Методические указание по Отраслевой олимпиаде школьников «Газпром», профиль физика.

Учебное пособие для подготовки к олимпиаде

Под редакцией Бурковой Е.Г.

Задания заключительного этапа
10 класс
Вариант 1

1. Небольшой брусок съезжает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости высотой h, основанием b, плавно переходящей в горизонтальный участок. Сразу после въезда на горизонтальный участок мощность силы трения, приложенной к бруску равна P. Коэффициент трения на всем пути бруска постоянен и равен μ. Определить массу бруска.

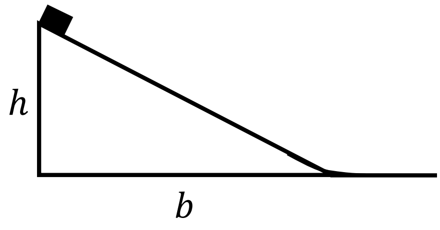

Рис. 1

РЕШЕНИЕ

Теорема о механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = -\mu mgb.$$

Отсюда скорость бруска сразу после въезда на горизонтальный участок

$$v = \sqrt{2g(h - \mu b)}.$$

Мощность силы трения сразу после въезда на горизонтальный участок

$$P = -\mu mgv.$$

Стало быть, масса бруска

$$m = \frac{-P}{\mu g\sqrt{2g(h - \mu b)}}\ .$$

2. Лодочник собирается переправиться через реку шириной $L = 400$ м из пункта A в пункт B, расположенный на расстоянии $h = 300$ м ниже по течению (рис. 2). Скорость течения $u = 2\ \frac{км}{ч}$. При какой минимальной скорости лодки относительно течения это возможно?

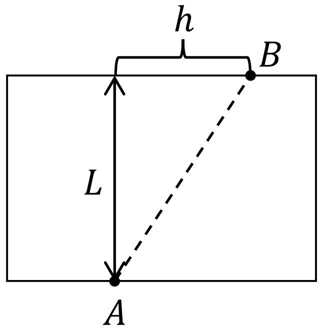

Рис. 2

РЕШЕНИЕ

Скорость лодки относительно воды будет минимальной, если она перпендикулярна траектории лодки относительно берега (рис. 2,а). Тогда из подобия треугольников

$$\frac{v}{u} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}}.$$

Отсюда

$$v = \frac{uL}{\sqrt{L^2 + h^2}} = 1{,}6\ \frac{км}{ч}.$$

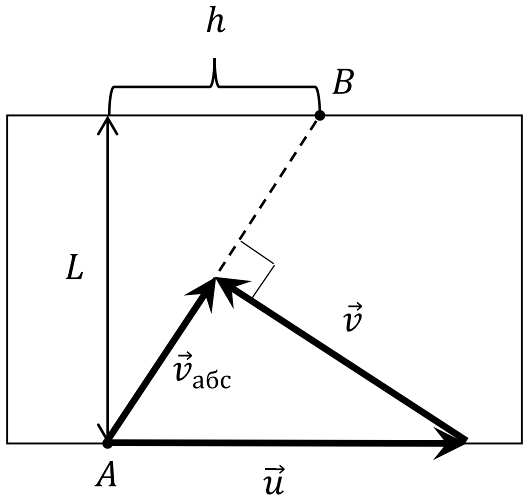

Рис. 2,а

3. Искусственный спутник Земли массой $m = 500$ кг движется по низкой околоземной орбите на высоте $H = 200$ км от поверхности Земли. Вследствие наличия на этой высоте сильно разреженной атмосферы радиус орбиты спутника с каждым витком незначительно уменьшается. Какое количество тепла выделится в результате взаимодействия спутника с атмосферой к моменту, когда он снизится на $h = 10$ км? Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли принять равным $10\ \text{м/с}^2$. Землю считать шаром радиусом $R = 6400$ км.

РЕШЕНИЕ

Полная механическая энергия спутника

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}.$$

Второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Объединяя, получим

$$E = -G\frac{mM}{2r}.$$

За время снижения орбиты выделится тепло

$$Q = -\Delta E = \frac{1}{2}GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{GMmh}{2r_1r_2}.$$

В свою очередь

$$r_1 = R + H,$$

$$r_2 = R + H - h.$$

$$GM = gR^2.$$

В итоге получим

$$Q = \frac{mghR^2}{2(R+H)(R+H-h)} \cong 24\ \text{МДж}.$$

4. Внутри герметичного бака, доверху заполненного жидкостью плотности ρ, закреплена вертикальная спица, на которую надет небольшой шарик объема V, плотности $\frac{2}{3}\rho$, способный скользить вдоль спицы без трения (рис. 3). Шарик соединен с невесомой охватывающей спицу пружинкой жесткости k, второй конец которой прикреплен к крышке бака. Бак привели движение с постоянным ускорением a, направленным вверх вдоль спицы. В результате шарик оказался внутри жидкости в новом положении равновесия. В какую сторону и на какое расстояние h сместился шарик относительно бака? Шарик не касается поверхности бака.

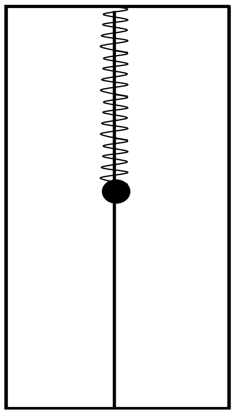

Рис. 3

РЕШЕНИЕ

Основное динамическое уравнение для шарика до начала движения бака (см. рис. 3, а):

$$\rho V g - \frac{2}{3}\rho V g - kx = 0.$$

Аналогично в процессе движения бака:

$$\rho V(g+a) - \frac{2}{3}\rho V g - k(x+h) = \frac{2}{3}\rho V a.$$

Здесь учтено изменение силы Архимеда вследствие изменения веса жидкости. Вычитая почленно и далее упрощая, получим

$$\boldsymbol{h = \frac{\rho V a}{3k}}.$$

Положительный знак h говорит о том, что шарик сместится вверх.

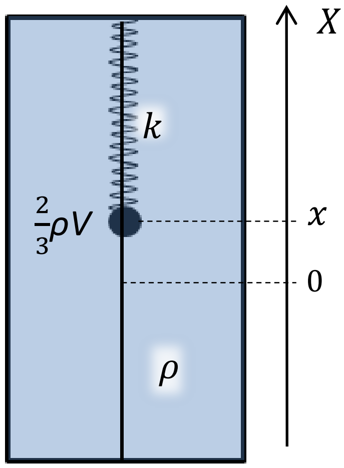

Рис. 3, а

5. Внутри вертикально расположенного цилиндрического сосуда под тяжелым поршнем, расположенным на высоте h от дна сосуда, находится ν молей идеального газа. Поршень соединен с дном легкой пружиной жесткости k. Если нагреть газ до температуры T, поршень начнет подниматься. До какой температуры T' надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$?

РЕШЕНИЕ

Условие равновесия поршня на высоте h (см. рис):

$$-Mg - p_0 S - k\left(h - x_{\text{недеф}}\right) + pS = 0.$$

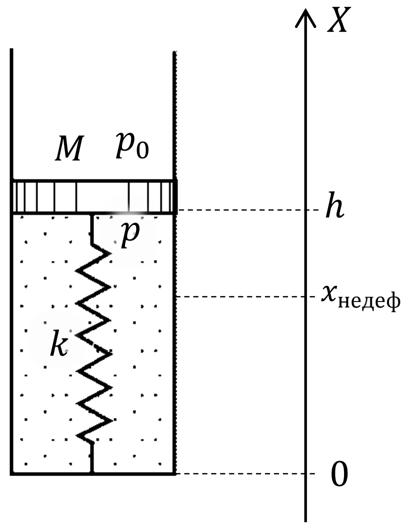

Рис. 3, б

Аналогично, на высоте $2h$:

$$-Mg - p_0 S - k\left(2h - x_{\text{недеф}}\right) + p'S = 0.$$

Также на поршень может действовать постоянная сила трения, но это ничего не изменит принципиально. Вычитая уравнения друг из друга почленно получим

$$kh = (p' - p)S.$$

Используем уравнение состояния, тогда

$$kh^2 = (p' - p)Sh = \frac{\nu RT'}{2} - \nu RT.$$

Тогда искомая температура

$$\boldsymbol{T' = 2\left(T + \frac{kh^2}{\nu R}\right)}.$$

6. Шар радиуса R, движется со скоростью v в направлении покоящихся соприкасающихся друг с другом шаров радиусами $2R$ и $3R$. Происходит удар (одновременно с обоими шарами) в результате которого налетающий шар останавливается. Какую скорость v_2 приобретет в результате удара шар радиусом $2R$, если вектор его скорости составляет с первоначальной скоростью налетевшего шара угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$? Чему равно изменение внутренней энергии шара радиусом $3R$? Шары, однородны, взаимодействуют только друг с другом, теплопроводности материалов шаров и их массы одинаковы, трения нет.

РЕШЕНИЕ

В момент столкновения центры шаров являются вершинами треугольника ABC, причем $AB = 3R$, $AC = 4R$, $BC = 5R$ (рис. 4, а). Стало быть,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

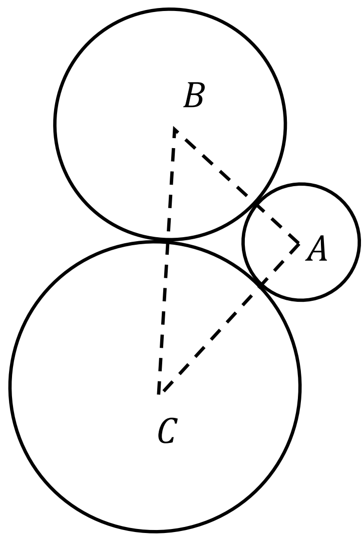

Рис. 4, а

то есть ΔABC — прямоугольный. Поэтому налетающий шар толкнет покоившиеся шары во взаимно-перпендикулярных направлениях. Тогда, по закону сохранения импульса:

$$v^2 = v_2^2 + v_C^2.$$

Откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2},$$

то есть механическая энергия системы в результате удара сохраняется. Стало быть, удар абсолютно упругий, поэтому изменение внутренней энергии любого шара равно нулю. Как видно из рис. 4, б, искомая скорость

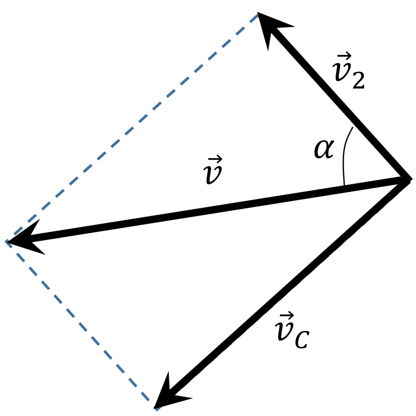

Рис. 4, б

$$\boldsymbol{v_2 = v\cos a = \frac{3}{5}v}.$$

Вариант 3

1. Небольшой брусок массы m съезжает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости высотой h, основанием b, плавно переходящей в горизонтальный участок. Сразу после въезда на горизонтальный участок полная механическая энергия бруска равна E, при этом потенциальная энергия отсчитывается от основания плоскости. Определить коэффициент трения бруска о поверхность, считая его постоянным на всем пути.

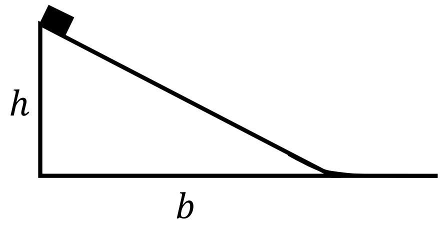

Рис. 1

РЕШЕНИЕ

Теорема о механической энергии:

$$E - mgh = -\mu mgb.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{mgh - E}{mgb}.$$

2. Лодочник собирается переправиться через реку из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению (рис. 2). Ширина реки $L = 800$ м Минимальная скорость лодки относительно течения, при которой это возможно $v = 1{,}2$ км/ч. Скорость течения $u = 1{,}5$ км/ч. На каком расстоянии h ниже по течению расположен пункт B?

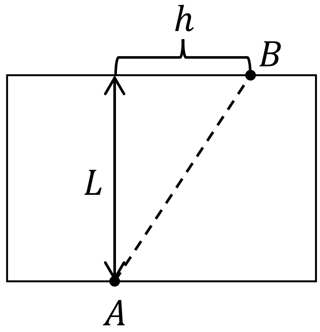

Рис. 2

РЕШЕНИЕ

Скорость лодки относительно воды будет минимальной, если она перпендикулярна траектории лодки относительно берега (рис. 2,а). Тогда из подобия треугольников

$$\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}} = \frac{L}{h}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{h = L\sqrt{\frac{u^2}{v^2} - 1} = 600} \text{ м.}$$

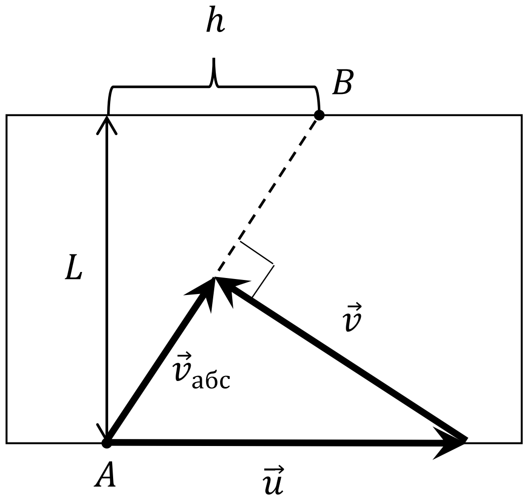

Рис. 2,а

3. Искусственный спутник Земли движется по низкой околоземной орбите на высоте $H = 250$ км от поверхности Земли. Вследствие наличия на этой высоте сильно разреженной атмосферы радиус орбиты спутника с каждым витком незначительно уменьшается, и через некоторое время спутник снизился на $h = 10$ км. Для того чтобы быстро вернуть спутник на исходную орбиту необходимо совершить минимальную полезную работу $A = 40$ МДж. Чему равна масса спутника? Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли принять равным 10 м/с^2. Землю считать шаром радиусом $R = 6400$ км.

РЕШЕНИЕ

Полная механическая энергия спутника

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}.$$

Второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Объединяя, получим

$$E = -G\frac{mM}{2r}.$$

За время снижения орбиты выделится тепло

$$Q = -\Delta E = \frac{1}{2}GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{GMmh}{2r_1r_2}.$$

В свою очередь

$$r_1 = R + H,$$

$$r_2 = R + H - h.$$

$$GM = gR^2.$$

В итоге получим

$$Q = \frac{mghR^2}{2(R+H)(R+H-h)}.$$

Поскольку возврат спутника происходит быстро, потерями механической энергии в атмосфере здесь можно пренебречь. Тогда полезная работа $A = Q$. Отсюда масса спутника

$$m = \frac{2A(R+H)(R+H-h)}{ghR^2} \cong 862 \text{ кг.}$$

4. Внутри герметичного бака, доверху заполненного жидкостью плотности ρ, закреплена вертикальная спица, на которую надет небольшой шарик объема V, плотности $\frac{3}{4}\rho$, способный скользить вдоль спицы без трения (рис. 3). Шарик соединен с невесомой охватывающей спицу пружинкой жесткости k, второй конец которой прикреплен ко дну бака. Бак привели движение с постоянным ускорением направленным вдоль спицы. В результате, когда шарик оказался внутри жидкости в новом положении равновесия длина пружины уменьшилась на h. Чему равно и как направленно (вверх или вниз) ускорение бака? Шарик не касается поверхности бака.

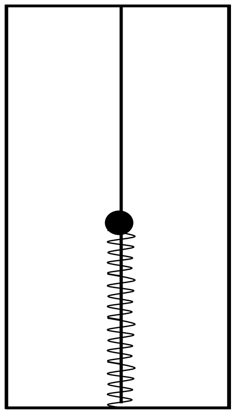

Рис. 3

РЕШЕНИЕ

Основное динамическое уравнение для шарика до начала движения бака (см. рис. 3, а):

$$-\rho V g + \frac{3}{4}\rho V g - kx = 0.$$

Аналогично в процессе движения бака:

$$-\rho V(g-a) + \frac{3}{4}\rho V g - k(x+h) = \frac{3}{4}\rho V a.$$

Здесь учтено изменение силы Архимеда вследствие изменения веса жидкости. Вычитая почленно и далее упрощая, получим

$$\boldsymbol{a = \frac{4kh}{\rho V}}.$$

Положительный знак a говорит о том, что ускорение направлено вниз.

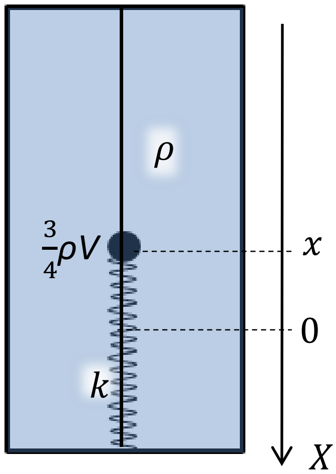

Рис. 3, а

5. Внутри вертикально расположенного цилиндрического сосуда под тяжелым поршнем, расположенным на высоте h от дна сосуда, находится ν молей идеального газа. Поршень соединен с дном легкой пружиной жесткости k. Если охладить газ до температуры T, поршень начнет опускаться. До какой температуры T' надо охладить газ, чтобы поршень опустился до высоты $3h/4$?

РЕШЕНИЕ

Условие равновесия поршня на высоте h (см. рис):

$$-Mg - p_0S - k(x - x_{\text{недеф}}) + pS = 0.$$

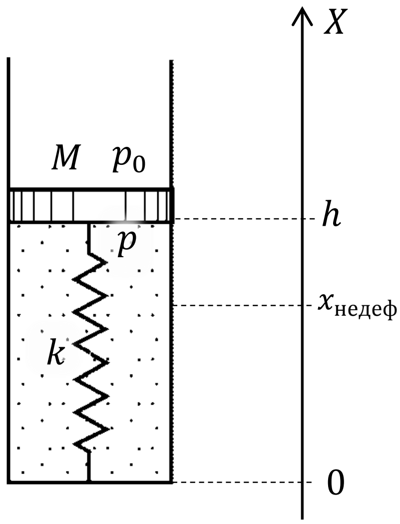

Рис. 3, б

Аналогично, на высоте $3h/4$:

$$-Mg - p_0S - k\left(\frac{3h}{4} - x_{\text{недеф}}\right) + p'S = 0.$$

Также на поршень может действовать постоянная сила трения, но это ничего не изменит принципиально. Вычитая уравнения друг из друга почленно, получим

$$-\frac{kh}{4} = (p' - p)S.$$

Используем уравнение состояния, тогда

$$-\frac{kh^2}{4} = (p' - p)Sh = \frac{4}{3}\nu RT' - \nu RT.$$

Тогда искомая температура

$$T' = \frac{3}{4}\left(T - \frac{kh^2}{4\nu R}\right).$$

Ответ сохраняет физический смысл при условии, что $T > \frac{kh^2}{4\nu R}$.

6. Шар радиуса $\frac{1}{3}R$, движется со скоростью v в направлении покоящихся соприкасающихся друг с другом шаров радиусами $\frac{2}{3}R$ и R. Происходит удар (одновременно с обоими шарами) в результате которого налетающий шар останавливается. Какую скорость v_2 приобретет в результате удара шар радиусом R, если вектор его скорости составляет с первоначальной скоростью налетевшего шара угол $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{7}{24}$? Чему равно изменение внутренней энергии шара радиусом $\frac{1}{3}R$? Шары, однородны, взаимодействуют только друг с другом, теплопроводности материалов шаров и их массы одинаковы, трения нет.

РЕШЕНИЕ

В момент столкновения центры шаров являются вершинами треугольника ABC, причем $AB = \frac{3R}{3}$, $AC = \frac{4R}{3}$, $BC = \frac{5R}{3}$ (рис. 4, а). Стало быть,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

то есть ΔABC — прямоугольный. Поэтому налетающий шар толкнет покоившиеся шары во взаимно-перпендикулярных направлениях. Тогда, по закону сохранения импульса:

$$v^2 = v_B^2 + v_2^2.$$

Откуда

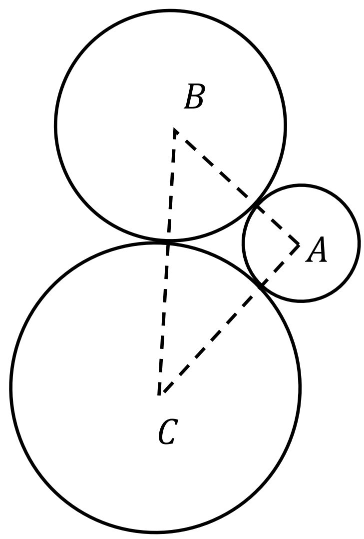

Рис. 4, а

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

то есть механическая энергия системы в результате удара сохраняется. Стало быть, удар абсолютно упругий, поэтому изменение внутренней энергии любого шара равно нулю. Как видно из рис. 4, б, (пропорции могут не соответствовать) искомая скорость

$$v_2 = v \cos a = \frac{7}{25} v.$$

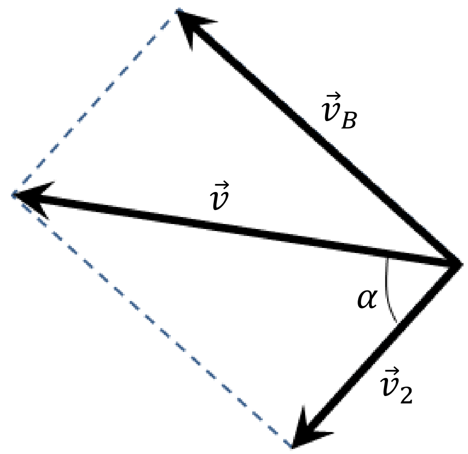

Рис. 4, б

Вариант 5

1. Небольшой брусок массы mсъезжает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости основанием b плавно переходящей в горизонтальный участок. Сразу после въезда на горизонтальный участок мощность силы трения, приложенной к бруску равна P. Коэффициент трения на всем пути бруска постоянен и равен μ. Определить высоту наклонной плоскости h.

РЕШЕНИЕ

Теорема о механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = -\mu mgb.$$

Мощность силы трения сразу после въезда на горизонтальный участок

$$P = -\mu mgv.$$

Решая систему, получим

$$h = \mu b + \frac{1}{2g}\left(\frac{P}{\mu mg}\right)^2.$$

2. Лодочник переправляется через реку шириной $L = 400$ м из пункта A в пункт B, расположенный на расстоянии $h = 300$ м ниже по течению (рис. 2), двигаясь с минимальной относительно течения скоростью. Лодка достигает пункта B за время $t = 8$ мин. Чему равна скорость течения u?

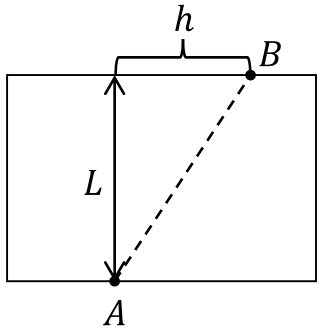

Рис. 2

РЕШЕНИЕ

Скорость лодки относительно воды будет минимальной, если она перпендикулярна траектории лодки относительно берега (рис. 2,а). Тогда из подобия треугольников

$$\frac{u}{v_{\text{абс}}} = \frac{AB}{h}.$$

В свою очередь

$$v_{\text{абс}} = \frac{AB}{t}.$$

Отсюда

$$u = \frac{AB^2}{ht} = \frac{\boldsymbol{L^2 + h^2}}{\boldsymbol{ht}} \approx \mathbf{1{,}7}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

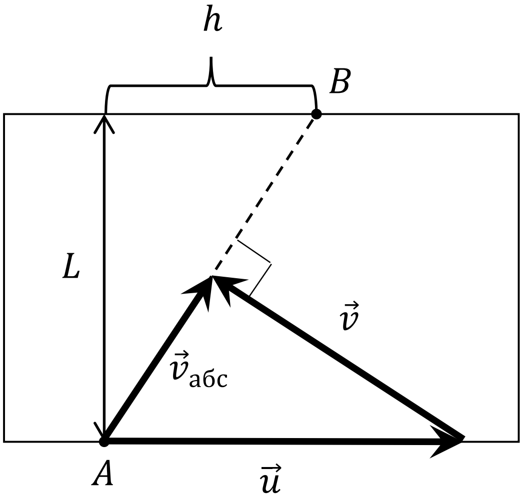

Рис. 2,а

3. Искусственный спутник Земли массой $m = 450$ кг движется по низкой околоземной орбите. Вследствие наличия на такой орбите сильно разреженной атмосферы радиус орбиты с каждым витком незначительно уменьшается. К моменту, когда он снизился на $h = 10$ км, в результате взаимодействия спутника с атмосферой выделилось $Q = 20$ МДж тепла. Каков примерно средний радиус орбиты спутника? Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли принять равным $10\ \text{м/с}^2$. Землю считать шаром радиусом $R = 6400$ км.

РЕШЕНИЕ

Полная механическая энергия спутника

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}.$$

Второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Объединяя, получим

$$E = -G\frac{mM}{2r}.$$

За время снижения орбиты выделится тепло

$$Q = -\Delta E = \frac{1}{2}GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{GMmh}{2r_1r_2} \cong \frac{gR^2mh}{2r_\text{c}^2},$$

где r_c — искомый средний радиус орбиты спутника. Отсюда

$$r_\text{c} \approx R\sqrt{\frac{mgh}{2Q}} \approx 6800\ \text{км}.$$

4. Внутри герметичного бака, доверху заполненного жидкостью плотности ρ, закреплена горизонтальная спица, на которую надет небольшой шарик объема V, плотности $\frac{1}{3}\rho$, способный скользить вдоль спицы без трения (рис. 3). Шарик соединен с невесомой охватывающей спицу пружинкой жесткости k, второй конец которой прикреплен к правой стенке бака. Бак привели движение с постоянным ускорением $\frac{1}{3}g$, направленным влево вдоль спицы, где g — ускорение свободного падения. В результате шарик оказался внутри жидкости в новом положении равновесия. В какую сторону и на какое расстояние h сместился шарик относительно бака? Шарик не касается поверхности бака.

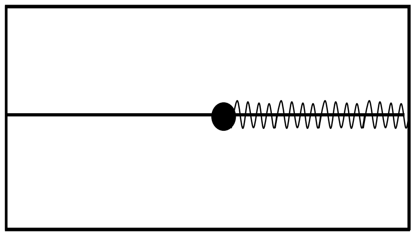

Рис. 3

РЕШЕНИЕ

До начала движения бака пружина не деформирована. В процессе движения бака возникает горизонтальное давление слоев жидкости друг на друга, вследствие чего появляется горизонтальная сила Архимеда, приводящая к смещению шарика в направлении ускорения бака, пружина при этом деформируется. Динамическое уравнение для шарика в этом случае примет вид:

$$\frac{1}{3}\rho V g - kh = \frac{1}{9}\rho V g.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\rho V a}{9k}.$$

Положительный знак h говорит о том, что шарик сместится влево.

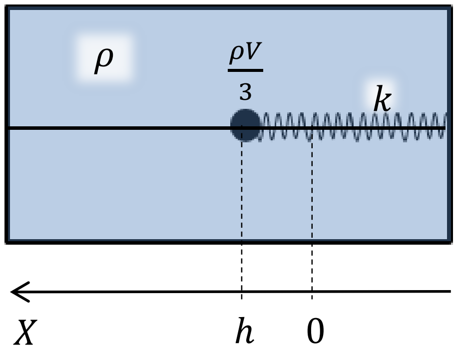

Рис. 3, а

5. Внутри вертикально расположенного цилиндрического сосуда под тяжелым поршнем, расположенным на высоте h от дна сосуда, находится ν молей идеального газа. Поршень соединен с дном легкой пружиной жесткости k. Если нагреть газ до температуры T, поршень начнет подниматься. До какой температуры T' надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты $3h$?

РЕШЕНИЕ

Условие равновесия поршня на высоте h (см. рис):

$$-Mg - p_0S - k(h - x_{\text{недеф}}) + pS = 0.$$

Аналогично, на высоте $3h$:

$$-Mg - p_0S - k(3h - x_{\text{недеф}}) + p'S = 0.$$

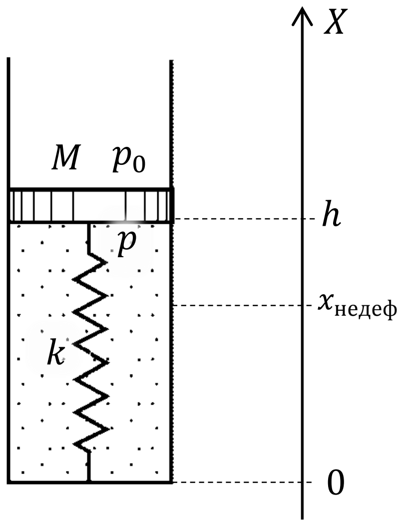

Рис. 3, б

Также на поршень может действовать постоянная сила трения, но это ничего не изменит принципиально. Вычитая уравнения друг из друга почленно, получим

$$2kh = (p' - p)S.$$

Используем уравнение состояния, тогда

$$2kh^2 = (p' - p)Sh = \frac{1}{3}\nu RT' - \nu RT.$$

Тогда искомая температура

$$T' = 3\left(T + \frac{2kh^2}{\nu R}\right).$$

6. Шар радиуса $2R$, движется со скоростью v в направлении покоящихся соприкасающихся друг с другом шаров радиусами $3R$ и $10R$. Происходит удар (одновременно с обоими шарами) в результате которого налетающий шар останавливается. Какую скорость v_2 приобретет в результате удара шар радиусом $3R$, если вектор его скорости составляет с первоначальной скоростью налетевшего шара угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{40}{9}$? Чему равно изменение внутренней энергии шара радиусом $10R$? Шары, однородны, взаимодействуют только друг с другом, теплопроводности материалов шаров и их массы одинаковы, трения нет.

РЕШЕНИЕ

В момент столкновения центры шаров являются вершинами треугольника ABC, причем $AB = 5R$, $AC = 12R$, $BC = 13R$ (рис. 4, а). Стало быть,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

то есть ΔABC — прямоугольный. Поэтому налетающий шар толкнет покоившиеся шары во взаимно-перпендикулярных направлениях. Тогда, по закону сохранения импульса:

$$v^2 = v_2^2 + v_C^2.$$

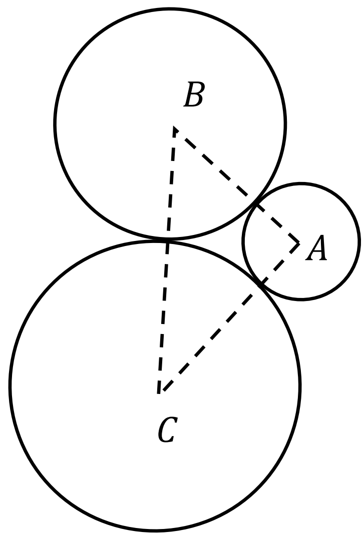

Рис. 4, а

Откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2},$$

то есть механическая энергия системы в результате удара сохраняется. Стало быть, удар абсолютно упругий, поэтому изменение внутренней энергии любого шара равно нулю. Как видно из рис. 4, б, (пропорции могут не соответствовать) искомая скорость

$$v_2 = v\sin a = \frac{9}{41}v.$$

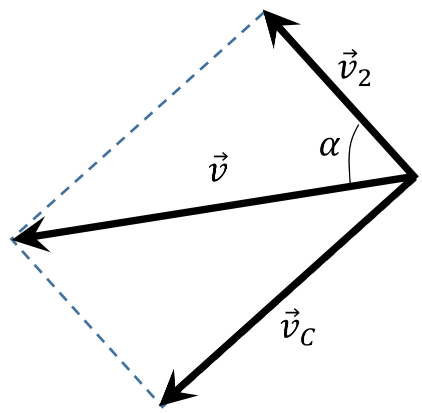

Рис. 4, б

Вариант 7

1. Небольшой брусок массы m съезжает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости высотой h, основанием b, плавно переходящей в горизонтальный участок. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ. Какое количество тепла выделится в процессе торможения бруска на горизонтальном участке, если коэффициент трения здесь вдвое меньше, чем на наклонной плоскости?

РЕШЕНИЕ

Теорема о механической энергии:

$$-mgh = -\mu mgb + A.$$

где A — работа силы трения на горизонтальном участке. Тепло, выделившееся на горизонтальном участке, противоположно работе A. Стало быть,

$$Q = mg(h - \mu b).$$

2. Лодочник переправляется через реку шириной $L = 200$ м из пункта A в пункт B, расположенный на расстоянии $h = 150$ м ниже по течению (рис. 2), двигаясь с минимальной относительно течения скоростью v. Лодка достигает пункта B за время $t = 10$ мин. Чему равна скорость v?

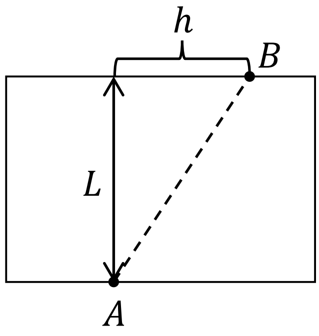

Рис. 2

РЕШЕНИЕ

Скорость лодки относительно воды будет минимальной, если она перпендикулярна траектории лодки относительно берега (рис. 2,а). Тогда из подобия треугольников

$$\frac{v}{v_{\text{абс}}} = \frac{L}{h}.$$

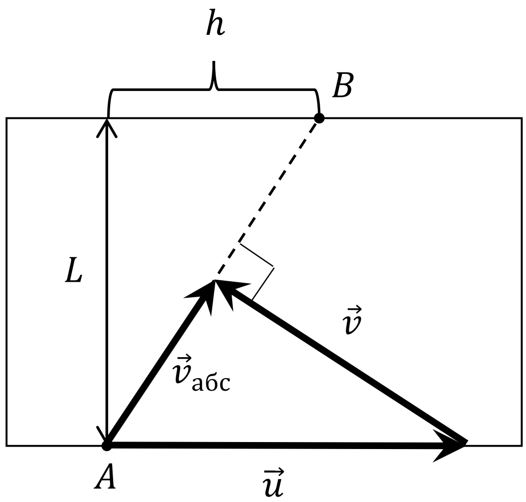

Рис. 2,а

В свою очередь

$$v_{\text{абс}} = \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{t}.$$

Отсюда

$$v = \frac{L\sqrt{L^2 + h^2}}{ht} \approx 0{,}56\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Искусственный спутник Земли движется по низкой околоземной орбите на высоте $H = 200$ км от поверхности Земли. Вследствие наличия на этой высоте сильно разреженной атмосферы радиус орбиты спутника с каждым витком незначительно уменьшается, и через некоторое время спутник снизился на $h = 10$ км. За это время, в результате взаимодействия спутника с атмосферой выделилось $Q = 10$ МДж тепла. Чему равна масса спутника? Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли принять равным $10\ \text{м/с}^2$. Землю считать шаром радиусом $R = 6400$ км.

РЕШЕНИЕ

Полная механическая энергия спутника

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}.$$

Второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Объединяя, получим

$$E = -G\frac{mM}{2r}.$$

За время снижения орбиты выделится тепло

$$Q = -\Delta E = \frac{1}{2}GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{GMmh}{2r_1r_2}.$$

В свою очередь

$$r_1 = R + H,$$

$$r_2 = R + H - h.$$

$$GM = gR^2.$$

В итоге получим

$$Q = \frac{mghR^2}{2(R+H)(R+H-h)}.$$

Отсюда масса спутника

$m = \frac{2Q(R+H)(R+H-h)}{ghR^2} \cong 212$ кг.

4. Внутри герметичного бака, доверху заполненного жидкостью плотности ρ, закреплена горизонтальная спица, на которую надет небольшой шарик объема V, плотности $\frac{3}{7}\rho$, способный скользить вдоль спицы без трения (рис. 3). Шарик соединен с невесомой охватывающей спицу пружинкой жесткости k, второй конец которой прикреплен к левой стенке бака. Бак привели движение с постоянным ускорением направленным вдоль спицы. В результате, когда шарик оказался внутри жидкости в новом положении равновесия длина пружины увеличилась на h. Чему равно и как направленно (вправо или влево) ускорение бака? Шарик не касается поверхности бака

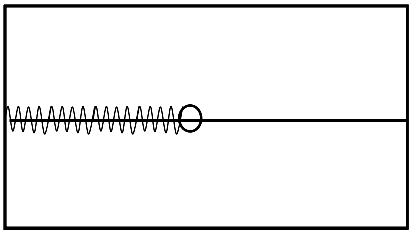

Рис. 3

РЕШЕНИЕ

До начала движения бака пружина не деформирована. В процессе движения бака возникает горизонтальное давление слоев жидкости друг на друга, вследствие чего появляется горизонтальная сила Архимеда, приводящая к смещению шарика в направлении ускорения бака, пружина при этом деформируется. Динамическое уравнение для шарика в этом случае примет вид:

$$\rho Va - kh = \frac{3}{7}\rho Va.$$

Отсюда

$$a = \frac{7kh}{4\rho V}.$$

Положительный знак a говорит о том, что оно направлено вправо.

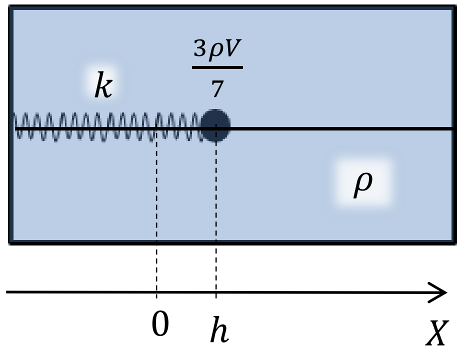

Рис. 3, а

5. Внутри вертикально расположенного цилиндрического сосуда под тяжелым поршнем, расположенным на высоте h от дна сосуда, находится ν молей идеального газа. Поршень соединен с дном легкой пружиной жесткости k. Если охладить газ до температуры T, поршень начнет опускаться. До какой температуры T' надо охладить газ, чтобы поршень опустился до высоты $3h/5$?

РЕШЕНИЕ

Условие равновесия поршня на высоте h (см. рис):

$$-Mg - p_0 S - k\left(h - x_{\text{недеф}}\right) + pS = 0.$$

Аналогично, на высоте $3h/5$:

$$-Mg - p_0 S - k\left(\frac{3h}{5} - x_{\text{недеф}}\right) + p'S = 0.$$

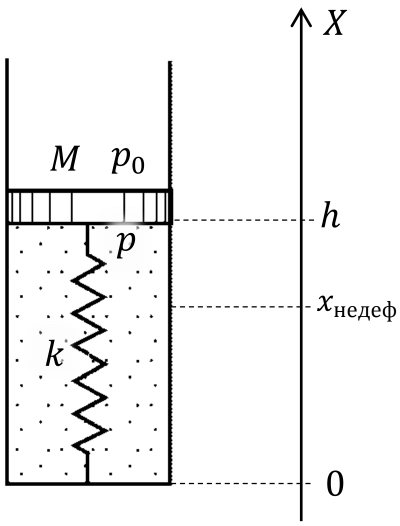

Рис. 3, б

Также на поршень может действовать постоянная сила трения, но это ничего не изменит принципиально. Вычитая уравнения друг из друга почленно, получим

$$-\frac{2kh}{5} = (p' - p)S.$$

Используем уравнение состояния, тогда

$$-\frac{2kh^2}{5} = (p' - p)Sh = \frac{5}{2}\nu RT' - \nu RT.$$

Тогда искомая температура

$$T' = \frac{2}{5}\left(T - \frac{2kh^2}{5\nu R}\right).$$

Ответ сохраняет физический смысл при условии, что $T > \frac{2kh^2}{5\nu R}$.

6. Шар радиуса $2R$, движется со скоростью v в направлении покоящихся соприкасающихся друг с другом шаров радиусами $3R$ и $10R$. Происходит удар (одновременно с обоими шарами) в результате которого налетающий шар останавливается. Какую скорость v_2 приобретет в результате удара шар радиусом $3R$, если вектор его скорости составляет с первоначальной скоростью налетевшего шара угол $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{35}{12}$? Чему равно изменение внутренней энергии шара радиусом $2R$? Шары, однородны, взаимодействуют только друг с другом, теплопроводности материалов шаров и их массы одинаковы, трения нет.

РЕШЕНИЕ

В момент столкновения центры шаров являются вершинами треугольника ABC, причем $AB = 5R$, $AC = 12R$, $BC = 13R$ (рис. 4, а). Стало быть,

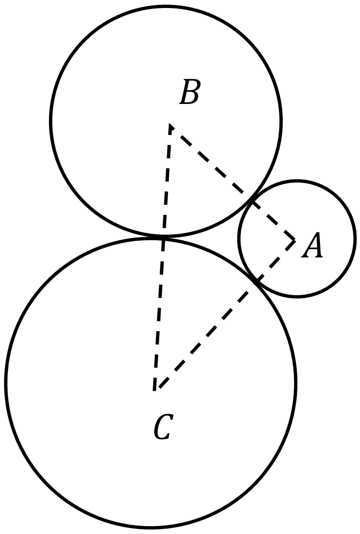

Рис. 4, а

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

то есть ΔABC — прямоугольный. Поэтому налетающий шар толкнет покоившиеся шары во взаимно-перпендикулярных направлениях. Тогда, по закону сохранения импульса:

$$v^2 = v_2^2 + v_C^2.$$

Откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2},$$

то есть механическая энергия системы в результате удара сохраняется. Стало быть, удар абсолютно упругий, поэтому изменение внутренней энергии любого шара равно нулю. Как видно из рис. 4, б, (пропорции могут не соответствовать) искомая скорость

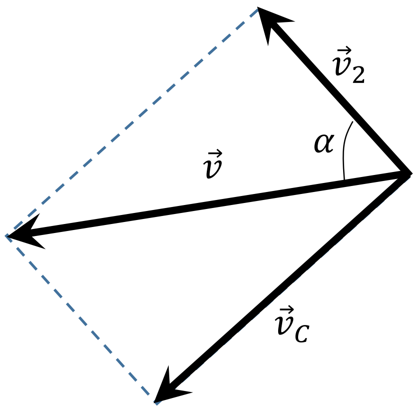

Рис. 4, б

$$v_2 = v\cos a = \frac{35}{37}v.$$