3-1=0$,

$t^4-6t^2-8t-1=0$.

Разложим левую часть на множители. Для этого представим ее в виде

$t^4-6t^2-8t-1=\left(t^2+a\right)^2-(bt+c)^2$, где где a,b,c подберем методом неопределённых коэффициентов.

Получим, $t^4-6t^2-8t-1=t^4+\left(2a+b^2\right)t^2-2bct+a^2-c^2$.

Одно из решений системы (находить все её решения не обязательно)

$$\begin{cases} 2a-b^2=-6, \\ bc=4, \\ a^2-c^2=-4; \end{cases}$$

находим методом подбора: $a=-2$, $b=\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{2}$.

Значит, $t^4-6t^2-8t-1=\left(t^2-2\right)^2-\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2=\left(t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}-2\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+2\sqrt{2}-2\right)=0$.

Уравнение $t^4-6t^2-8t-1=0$ равносильно совокупности уравнений:

$t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}-2=0$, $t^2+\sqrt{2}t+2\sqrt{2}-2=0$.

Уравнение $t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}-2=0$ имеет корни $t_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Уравнение $t^2+\sqrt{2}t+2\sqrt{2}-2=0$ корней не имеет.

Тогда, $x_{1,2}=t_{1,2}+1=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}+1=\dfrac{\sqrt{2}+2\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}+2\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Задача 34. Решить уравнение $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2)$.

Решение.

Область определения уравнения $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$.

Приведем к общему знаменателю выражения в левой части уравнения, получим:

$\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2)$,

$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}=(x-1)\cdot(x-2)$,

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=x^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)$,

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)-x^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)=0$,

$(x-1)\cdot(x-2)\left((x+1)(x+2)-x^2\right)=0$.

Очевидно, что корнями этого уравнения являются $x=1$, $x=2$.

Решим уравнение $(x+1)\cdot(x+2)=x^2$, $x^2+3x+2=x^2$, $3x+2=0$, $x=-\dfrac{2}{3}$.

Ответ. $x=1$, $x=2$, $x=-\dfrac{2}{3}$.

Задача 35. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ x-6\ge 0;\end{cases}$. $x\in[6;\infty)$.

Чтобы не нарушать эквивалентность преобразований при возведении в квадрат, перепишем уравнение в виде

$\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$,

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-6}\right)^2$,

$x+2=4+4\sqrt{x-6}+x-6$,

$4\sqrt{x-6}=4$,

$\sqrt{x-6}=1$,

$\left(\sqrt{x-6}\right)^2=1^2$,

$x-6=1$,

$x=7$.

Выполним проверку: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}=\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$; $2\equiv 2$.

Ответ. $x=7$.

Задача 36. Решить уравнение $\sqrt{|x^2-3x+2|}=2x+1$.

Решение.

ОДЗ: $2x+1\ge 0$, $x\ge-\dfrac{1}{2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $|x^2-3x+2|=(2x+1)^2$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $x^2-3x+2\ge 0$, $(x-2)(x-1)\ge 0$, $x\in(-\infty;1]\cup[2;\infty)$.

Тогда $x^2-3x+2=4x^2+4x+1$, $3x^2+7x-1=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{61}}{6}$. С учетом ОДЗ получим один корень $x=\dfrac{-7+\sqrt{61}}{6}$.

Случай 2. $x^2-3x+2<0$, $x\in(1;2)$.

Тогда $-x^2+3x-2=4x^2+4x+1$, $5x^2+x+3=0$. Это уравнение корней не имеет.

Ответ. $x=\dfrac{-7+\sqrt{61}}{6}$.

Задача 37. Решить систему уравнений $\begin{cases}x^2-3xy-4y^2=0,\\ x^3+y^3=65.\end{cases}$

Решение.

Первое уравнение системы однородное. Разделим его почленно на y^2. При этом решения не теряются: пара $(0;0)$ удовлетворяет первому уравнению системы, но не удовлетворяет второму.

Получим $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\dfrac{x}{y}-4=0$. Положим $\dfrac{x}{y}=t$. Тогда $t^2-3t-4=0$, $t_1=4$, $t_2=-1$.

Пусть $t=4$, т.е. $x=4y$. Из второго уравнения системы: $64y^3+y^3=65$, $65y^3=65$, $y^3=1$;
$y=1$, $x=4$.

Пусть $t=-1$, т.е. $x=-y$. В этом случае второе уравнение решения не имеет.

Ответ. $y=1$, $x=4$.

Задача 38. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0,\\ x^2+xy+y^2=3.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0,\\ x^2+xy+y^2=3.\end{cases}$$

Будем считать первое уравнение системы квадратным относительно x. Перепишем его в виде: $2x^2-(7y-13)x+3y^2-4y-7=0$. Тогда.

$$D=(7y-13)^2-4\cdot 2\cdot(3y^2-4y-7)=49y^2-182y+169-24y^2+32y+56=$$
$$=25y^2-150y+225=(5y-15)^2.$$

$$x=\frac{7y-13-5y+15}{4}=\frac{2y+2}{4}=\frac{y+1}{2} \text{ или } x=\frac{7y-13+5y-15}{4}=\frac{12y-28}{4}=3y-7.$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(y+1),\\ x^2+xy+y^2=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y-7,\\ x^2+xy+y^2=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему.

Если $x=\dfrac{1}{2}(y+1)$, то $\dfrac{1}{4}(y+1)^2+\dfrac{1}{2}y(y+1)+y^2-3=0$.

$$(y+1)^2+2y(y+1)+4y^2-12=0,$$
$$y^2+2y+1+2y^2+2y+4y^2-12=0,$$
$$7y^2+4y-11=0,\ (7+4-11=0),$$

$$y_1 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1;$$

$$y_2 = -\frac{11}{7},\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{7}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{7}.$$

Решим вторую систему.

Если $x = 3y-7$, то $(3y-7)^2 + y(3y-7) + y^2 - 3 = 0$.

$$9y^2 - 42y + 49 + 3y^2 - 7y + y^2 - 3 = 0,$$

$$13y^2 - 49y + 46 = 0,\ \left(D = 49^2 - 4\cdot 13\cdot 46 = 2401 - 2392 = 9\right),$$

$$y_3 = \frac{49-3}{26} = \frac{46}{26} = \frac{23}{13},;$$

$$y_4 = \frac{49+3}{26} = 2,\ x_4 = 3\cdot 2 - 7 = -1.$$

Ответ. $(1;1), (-1;2), \left(-\frac{2}{7}; -\frac{11}{7}\right), \left(-\frac{22}{13}; \frac{23}{13}\right)$.

Задача 39. В зависимости от значений параметра a найти наименьший корень уравнения $x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2 x - 2a(a+1)^2 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение.

$$x^2(x+2a) - (a+1)^2(x+2a) = 0,$$

$$(x+2a)\left(x^2 - (a+1)^2\right) = 0,$$

$$(x+2a)(x-a-1)(x+a+1) = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = -2a$, $x_2 = -a-1$, $x_3 = a+1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_1 = -2a$.

Для этого решим систему

$$\begin{cases} -2a < a+1, \\ -2a < -a-1; \end{cases} \begin{cases} -3a < 1, \\ -a < -1; \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{1}{3}, \\ a > 1. \end{cases}$$

Откуда, $a > 1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_2 = -a-1$.

Решим систему

$$\begin{cases} -a-1 < a+1, \\ -a-1 < -2a; \end{cases} \begin{cases} -2a < 2, \\ a < 1; \end{cases} \begin{cases} a > -1, \\ a < 1. \end{cases}$$

Откуда, $-1 < a < 1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_3 = a+1$.

Решим систему

$$\begin{cases} a+1 < -a-1, \\ a+1 < -2a; \end{cases} \begin{cases} 2a < -2, \\ 3a < -1; \end{cases} \begin{cases} a < -1, \\ a < -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Откуда, $a < -1$.

Ответ. $x = a+1$ при $a < -1$,
$x = -a-1$ при $-1 < a < 1$,
$x = -2a$ при $a > 1$.

Задача 40. Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(7+a), \\ (x+y)^2 = 50 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

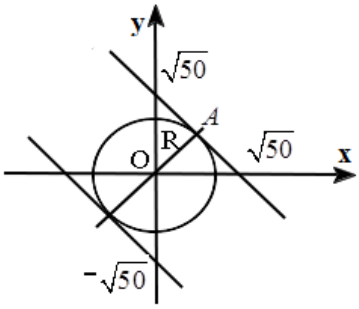
Построим график функции, описываемой вторым уравнением.

Это две прямые: $|x+y| = \sqrt{50}$, $x + y = \pm\sqrt{50}$,

$$\left[\begin{array}{l} y=-x+\sqrt{50}, \\ y=-x-\sqrt{50}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение системы описывает окружность с радиусом $R=\sqrt{2(7+a)}$, $a>-7$ и центром в точке $O(0;0)$.

Исходная система имеет равно два решения, если графики функций будут иметь две общие точки, т.е. прямые будут касаться окружности. Тогда расстояние от начала координат до каждой прямой равно радиусу окружности. Так как прямые отсекают в первой и третьей четвертях прямоугольные равнобедренные треугольники, то точки касания – середины отрезков прямых в этих четвертях.



Найдем координаты середины отрезков: $A\left(\frac{\sqrt{50}}{2};\frac{\sqrt{50}}{2}\right)$.

$R=|OA|$, $\sqrt{2(7+a)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2}$,

$\sqrt{2(7+a)}=5$,

$2(7+a)=25$,

$7+a=12{,}5$;

$a=5{,}5$.

Ответ. $a=5{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 41. Решить уравнение $(x^2-2x+2)(x^2-2x-2)=5$.

Ответ. $-1;3$.

Задача 42. Решить уравнение $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}=4$.

Ответ. 28.

Задача 43. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+2\sqrt[3]{(x-2)^2}=3$.

Ответ. $x_1=3,\ x_2=-11/8$.

Задача 44. Решить уравнение $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

Ответ. $x=1$.

Задача 45. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$.

Ответ. $x_1=-7/2,\ x_2=2$.

Задача 46. Пусть x_1 и x_2 – различные корни уравнения $3x^2+2x+a-1=0$. Найти все значения параметра a, при которых выполнено неравенство $-1\le x_1^2+x_2^2+3x_1x_2\le 2$.

Ответ. $-10/3\le a<4/3$.

Задача 47. Найти все решения уравнения $(x+1)(x+2)(x+3)=x(x^2-4)$.

Ответ. $x=-2,\ x=-\frac{1}{2}$.

Задача 48. Решить уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}=2$.

Ответ. $x=0$.

Задача 49. Найти значения параметра a такие, чтобы один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ был квадратом другого.

Ответ. $-125/8,\ 27/8$.

Задача 50. Решить систему $\begin{cases} xy+x+y=-1; \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$

Ответ. $\{(-1;-1),(-1;2),(2;-1)\}$.

Задача 51. Решить систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2; \\ xy=27. \end{cases}$

Ответ. $\{(27,1);(-1,-27)\}$.

Задача 52. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+4y^2=7; \\ 3x^2+8y^2=14. \end{cases}$$

Ответ. $\left\{\left(0;\pm\sqrt{\frac{7}{4}}\right);\left(\pm 2\sqrt{\frac{7}{10}};\pm\sqrt{\frac{7}{10}}\right)\right\}$.

Задача 53. Найти, при каком значении параметра a система $\begin{cases} 2x+(a-1)y=3; \\ (a+1)x+4y=-3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Ответ. $a=-3$.

2.2. Тригонометрические уравнения и системы уравнений

Задача 54. Решить уравнение $tg^2x+ctg^2x=2-16x^2-\pi^2+8\pi x$.

Решение.

ОДЗ уравнения $tg^2x+ctg^2x=2-16x^2-\pi^2+8\pi x$ определяется неравенствами

$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x\neq\pi l,\ k,l\in Z$.

Преобразуем левую часть уравнения.

$$tg^2x+ctg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{\sin^4x+\cos^4x}{\sin^2x\cos^2x}=$$

$$=\frac{\sin^4x-1+\cos^4x+1}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{\sin^4x-\sin^2x-\cos^2x+\cos^4x+1}{\sin^2x\cos^2x}=$$

$$=\frac{\sin^2x(\sin^2x-1)+\cos^2x(\cos^2x-1)+1}{\sin^2x\cos^2x}=$$

$$=\frac{-\sin^2x\cos^2x-\cos^2x\sin^2x+1}{\sin^2x\cos^2x}=$$

$$=\frac{-2\sin^2x\cos^2x+1}{\sin^2x\cos^2x}=-2+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}=-2+\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при $\sin^2 2x=1$. Тогда $2x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, и $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен $2-16x^2-\pi^2+8\pi x=2-(16x^2-8\pi x+\pi^2)=2-(4x-\pi)^2$ и достигает наибольшего значения, равного 2, при $(4x-\pi)^2=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Сравним полученные результаты: равенство левой и правой частей уравнения возможно только при $x=\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}$.

Задача 55. Решить уравнение $2|\sin x|\cos(2\pi - x) = \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$.

Решение.

Воспользуемся формулами приведения и тем, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$.

$$2|\sin x|\cos x = \sin^2 x,$$
$$2|\sin x|\cos x = |\sin x|^2,$$
$$|\sin x|(2\cos x - |\sin x|) = 0,$$
$$|\sin x| = 0 \text{ или } 2\cos x = |\sin x|.$$

Если $|\sin x| = 0$, то $x = \pi n$, $n \in Z$.

При $\sin x \geq 0$ имеем $2\cos x = \sin x$, $\mathrm{tg}x = 2$, $x = \mathrm{arctg}2 + \pi k$, $k \in Z$.

Учитывая, что $\sin x \geq 0$, то $x = \mathrm{arctg}2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Аналогично, при $\sin x < 0$ имеем $2\cos x = -\sin x$, $\mathrm{tg}x = -2$, $x = -\mathrm{arctg}2 + 2\pi k$, $k \in Z$ (учитывая, что $\sin x < 0$).

Ответ. $x = \pi n$, $x = \pm\mathrm{arctg}2 + 2\pi k$, $k, n \in Z$.

Задача 56. Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $4\pi^2 - x^2 > 0$, $x \in (-2\pi; 2\pi)$.

Решим уравнение.

$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2 = 0,$$
$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2.$$

Учитывая, что $\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) = \cos\left(x + 10\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

получим уравнение: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2$.

Сумма значений тригонометрических функций, косинуса и синуса, равна -2 при минимальных значениях данных функций, т.е. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и $\sin 2x = -1$, тогда

$$\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin 2x = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z, \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l,\ l \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z, \\ x = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right),\ l \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z. \end{cases}$$

Определим значения корней $x \in (-2\pi; 2\pi)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ при } k = -1, k = 0; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z, \text{ при } l = -1, l = 0, l = 1, l = 2; \end{cases}$$

т.е. это корни $\begin{cases} x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}, \\ x = \left\{-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}. \end{cases}$

Таким образом, уравнение имеет два корня $x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Ответ. $x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Задача 57. Определить количество корней уравнения $\sin 3x = x^3$.

Решение.

Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$ (рис. 1).

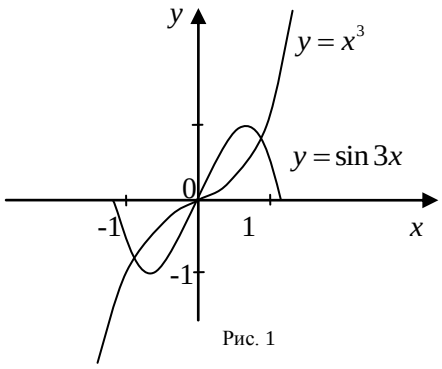


Рис. 1

Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно 0 точках.

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена и периодична (ее период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

Ответ: 3.

Задача 58. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x > 0$, тогда получим:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $\sin x + \cos x = 1$,

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 1,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Если $n = 2k$, то $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Откуда $x_1 = 2\pi k, k \in Z$.

Если $n = 2k + 1$, то $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$. Откуда $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Подставляя найденные значения x в первое уравнение системы, найдем y.

Если $x_1 = 2\pi k, k \in Z$, то $1 + \cos y = 0$, $\cos y = -1$, $y = \pi + 2\pi m, m \in Z$.

Если $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, то $\cos y = 1$, $y = 2\pi l, l \in Z$.

Следовательно, исходная система имеет два решения:

$(2\pi k; \pi + 2\pi m)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l\right)$, $k.m, l \in Z$.

Ответ. $(2\pi k; \pi + 2\pi m)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l\right)$, $k.m, l \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 59. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $k \in Z$, $n \in Z$.

Задача 60. Решить уравнение $\cos^3 x - \cos x = \sin 2x$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Задача 61. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in Z$, $n \in Z$.

Задача 62. Решить уравнение $\sin 2x + \sin x = \cos x - \cos 2x$.

Ответ. $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $k \in Z$, $n \in Z$.

Задача 63. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

Задача 64. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x = 2arctg\left(\sqrt{3}+2\right) + 2\pi k, \\ y = \frac{2\pi}{3} - 2arctg\left(\sqrt{3}+2\right) - 2\pi k; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \\ y = \frac{\pi}{3} - 2\pi n; \ k, n \in Z. \end{cases}$

2.3. Показательные и логарифмические уравнения и системы уравнений

Помните: при решении логарифмических и показательных уравнений необходимо найти область допустимых значений и сделать проверку.

Задача 65. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{0{,}5} + \sqrt[3]{4}\right)^x = \frac{27}{2}$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Преобразуем уравнение.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2^2}\right)^x = \frac{27}{2}, \left(\frac{1+2}{\sqrt[3]{2}}\right)^x = \frac{27}{2}, \left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = \frac{27}{2}, \ x = 3.$$

Ответ. $x = 3$.

Задача 66. Решить уравнение $\log_3(x-2) = 1 - \log_3 x$.

Решение.

ОДЗ:

$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (2; +\infty)$.

Тогда, $\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 3$,

$\log_3(x-2)x = \log_3 3$,

$x^2 - 2x = 3$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

По теореме Виета

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = -3; \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$

Причем, $x_2 = -1 \notin (2; +\infty)$, т.е. ОДЗ.

Проверка. Подставляем $x = 3$ в левую и правую части уравнения по отдельности:

$\log_3(3-2) = 0$; $1 - \log_3 3 = 1 - 1 = 0$; $0 \equiv 0$.

Ответ. $x=3$.

Задача 67. Решить уравнение $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=\frac{1}{64}$.

Решение.
ОДЗ:
$\begin{cases} x>0, \\ \log_3 x\neq 0; \end{cases}$ $x\in(0;1)\cup(1,+\infty)$.

Перепишем уравнение в виде $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=2^{-6}$.
Так как показательная функция строго монотонна, данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{3}{\log_3 x}=-6,\ \log_3 x=-\frac{1}{2},\ x=3^{-\frac{1}{2}},\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 68. Решить уравнение $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}\left(5x^2-2x-3\right)=x^2+2x$.

Решение.
ОДЗ: $5x^2-2x-3>0$, $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)$.

Упростим левую часть уравнения, заменив основание $\frac{1}{6}$ на 6, и избавимся от корня, получим

$\frac{1}{2}x^2\log_6\left(5x^2-2x-3\right)+x\log_6\left(5x^2-2x-3\right)=x^2+2x$,

$\log_6\left(5x^2-2x-3\right)\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)-\left(x^2+2x\right)=0$,

$\left(x^2+2x\right)\left(\frac{1}{2}\log_6\left(5x^2-2x-3\right)-1\right)=0$,

$\left(x^2+2x\right)=0$ или $\frac{1}{2}\log_6\left(5x^2-2x-3\right)-1=0$.

Следовательно, из уравнения $\left(x^2+2x\right)=0$ корнями являются $x_1=0$, $x_2=-2$.

Из уравнения $\log_6\left(5x^2-2x-3\right)=2$, $5x^2-2x-39=0$, $x_3=3$, $x_4=-\frac{13}{5}$.

Учитывая ОДЗ, получим $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{13}{5}$.

Ответ. $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{13}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 69. Решить уравнение $3^{\sqrt{x}+1}-2\cdot 5^{\sqrt{x}-2}=5^{\sqrt{x}}-2\cdot 3^{\sqrt{x}}$.

Ответ. $x=9$.

Задача 70. Решить уравнение $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3=0$.

Ответ. $x=0{,}5$.

Задача 71. Решить уравнение $\lg(x+1)-\frac{1}{2}\lg(5x-1)=\frac{1}{2}\lg x$.

Ответ. $x=1$.

Задача 72. Решить уравнение $\log_2(x-3)+\log_2(3+x)=4$.

Ответ. $x=5$.

Задача 73. Решить уравнение $\lg(3x-1)-\frac{1}{2}\lg(x+1)=\frac{1}{2}\lg(x+13)$.

Ответ. 3.

Задача 74. Решить уравнение $\lg 5^{\frac{(2x-8)x}{5}} = \lg 25$.

Ответ. $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Задача 75. Решить систему $\begin{cases} x^y = 9; \\ (324)^{\frac{1}{y}} = 2\,x^2. \end{cases}$

Ответ. (3, 2).

Задача 76. Решить систему $\begin{cases} 7^y \log_5 x = -14; \\ 7^y + \log_5 x = 5. \end{cases}$

Ответ. $x = \dfrac{1}{25}$, $y = 1$.

3. Неравенства

3.1. Алгебраические неравенства

Задача 77. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 - x} > 1 + x$.

Решение.

Решение неравенства $\sqrt{x^2 - x} > 1 + x$ начнем с нахождения области определения, т.е.

$x^2 - x \ge 0$, $x(x-1) \ge 0$, $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ (рис. 2).

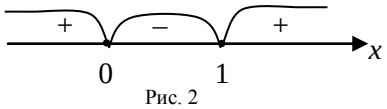


Рис. 2

Заметим, что значение арифметического квадратного корня $\sqrt{x^2 - x}$ всегда неотрицательно, следовательно, при отрицательной правой части решением неравенства будет любое x из ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + x < 0, \\ x \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + x < 0, \\ x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ x \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad x < -1.$$

При условии, что правая часть неотрицательная, возведем обе части неравенства в квадрат.

$$\begin{cases} 1 + x \ge 0, \\ x^2 - x > (1+x)^2; \end{cases} \begin{cases} 1 + x \ge 0, \\ x^2 - x > x^2 + 2x + 1; \end{cases} \begin{cases} 1 + x \ge 0, \\ -1 > 3x; \end{cases} \begin{cases} x \ge -1, \\ x < -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \quad x \in \left[-1; -\dfrac{1}{3}\right).$$

Объедим полученные результаты, тогда $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Задача 78. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}} > 2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x + 2\sqrt{x-1} > 0, \\ x - 1 \ge 0. \end{cases}$ $x \ge 1$.

Выполним преобразование левой части неравенства.

$$\frac{1}{\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1}} > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2}} > 2,$$

$$\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}+1\right|}+\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}>2,$$

Обозначим $\sqrt{x-1}=t$, $t\ge 0$.

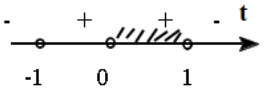
Тогда $\frac{1}{|t+1|}+\frac{1}{|t-1|}>2$, $t\ne 1$.

$$\frac{|t-1|+|t+1|-2\cdot|t+1|\cdot|t-1|}{|t+1|\cdot|t-1|}>0,$$

Учитывая ОДЗ, решаем неравенство на двух промежутках.

1. $0<t<1$.

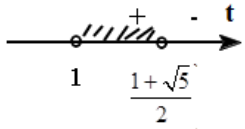
$$\frac{-t+1+t+1-2(-t+1)(t+1)}{(-t+1)(t+1)}>0,\ \frac{2t^2}{(-t+1)(t+1)}>0.$$



Таким образом, $0<t<1$.

2. $t>1$.

$$\frac{t-1+t+1-2(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(t-1)(t+1)}>0.$$



Таким образом, решением будет промежуток $1<t<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Возвращаясь к переменной x, получим совокупность неравенств.

$$\left[\begin{array}{l}0<\sqrt{x-1}<1,\\ 0<\sqrt{x-1}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}0<x-1<1,\\ 0<x-1<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 1<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

Таким образом, $x\in(1;2)\cup\left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ. $(1;2)\cup\left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задача 79. При каком значении параметра a длина отрезка, являющегося областью решений неравенства $x^2-4\le a$, равна 6?

Решение.

Решим неравенство $x^2-4\le a$ в виде $x^2\le a+4$.

ОДЗ: $a+4\ge 0$, $a\ge -4$.

Тогда $|x|\le\sqrt{a+4}$, $-\sqrt{a+4}\le x\le\sqrt{a+4}$.

Отсюда длина отрезка, являющегося областью решений неравенства $x^2-4\le a$, равна $2\sqrt{a+4}$.

Следовательно, $2\sqrt{a+4}=6$, $a+4=9$, $a=5$.

Ответ. $a=5$.

Задача 80. Доказать, что при любом натуральном n, $n>1$, справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

Решение.

Докажем неравенство методом математической индукции.

При $n=2$ неравенство очевидно: $\sqrt{2}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$.

Предположим, что исходное неравенство имеет место при $n=k$, то есть $\sqrt{k}<S_k<2\sqrt{k}$, где $S_k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Докажем теперь, что $\sqrt{k+1}<S_{k+1}<2\sqrt{k+1}$, где $S_{k+1}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Имеем: $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

$S_{k+1}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$, так как $\sqrt{k^2+k}>k$,

$S_{k+1}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$, так как $2\sqrt{k^2+k}<2k+1$.

Таким образом, $\sqrt{k+1}<S_{k+1}<2\sqrt{k+1}$.

Следовательно, двойное неравенство доказано для любого $n>1$.

Что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 81. Найти наибольшее значение *x*, удовлетворяющее неравенству $x^2+7x+11\le -1\le\frac{1}{x}$.

Ответ. $x=-3$.

Задача 82. Решить неравенство $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-3}>1$.

Ответ. $(2;3)$.

Задача 83. Решить неравенство $\frac{-x^3+2x^2+x-1}{2-x}<x^2$.

Ответ. $(-\infty;-2)\cup[-1;1)$.

Задача 84. Решить неравенство $\sqrt{x^2+4x+4}+|5x+3|\le 7$.

Ответ. $x\in\left(-2,\ \frac{1}{3}\right)$.

Задача 85. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2-9x+20}\le\sqrt{x-1}\le\sqrt{x^2-13}$.

Ответ. $x=4$.

Задача 86. Найти решения неравенства $x^2-(a+1)x+a\ge 0$ при разных значениях параметра a.

Ответ. При $a<1$ $x\in(-\infty,a]\cup[1,\infty)$;

при $a>1$ $x\in(-\infty,1]\cup[a,\infty)$;

при $a=1$ $x\in R$.

Задача 87. Найти все значения параметра k, при которых неравенство $x^2+2kx+|2k+3|>0$ верно для всех значений x.

Ответ. $-1<k<3$.

3.2. Тригонометрические, логарифмические и показательные неравенства

Задача 88. Решить неравенство $2\sin 6x\cos 3x+\cos 6x<-1$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $2\sin 6x\cos 3x+1+\cos 6x<0$.

Приведем тригонометрические функции к одинаковому аргументу:

$1+\cos 6x=2\cos^2 3x$, $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x$.

Тогда получим, что $4\sin 3x\cos^2 3x+2\cos^2 3x<0$,

$$2\cos^2 3x(2\sin 3x+1)<0.$$

Так как $2\cos^2 3x\ge 0$, то получим равносильные неравенства

$$\begin{cases}2\sin 3x+1<0,\\ \cos 3x\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin 3x<-\dfrac{1}{2},\\ \cos 3x\neq 0;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x\neq-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\end{array}\right.(n\in Z),\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3},\\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3},\\ x\neq-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\end{array}\right.(n\in Z)$$

Т.о. $-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in Z$, где $x\neq-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$.

$$x\in\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z.$$

Ответ. $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3};-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3};-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}\right), n\in Z$.

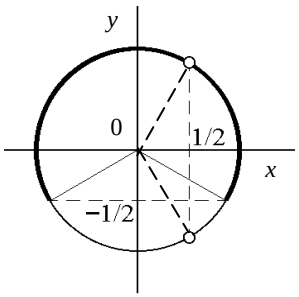
Задача 89. Решить неравенство $\dfrac{4\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1}{\left(\dfrac{1}{2}-\cos x\right)^2}>0$.

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{1}{2}-\cos x\neq 0$, $cosx\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство равносильно неравенству

$$4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1>0.$$



Воспользуемся формулой $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$.

Получим неравенство $2\left(\sin x+\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)+\sqrt{3}+1>0$.

$$2\sin x-\frac{2\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}+1>0,\ \sin x>-\frac{1}{2},\ x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

Учитывая ОДЗ (см. рисунок), получим

$$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(+\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

Ответ. $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(+\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Задача 90. Найти все значения параметра a, при которых решения неравенства $2^{|x|+a}<\dfrac{1}{2}$ заполняют промежуток $(-3;3)$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $2^{|x|+a}<2^{-1}$. В силу строгого возрастания показательной функции с основанием 2, $2>1$, полученное неравенство равносильно неравенству $|x|+a<-1$, или $|x|<-1-a$, или, раскрывая модуль, $1+a<x<-1-a$.

По условию $1+a=-3$ и $-1-a=3$, откуда $a=-4$.

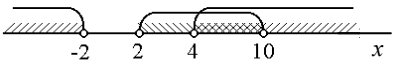
Ответ: $a=-4$.

Задача 91. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ \log_{x-1} 9>0, \\ \log_2 \log_{x-1} 9>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-1>0, \\ x\neq 2, \\ \log_{x-1} 9>\log_{x-1} 1, \\ \log_{x-1} 9>1; \end{cases}$

так как неравенство $\log_{x-1} 9>\log_{x-1} 1$ выполняется только при $x-1>1$, поэтому ОДЗ (рис.4)



$\begin{cases} x>1, \\ x\neq 2, \\ x-1>1, \\ \log_{x-1} 9>\log_{x-1}(x-1); \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ x\neq 2, \\ x>2, \\ x-1<9; \end{cases}$ $x\in(2;10)$.

Исходное неравенство: $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9>\log_{\frac{1}{2}} 1$. Поскольку основание логарифма меньше единицы, при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный. Получим

$\log_2 \log_{x-1} 9<1$, $\log_2 \log_{x-1} 9<\log_2 2$, $\log_{x-1} 9<2$, $\log_{x-1} 9<\log_{x-1}(x-1)^2$,

$9<(x-1)^2$, $9-(x-1)^2<0$, $(x-1)^2-3^2>0$, $(x-1-3)(x-1+3)>0$,

$(x-4)(x+2)>0$.

Учитывая ОДЗ, $x\in(4;10)$.

Ответ. $x\in(4;10)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 92. Решить неравенство $|\sin x+\cos x|<1$.

Ответ. $x\in\left(\pi k+\frac{\pi}{2};\pi k+\pi\right), k\in Z$.

Задача 93. Решить неравенство $5^{x^3-4x-2}<0{,}04$.

Ответ. $x(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

Задача 94. Решить неравенство $5^x-5^{3-x}>20$.

Ответ. $(2;+\infty)$.

Задача 95. Решить неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$.

Ответ. $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Задача 96. Решить неравенство $\log_2^2(x-1)^2-4\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-24\geq 0$.

Ответ. $x\in\left(1;\frac{9}{8}\right]\cup[5;+\infty)$.

Задача 97. Решить неравенство $\lg(10x^2-90)-\frac{3}{2}\left(\log_{x^2-6x+9} 10\right)^{-1}\leq 1$.

Ответ. $x\in(-\infty;-3)\cup[6;+\infty)$.

Задача 98. Решить неравенство $\log_2(9-4^x)+2x>3$.

Ответ. $x\in(0;1{,}5)$.

Задача 99. Решить неравенство $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$.

Ответ. $(1000;+\infty)$.

Задача 100. Найти область определения функции $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}+\log_3(\log_{0,5}(x-2)+2)$.

Ответ. $x\in\left(2;\frac{3\pi}{4}\right]$.

4. Другие задачи по алгебре и геометрии
4.1 «Текстовые» задачи

Задача 101. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться нефтью, причем в первую поступает 100 литров в минуту, во вторую – 60 литров в минуту, в третью – 80 литров в минуту. В начальный момент первая цистерна была пуста, вторая и третья цистерны – частично заполнены. Все три цистерны полностью заполнились одновременно. Во сколько раз количество нефти в начальный момент во второй цистерне было больше, чем в третьей?

Решение.

Примем объем цистерны равные V литров. Пусть первоначальный объем нефти второй цистерны равен x, тогда необходимо заполнить $(V-x)$ от ее объема; пусть первоначальный объем нефти третьей цистерны равен y, тогда необходимо заполнить $(V-y)$ от ее объема. Так как все три цистерны полностью заполнились одновременно, то на заполнение первой полностью пустой цистерны потребовалось $0{,}01\cdot V$ минут. Тогда первоначальный объем второй цистерны равен $60\cdot 0{,}01\cdot V = V-x$, $x = 0{,}4\cdot V$; первоначальный объем второй третьей цистерны равен $80\cdot 0{,}01\cdot V = V-y$, $y = 0{,}2\cdot V$. Следовательно, количество нефти в начальный момент во второй цистерне было в 2 раза больше, чем в третьей.

Ответ. В 2 раза.

Задача 102. Две точки, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 12 минут, причем первая обходит окружность на 10 секунд быстрее, чем вторая. Какую часть окружности проходит за 1 секунду каждая точка?

Решение.

Примем длину окружности за единицу. Обозначим скорости первой и второй точек соответственно через v_1 и v_2 (в долях этой единицы в секунду).

Тогда по первому условию $v_1 - v_2 = \frac{1}{12\cdot 60}$, а по второму $\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 10$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{12\cdot 60}, \\ \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = 10. \end{cases}$$

Для ее решения сначала преобразуем второе уравнение:

$v_1 - v_2 = 10v_1v_2$, $\frac{1}{720} = 10v_1v_2$, $v_1v_2 = \frac{1}{7200}$.

Далее из первого уравнения системы выразим v_1 через v_2, подставим это выражение в последнее уравнение и решим получающееся квадратное уравнение.

$v_1 = v_2 + \frac{1}{720}$, $v_2\left(v_2 + \frac{1}{720}\right) = \frac{1}{7200}$, $v_2^2 + \frac{v_2}{720} - \frac{1}{7200} = 0$, $7200v_2^2 + 10v_2 - 1 = 0$.

Это уравнение имеет только один корень, удовлетворяющий условию задачи, $v_2 = \frac{1}{90}$.

Тогда $v_1 = \frac{1}{80}$.

Ответ. $\frac{1}{80}$ и $\frac{1}{90}$.

Задача 103. Два школьника вышли одновременно из дома в школу с одинаковой скоростью. Через 3 минуты один из них вспомнил, что забыл дома тетрадь, и побежал обратно со скоростью, большей на 60 метров в минуту. Взяв тетрадь, он побежал обратно с той же скоростью и догнал товарища, который шел с первоначальной скоростью, у дверей школы. Расстояние от дома до школы равно 400 метров. Найдите начальную скорость школьников.

Решение.

Обозначим начальную скорость школьников через v м/мин. Тогда за 3 минуты они прошли путь $3v$ м. Следовательно, школьник, который бегал за тетрадью, проделал путь $(400+3v)$ со скорость $(v+60)$ м/мин. Второй школьник за тоже время прошел путь $(400-3v)$ м со скоростью v м/мин.

Выражая это время через v двумя способами, получаем уравнение:

$\frac{400+3v}{v+60}=\frac{400-3v}{v}$, или, после преобразования, $v^2+30v-4000=0$, которое имеет только один корень, удовлетворяющий условию задачи, $v=50$ м/мин или $v=3$ км/ч.

Ответ. $v=50$ м/мин или $v=3$ км/ч.

Задача 104. Два бассейна наполняют водой. В одном из них уже имеется 200 м^3 воды, а в другом – 112 м^3. Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на 22 м^3 воды больше, чем в первый?

Решение.

Пусть t – искомое число часов; x – число кубических метров воды, которая нальется в первый бассейн за время t. К этому моменту во втором бассейне должно быть $(x+88)$ м^3 воды. Скорость заполнения первого бассейна равна $\frac{x}{t}$ м^3/ч, а второго бассейна – $\frac{x+88}{t}$ м^3/ч. По условию задачи разность между скоростями составляет 22 м^3/ч. Итак, $\frac{x+88}{t}-\frac{x}{t}=22$, $x+88-x=22t$, откуда $t=4$ ч.

Ответ. 4 часа.

Задача 105. У автомобиля новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег 16000 км, а на переднем – 24000 км. Какой максимальный пробег можно осуществить на этих колёсах?

Решение.

Будем считать, что скорость роста износа колеса является постоянной и не зависит от того насколько оно давно служит.

Очевидно, что задние колёса изнашиваются в 1,5 раза быстрее передних. Значит, когда задние колёса износятся на 60%, то передние – только на 40%. Это произойдёт после пробега

$0{,}6\cdot 16000=0{,}4\cdot 24000=9600$км.

В этот момент и следует сменить колёса. Оставшийся 40%-й ресурс задних колёс, поставленных спереди, и 60%-й ресурс передних колёс, поставленных сзади, очевидно, исчерпается одновременно, и произойдёт это ещё через 9600 км. Таким образом, максимальный пробег составляет 2·9600 = 19200 км.

Замечание. Это лишь одно из множества возможных решений этой задачи. Попробуйте найти своё.

Ответ. 19200 км.

Задача 106. В спортивном магазине два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 футбольных мячей, 2 баскетбольных мяча и один волейбольный мяч. Футбольный мяч дешевле баскетбольного и дороже волейбольного на одну и ту же сумму. Сколько и каких мячей приобрел тот, кто купил волейбольный мяч?

Решение.

Допустим, что тот, кто купил волейбольный мяч, купил U футбольных мячей и Z баскетбольных. Тогда другой покупатель купил $14-U$ футбольных мячей и $2-Z$ Баскетбольных. Если c – цена футбольного мяча и она на s ($0<s<c$) дороже волейбольного, то цена баскетбольного мяча равна $c+s$, а из условия задачи следует, что

$$Z(c+s)+Uc+(c-s)=(2-Z)(c+s)+(14-U)c,$$

$$(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s.$$

Число Z может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть $Z=0$, тогда из уравнения $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ получим $(15-2U)c=-3s$, $(2U-15)c=3s$. Так как $0<s<c$, следовательно, $0<(2U-15)c<3c$, $0<2U-15<3$, $15<2U<18$, $7{,}5<U<9$. Единственное целое число U, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае $Z=1$ уравнение $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ эквивалентно $(13-2U)c=-s$, $(2U-13)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2U-13)c<c$ $0<2U-13<1$, $13<2U<14$, $6{,}5<U<7$. Очевидно, что никакое целое число U не удовлетворяет получившемуся неравенству.

Рассуждая аналогично при $Z=2$, получим, что уравнение $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ не выполняется ни при каких целых U, т.е. $(11-2U)c=s$, тогда $0<(11-2U)c<c$, $0<11-2U<1$, $-1<2U-11<0$, $10<2U<11$, $5<U<5{,}5$.

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $Z=0$, $U=8$. Значит, купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Ответ. Купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 107. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34, а сумма данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке равна 88. Найти эти числа.

Ответ. 35 и 53.

Задача 108. На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

Ответ. $6; 12$.

Задача 109. Турист преодолел расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй день $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

Ответ. 400км.

Задача 110. На заводе для изготовления одного электродвигателя типа *A* расходуется 2 кг меди и 4 кг свинца, на изготовление одного электродвигателя типа *B* расходуется 3 кг меди и 5 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа произведено на заводе, если известно, что израсходовали 146 кг меди и 258 кг свинца?

Ответ. $22;34$.

Задача 111. Жидкость поступает в сосуд через три крана. Заполнение сосуда только через второй кран требует 0,75 времени, за которое сосуд может наполниться через один первый кран. Наполнение сосуда только через третий кран требует времени на 10 мин больше, чем через один второй кран. Если одновременно открыть все три крана, то сосуд заполнится за 6 мин. За сколько минут наполняет сосуд каждый кран в отдельности?

Ответ. $\frac{56}{3}$, 14, 24 мин.

Задача 112. Два печника могут сложить печь за 12 ч. Если первый печник будет работать 2 ч, а второй – 3 ч, то они выполнят 20 % всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

Ответ. 20 ч, 30 ч.

Задача 113. Расстояние от пункта *A* до пункта *B* по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Путь от пункта *B* до пункта *A* против течения реки теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости катера и теплохода в стоячей воде.

Ответ. 12 км/ч; 20 км/ч.

Задача 114. Андерсон покинул отель в Сан-Ремо в 9 часов и находился в пути целый час, когда Бастер вышел вслед за ним по тому же пути. Собака Бакстера выскочила одновременно со своим хозяином и бегала всё время между ним и Андерсоном до тех пор, пока Бакстер не догнал Андерсона. Скорость Андерсона составляет 2 км/ч, Бакстера – 4км/ч и собаки – 10 км/ч. Сколько километров пробежала собака к моменту, когда Бакстер догнал Андерсона?

Ответ. 10 км/ч.

4.2.Алгебра и начала анализа

Задача 115. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^3}{3}$.

Решение.

Найдем область определения функции $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^3}{3}$: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Вычислим $f'(x)$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3x^2}{3}=\frac{x^4-1}{x^2}$.

Найдем стационарные точки функции: $f'(x)=0$, $x^4-1=0$, $x=\pm1$.

Исследуем производную на знак в области определения функции, результаты исследования представим в виде таблицы:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f(x)$	↑	–4/3	↓		↓	4/3	↑

Ответ. Функция возрастает на интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$,

убывает на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, +1)$,

$x = 1$ – точка минимума, $f(1) = \frac{4}{3}$;

$x = -1$ – точка максимума, $f(-1) = -\frac{4}{3}$.

Задача 116. Касательная к параболе $y = x^2$ в точке касания с абсциссой x_0 составляет угол $60°$ с осью Ox. Найти координаты точки касания..

Решение.

Тангенс угла наклона касательной к кривой $y = x^2$ при $x = x_0$ равен значению производной в этой точке, следовательно, $y'(x_0) = 2x_0$, $tg60° = \sqrt{3}$, откуда $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y_0 = \frac{3}{4}$.

Ответ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Задача 117. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = \frac{x^2}{2}$ в точках с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_0 = 1$.

Решение.

Уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем $f'(x)$: $f'(x) = x$. Вычислим угловые коэффициенты касательных $k = f'(x_0)$: $k_1 = f'(-1) = -1$, $k_2 = f'(1) = 1$. Поскольку $k_1 \cdot k_2 = -1$, касательные перпендикулярны т.е. угол между касательными равен $90°$.

Ответ. $90°$.

Задача 118. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $27\,\text{дм}^3$. При каких размерах параллелепипеда площадь его полной поверхности будет наименьшей?

Решение.

Обозначим стороны основания параллелепипеда через x дм и y дм, высоту – через h дм. Тогда $x \cdot y \cdot h = 27$.

Площадь S полной поверхности параллелепипеда равна: $S = 2xy + 2xh + 2yh$.

Для определения размеров параллелепипеда, при которых площадь его полной поверхности будет наименьшей, воспользуемся теоремой: *если произведение n положительных чисел постоянно: $x_1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x_n = P$, то их сумма $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ будет наименьшей при равенстве этих чисел.*

Произведение слагаемых суммы $S = 2xy + 2xh + 2yh$ постоянно, так как

$$2xy \cdot 2xh \cdot 2yh = 8 \cdot x^2 y^2 h^2 = 8 \cdot 27^2.$$

Тогда сумма S будет наименьшей при условиях: $2xy = 2xh = 2yh$. Отсюда $x = y = h$. Так как $x \cdot y \cdot h = 27$, то $x^3 = 27$. Следовательно, $x = y = h = 3$.

Ответ. Площадь полной поверхности параллелепипеда будет наименьшей, если каждое из измерений равно 3 дм, т.е. когда параллелепипед является кубом.

Задача 119. Найдите наибольшее значение произведения $P = (x + y + 1)(5 - x)(6 - y)$, если $0 < x < 5$, $0 < y < 6$.

Решение.

На основании неравенства Коши между средним арифметическим и геометрическим n чисел $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, получаем:

$$\frac{(x + y + 1) + (5 - x) + (6 - y)}{3} = \sqrt[3]{(x + y + 1)(5 - x)(6 - y)},$$

$4 \geq \sqrt[3]{P}$, $\sqrt[3]{P} \leq 4$, $P \leq 64$.

Следовательно, наибольшее значение произведения $P = 64$.

Найдем значения x и y, при которых $P=64$. Для этого решим систему уравнений (на основании теоремы: *если произведение* n *положительных чисел постоянно, то их сумма будет наименьшей при равенстве этих чисел*): $x+y+1=5-x=6-y$. Отсюда $x=1$, $y=2$.

Ответ. $P=64$ при $x=1$, $y=2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 120. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-8$, параллельной оси абсцисс.

Ответ. $y=-3$, $y=-35$.

Задача 121. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\ln(4x+1)$ в точке с абсциссой $x=0$.

Ответ. $y=3x$.

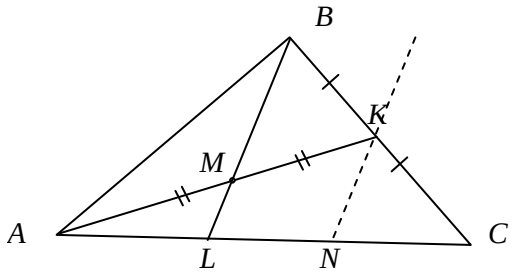
Задача 122. Найти точки экстремума функции $f(x)=3x^2+\frac{6}{x}$.

Ответ. $f_{\min}=f(1)=9$.

4.3. Геометрия

Задача 123. В треугольнике ABC точка M – середина медианы AK. Прямая BM пересекает сторону AC в точке L. Найти длину отрезка AL, если известно, что длина AC равна 9 см.

Решение.



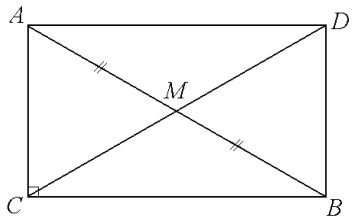
Проведем прямую $KN \parallel BL$ (см. рисунок). Так как $AM=MK$, то по теореме Фалеса, примененной к $\angle KAC$, $AL=LN$. Аналогично, для $\angle BCA$ и параллельных прямых KN и BL получим $LN=NC$. Таким образом,

$AL=LN=NC=\frac{1}{3}AC=3$.

Ответ. 9.

Задача 124. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найти катеты.

Решение.



Треугольник ABC – прямоугольный, CM – медиана, $CM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $\angle ACM:\angle MCB=2:1$. Найти стороны AC и CB.

Достроим заданный треугольник до прямоугольника $CADB$ (см. рисунок). Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CD=2CM=\sqrt{3}$ см. По условию $\angle MCB=30^\circ$. В треугольнике CDB, тогда

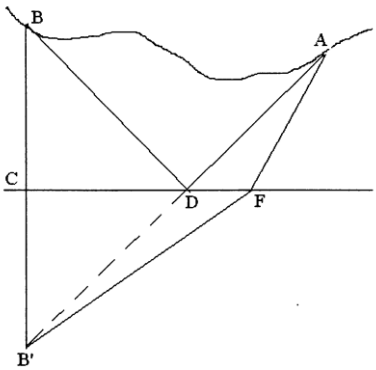
$DB = AC = CD\sin\angle MCB = \sqrt{3}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $CB = CD\cos\angle MCB = \sqrt{3}\cos 30^\circ = \frac{3}{2}$ см.

Ответ. $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $CB = \frac{3}{2}$ см .

Задача 125. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему необходимо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, где у него собранные грибы заберет сын, приехавший на машине; а далее зайти в лес в другой точке, в которой ожидает его жена. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

Решение.

Покажем на рисунке решение этой задачи.

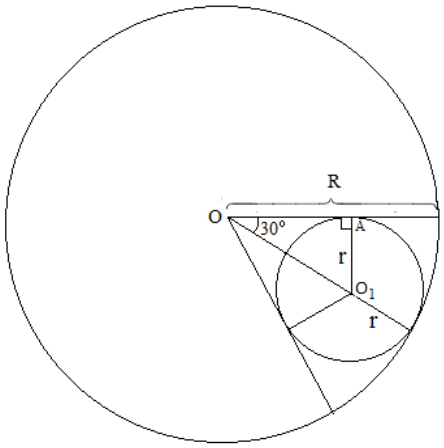


Пусть грибник выходит из леса в точке A, а должен зайти в лес в точке B. Для решения задачи симметрично прямой C - шоссе – отобразим точку B, получив точку B'. Далее, проведя прямую AB', получим точку D, которая и является искомой в задаче точкой. $BD = B'D$, $BC = B'C$, тогда ясно, что для любой другой точки F справедливо неравенство: $AF + FB' > AD + DB'$.

Таким образом, расстояние $AD + BD$ является наименьшим для выхода на шоссе из леса и захода в лес в заданной точке D.

Задача 126. В круговой сектор, дуга которого содержит 60^0, вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.

Решение.



Необходимо найти $\frac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}}$.

Известно, что $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, $S_{вписанного\ \ круга} = \pi r^2$.

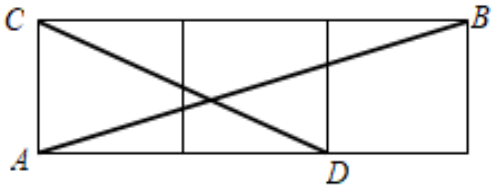
Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔOO_1A, $O_1A = r$, $\angle O_1OA = 30^\circ$, тогда гипотенуза равна $OO_1 = 2r$.

Тогда радиус большого круга: $R = OO_1 + r = 3r$.

Таким образом, $\dfrac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}}=\dfrac{\dfrac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot 60^\circ}{\pi r^2}=\dfrac{\dfrac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2}=\dfrac{\pi R^2}{6\pi r^2}=\dfrac{R^2}{6r^2}=\dfrac{(3r)^2}{6r^2}=\dfrac{9r^2}{6r^2}=\dfrac{3}{2}$.

Ответ. 1,5.

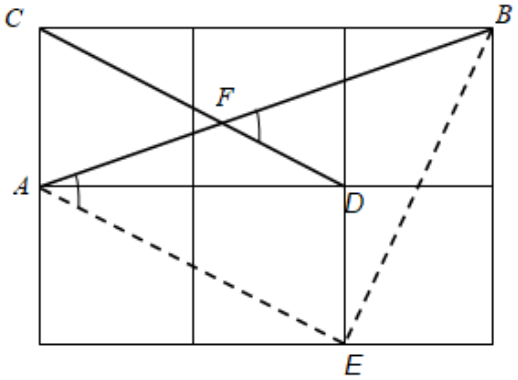
Задача 127. Три квадрата расположены так как показано на рисунке. Найти величину угла между прямыми AB и CD.



Решение.

<u>*I способ.*</u>

Пусть сторона квадрата равна x, тогда $AE=BE=x\sqrt{5}$ и $AB=\sqrt{5x^2+5x^2}=x\sqrt{10}$.



Из ΔABE, где $\angle BAE=\angle ABE=\alpha$, $\angle AEB=\beta$, по теореме косинусов имеем

$10x^2=5x^2+5x^2-2x\sqrt{5}\cos\beta$, т.е. $\cos\beta=0$, значит $\beta=90^\circ$. Тогда $\angle BAE=\angle ABE=45^\circ$.

<u>*II способ.*</u>

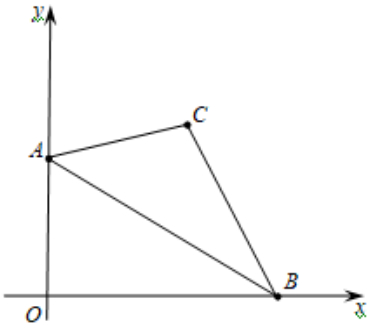
Можно применить скалярное произведение векторов AB и CD.

Ответ. 45°.

Задача 128. Найти все значения x и y, при которых выражение $z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}$ принимает наименьшее значение.

Решение.

Каждый из радикалов, входящих в выражение $z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}$, представляет собой расстояния между двумя точками координатной плоскости.



Радикал $\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ есть расстояние между точками $A(0;5)$ и $C(x;y)$, т.е. $|AC|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$; радикал $\sqrt{y^2+(x-12)^2}$ есть расстояние между точками $B(12;0)$ и $C(x;y)$, т.е. $|CB|=\sqrt{y^2+(x-12)^2}$.

Тогда $z=|AC|+|CB|$. На основании неравенства треугольника: $|AC|+|CB|\ge|AB|$, $z\ge|AB|$.

$|AB|=13$ (по т. Пифагора $|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$).

Т.е., $z\ge 13$.

Тогда, наименьшее значение $z=13$.

Все $C(x;y)$, при которых $z=13$, принадлежат отрезку прямой AB при $x\in[0;12]$. Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A(0;5)$ и $B(12;0)$: $\frac{x}{12}=\frac{y-5}{-5}$. Т.е., $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Таким образом, наименьшее значение $z=13$, достигается при $x\in[0;12]$, $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Замечание. Это лишь одно из возможных решений этой задачи. Попробуйте найти своё.

Ответ. $z=13$, $x\in[0;12]$, $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Задача 129. Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не меньше 12 м. Доказать, что в роще размещено не больше 2018 деревьев.

Решение.

Пусть в роще всего x деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. согласно условию, эти круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $258+6=264$ м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство $264^2\pi\geq 6^2\pi\cdot x$. Тогда $x\leq 44^2$, $x\leq 1936$, т.е. $x<2018$.

Что требовалось доказать

Задачи для самостоятельного решения

Задача 130. Медиана треугольника ABC, проведенная к стороне AB, составляет со стороной CB угол 60° и равна $\frac{\sqrt{6}}{10}$ см. Найти длину стороны AB, если она составляет со стороной CB угол 45°.

Ответ. 0,6.

Задача 131. Треугольник, высота которого равна $\frac{5}{3}$ см, равновелик ромбу с диагоналями $\frac{7}{2}$ см и 5 см. Найти основание треугольника.

Ответ. 10,5.

Задача 132. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 6 см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $BD:DC=2:1$. Найти длину стороны AC.

Ответ. $2\sqrt{6}$ см.

Задача 133. В равнобедренной трапеции задана диагональ, равная 4 см, и угол между диагональю и основанием, равный $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь трапеции.

Ответ. $S=4\sqrt{3}$ см^2.

Задача 134. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Ответ. $32\left(2\sqrt{3}+3\right)$см^2.

Задача 135. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

Ответ. 4.

Рекомендации участникам олимпиады

1. Прочитайте условия всех задач и наметьте, в каком порядке вы будете их решать (обычно задачи упорядочены по возрастанию их сложности).

2. Внимательно прочитайте условие задачи. Проверьте условие задачи на правдоподобность. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирайте самый удобный для себя, а обращайтесь к дежурному с вопросом или рассмотрите все возможные варианты постановки задачи.

3. Если задача решилась слишком легко – это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.

4. Если задача не решается – попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или порешать ее «от противного», или заменить числа буквами и т.д.

5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, то пытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать (совет А.Н. Колмогорова).

6. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут.

8. Решив задачу, проверьте правдоподобность полученных результатов, затем сразу оформляйте решение. Это поможет проверить правильность решения и освободит время и внимание для других задач.

9. Каждый шаг решения надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений. Это помогает при проверке и обсуждении работы.

10. Перед тем как сдать работу, перечитайте её «глазами проверяющих» – смогут ли они в ней разобраться?

Примерное содержание вариантов заключительного этапа
Отраслевой олимпиады школьников «ГАЗПРОМ»
2017 – 2018 учебный год
(*с ответами и указаниями*)

Вариант 1

Задание 1. Найти значение числового выражения A, если

$$A=\left(3{,}018-\frac{2{,}4\sqrt{8\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2\frac{1}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{0{,}5}+1{,}5\sqrt{2}+20\sqrt{\frac{1}{50}}-\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot(0{,}1)^{-3}.$$

Ответ. 2018.

Задание 2. Температуру можно измерить по шкалам Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0° по Цельсию соответствует 0° по Реомюру и 32° по Фаренгейту, а 100° по Цельсию соответствует 80° по Реомюру и 212° по Фаренгейту. Сколько будет градусов по Реомюру, если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадут?

Ответ. -32°.

Задание 3. Решить уравнение $x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}=64$.

Ответ. $x=16$.

Задание 4. Один из углов треугольника равен 60°, а длины сторон образуют геометрическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

Ответ. Все равносторонние треугольники.

Задание 5. Доказать тождество $\dfrac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=tg^4\alpha$.

Задание 6. Два города, А и В, находятся на расстоянии 300 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают друг другу навстречу два велосипедиста и едут, не останавливаясь, со скоростью 25 км/ч. Вместе с велосипедистом из города А вылетает оса, пролетающая в час 27 км. Оса опережает велосипедиста и летит навстречу другому велосипедисту, выехавшему из города В. Встретив его, она сразу поворачивает обратно, к велосипедисту из города А. Повстречав его, опять летит навстречу велосипедисту из города В. Так продолжала оса свои полеты до тех пор, пока велосипедисты не встретились. Тогда она успокоилась и села одному из них на шлем. Сколько километров пролетела оса?

Ответ. 162 км.

Задание 7. Доказать тождество $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Указание. Для доказательства примените метод матматической индукции.

Задание 8. Решить систему уравнений $\begin{cases}x^2-6y^2-xy-2x+11y=3,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

Ответ. $(1;2),(-1;2),\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{5}\right),\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Задание 9. Решить неравенство $\cos^3x\cos3x-\sin^3x\sin3x\le-\dfrac{1}{8}$.

Ответ. $\left[\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2};\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi n}{2}\right], n\in Z$.

Задание 10. Найти все значения x и y, при которых выражение

$$z=\sqrt{x^2+(y-4)^2}-\sqrt{y^2+(x-3)^2}$$

принимает наибольшее значение.

Ответ. $z=5$, $x\in[0;3]$, $y=-\frac{4}{3}x+4$.

Вариант 2

Задание 1. Найти X из пропорции $\dfrac{(20{,}18)^0\cdot X}{10{,}5\cdot\left(\frac{5^2}{6}\right)^{-1}-15{,}15:\left(\frac{2}{15}\right)^{-1}}=\dfrac{(-3)^2\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:\left(7^{-1}\right)^{-1}}$.

Ответ. 5.

Задание 2. Решить уравнение $x^2-5+\dfrac{2x^2}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+1}$.

Ответ. -3.

Задание 3. Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 метров одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1м, а в каждую следующую – на 3 м больше, чем в предыдущую. Определить, на какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи.

Ответ. $60°$.

Задание 4. Найти все корни уравнения $(\sin 2x+\cos 2x+1)\cdot\sqrt{(\pi-x)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=0$.

Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4};\pi\right\}$.

Задание 5. Найти радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, если высота BH равна 12, $\sin A=\frac{12}{13}$, $\sin C=\frac{4}{5}$.

Ответ. 4.

Задание 6. Найти значение выражения A, если $A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$.

Ответ. $\frac{2018}{4034}$.

Задание 7. В компьютерном магазине за два дня продали 2 одинаковых системных блока, 13 принтеров и один сканер, причем в первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Принтер дешевле системного блока и дороже сканера на одну и ту же сумму. Сколько принтеров и сколько системных блоков продали в один день со сканером?

Ответ. В один день со сканером продано 8 принтеров и ни одного системного блока.

Задание 8. Найти значение выражения $tg\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$. *Ответ.* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Задание 9. Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2(10+a),\\(x+y)^2=50\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Ответ. 2,5.

Задание 10. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}>2$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.

Составители: доц. *Л.В.Бакеева*
Научный редактор проф. *А.П.Господариков*