

Заключительный этап Отраслевой олимпиады школьников «ГАЗПРОМ» по математике проводится только в письменной форме. Вариант билета может содержать от 6 до 10 задач, связанных с преобразованием алгебраического выражения, решением алгебраического, иррационального, тригонометрического, показательного, логарифмического уравнений и неравенств (или их систем); задачи на прогрессии, на применение производной, по геометрии, текстовые задачи и задачи с параметрами.

Задачи рассчитаны на выявление математической смекалки и эрудиции каждого участника олимпиады. При решении следует учитывать, что в вариант включены задачи разной сложности, как правило, сложность возрастает в порядке возрастания номера задачи. Выполнение более сложной задачи оценивается и большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные дроби и наоборот. В решении задачи не требуется приводить пространственные словесные пояснения, но следует выполнить все необходимые математические выкладки.

В целом уровень предлагаемых заданий не выходит за рамки программы средней общеобразовательной школы. Типовые примеры дают представление об уровне требований, предъявляемых к участникам олимпиады.

## 1. Тождественные преобразования выражение. Прогрессии

### 1.1. Задачи на вычисление значений выражений

**Задача 1.** Найти значение числового выражения  $A$ , если

$$A = (0,1)^{-3} \cdot \left( \frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0,2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0,02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right).$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} & (0,1)^{-3} \cdot \left( \frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0,2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0,02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right) = \\ & = 10^3 \cdot \left( \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{5 \cdot 2}{4}\sqrt{\frac{1}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + 10\sqrt{\frac{1}{5}} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}}{\frac{7 \cdot 8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + 6 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - 140\sqrt{\frac{1}{50}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right) = \\ & = 10^3 \cdot \left( \frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + 10\sqrt{\frac{1}{5}} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}}{28\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{\frac{1}{2}} - 140 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right) = \\ & = 1000 \cdot \left( \frac{5\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}(28 - 3 + 1 + 4 - 28)} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right) = 1000 \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 1,017 \right) = \\ & = 1000 \cdot (1 + 1,017) = 1000 \cdot 2,017 = 2017. \end{aligned}$$

*Ответ.* 2017.

**Задача 2.** Найти сумму  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$ .

**Решение.**

Т.к.  $-n^2 + (n+1)^2 = n + (n+1)$ , то получим

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2 &= 1 + (2+3) + (4+5) + \dots + (100+101) = \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 + 101 = \frac{(1+101) \cdot 101}{2} = 5151. \end{aligned}$$

*Ответ.* 5151.

**Задача 3.** Найти сумму  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ .

**Решение.**

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \text{ поэтому имеем}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} &= \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{99}-\sqrt{98}) + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{99}-\sqrt{98} + \sqrt{100}-\sqrt{99} = \sqrt{100}-1 = 10-1 = 9. \end{aligned}$$

*Ответ. 9.*

**Задача 4.** Найти значение выражения  $A$ , если  $A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2018^2}\right)$ .

**Решение.**

Упростим выражение  $A$ .

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2018^2}\right) = \\ &= \left(\frac{4-1}{4}\right) \cdot \left(\frac{9-1}{9}\right) \cdot \left(\frac{16-1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right) = \\ &= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{3^2-1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{4^2-1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right) = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \dots \cdot \frac{2016 \cdot 2018}{2017^2} \cdot \frac{2017 \cdot 2019}{2018^2}. \end{aligned}$$

Полученное выражение сократим на величину произведения

$2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 2017^2 \cdot 2018$  и получим

$$A = \frac{2019}{2 \cdot 2018} = \frac{2019}{4036}.$$

*Ответ.  $A = \frac{2019}{4036}$ .*

**Задача 5.** Доказать, что число  $\frac{7^{2020^{2019}} - 3^{20^{18}}}{10}$  целое.

**Решение.**

Последняя цифра числа  $7^n$  зависит от показателя степени  $n$  и принимает значения 7, 9, 3, 1; причем, если показатель степени  $n$  делится на 4, то последняя цифра числа  $7^n$  есть 1 (единица).

Число  $3^n$  оканчивается на одну из цифр 3, 9, 7, 1; причем если показатель степени  $n$  делится на 4, то последняя цифра числа  $3^n$  есть 1 (единица).

Т.к. число 20 делится на 4, то и число 2020 делится на 4. Следовательно,  $2020^{2019}$  делится на 4; число  $20^{18}$  также делится на 4. Потому число  $\frac{7^{2020^{2019}} - 3^{20^{18}}}{10}$  – целое, т.к. в числителе данной дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются цифрой 1. Таким образом, числитель дроби делится на 10.

*Что требовалось доказать.*

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 6.** Найти сумму  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{87 \cdot 101}$ .

*Указание.* Представить каждое слагаемое суммы по формуле

$$\frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right).$$

*Ответ.  $\frac{25}{101}$ .*

**Задача 7.** Доказать, что число  $(998 \cdot 999 \cdot 1000 \cdot 1001 + 1) \cdot (999 \cdot 1000 \cdot 1001 \cdot 1002 + 1)(1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 1)$  является полным квадратом.

*Указание.* Показать, что каждый множитель произведения представим в виде

$$(n-2)(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n^2 - n - 1)^2.$$

**Задача 8.** Упростить и вычислить  $\sqrt[3]{40 + \sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40 - \sqrt{1573}}$ .

*Ответ.* 5.

**Задача 9.** Найти величину  $X$  из пропорции  $\frac{(20,18)^0 \cdot X}{10,5 \cdot \left(\frac{5^2}{6}\right)^{-1} - 15,15 : \left(\frac{2}{15}\right)^{-1}} = \frac{(-3)^2 \cdot \left(1\frac{11}{20} - 0,945 : 0,9\right)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : (7^{-1})^{-1}}$ .

*Ответ.* 5.

**Задача 10.** Найти значение выражения  $A$ , если  $A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2017^2}\right)$ .

*Ответ.*  $\frac{2018}{4034}$ .

### 1.2. Задачи на доказательство тождеств и упрощение выражений

**Задача 11.** Найти значение выражение  $A$  при  $x=8$ , если

$$A = \left( \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} \right) \left( \frac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}.$$

**Решение.**

Упростим выражение  $A$ , пользуясь формулами сокращенного умножения и свойствами степеней.

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} \right) \left( \frac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} \right) \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + 1} = \\ &= \frac{\left( \frac{2}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1} \right) x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} - 1} \right) \left( \frac{2}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1} \right) \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + 1} \right)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} - 1} \right) \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + 1} \right)} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} - 1}. \end{aligned}$$

При  $x=8$  значение выражения  $A = \frac{1}{\left( \frac{2}{8^{\frac{2}{3}} - 1} \right)} = \frac{1}{3}$ .

*Ответ.*  $A = \frac{1}{3}$ .

**Задача 12.** Упростить выражение  $\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left( \frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left( \frac{q-p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right)$ .

**Решение.**

ОДЗ:  $p \neq q$ .

Т.к.  $\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = \sqrt{(p - q)^2} = |p - q|$ , то получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{p^2 - 2pq + q^2} \cdot \left( \frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left( \frac{q - p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right) = \\ & = |p - q| \cdot \left( \frac{2pq}{p^2 - q^2} + \frac{q}{p - q} + \frac{p}{p + q} \right) = \\ & = |p - q| \frac{2pq + pq + q^2 + p^2 - pq}{p^2 - q^2} = \\ & = \frac{|p - q| (p + q)^2}{(p - q)(p + q)} = \frac{|p - q| (p + q)}{(p - q)} = (p + q) \operatorname{sgn}(p - q) = \\ & = \begin{cases} p + q, & p > q; \\ -p - q, & p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ.  $p + q$  при  $p > q$ ,  
 $-p - q$  при  $p < q$ .

**Задача 13.** Доказать, что  $(1 + b)(1 + b^2)(1 + b^4)(1 + b^8) \dots (1 + b^{2^n}) = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{2^n}$ , где  $b$  – рациональное число,  $n$  – натуральное число.

**Решение.** Умножим и разделим левую часть равенства на  $(1 - b)$ . В числителе после последовательного применения формулы разности квадратов получим

$$\begin{aligned} & (1 + b)(1 + b^2)(1 + b^4)(1 + b^8) \dots (1 + b^{2^n}) = \frac{(1 - b)(1 + b)(1 + b^2)(1 + b^4)(1 + b^8) \dots (1 + b^{2^n})}{1 - b} = \\ & = \frac{(1 - b)(1 + b)(1 + b^2)(1 + b^4)(1 + b^8) \dots (1 + b^{2^n})}{1 - b} = \frac{1 - b^{2^{n+1}}}{1 - b}. \end{aligned}$$

Правая часть представляет сумму  $(2n + 1)$  членов геометрической прогрессии с первым членом равным 1 и знаменателем, равным  $b$ . Тогда имеем  $1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{2^n} = \frac{1 - b^{2^{n+1}}}{1 - b}$ .

Следовательно, равенство верно.

Что и требовалось доказать.

**Задача 14.** Доказать тождество  $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n + 1)}{2} \right)^2$ .

**Решение.**

Для доказательства тождества применим метод математической индукции.

1) Проверим справедливость тождества при  $n = 1$ :  $1 = \left( \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2} \right)^2$ ,  $1 = 1$ .

2) Предположим, что данное тождество справедливо при  $n = k > 1$ , т.е. верно равенство вида

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left( \frac{k(k + 1)}{2} \right)^2.$$

3) Докажем, что тождество справедливо при  $n = k + 1$ , т.е.

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = \left( \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \right)^2.$$

Используя индукционное предположение, в левой части тождества получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{k(k + 1)}{2} \right)^2 + (k + 1)^3 = (k + 1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = (k + 1)^2 \left( \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) = \\ & = (k + 1)^2 \left( \frac{k + 2}{2} \right)^2 = \left( \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Что требовалось доказать.

**Задача 15.** Вычислить значение выражения  $A$ , если  $A = \cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ$ .

**Решение.**

Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения.

$$\begin{aligned} A &= \cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ = \\ &= \cos(270^\circ - 10^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 50^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 20^\circ) = \\ &= -\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot (-\cos 20^\circ) = (\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ) \cdot \cos 20^\circ = \\ &= \{\text{по формуле произведения синусов}\} = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \left( \cos 40^\circ - \frac{1}{2} \right) \cos 20^\circ = \\ &= \frac{2 \cos 40^\circ - 1}{4} \cdot \cos 20^\circ = \frac{2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 20^\circ}{4} = \\ &= \{\text{по формуле произведения косинусов}\} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) - \cos 20^\circ}{4} = \frac{\cos 60^\circ}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ответ.  $A = \frac{1}{8}$ .

**Задача 16.** Найти значение выражения  $A$ , если  $A = \operatorname{tg} \left( \frac{5}{4} \pi + \frac{1}{4} \arccos \left( -\frac{4}{5} \right) \right)$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{5}{4} \pi + \frac{1}{4} \arccos \left( -\frac{4}{5} \right) \right) &= [\arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1] = \\ &= \operatorname{tg} \left( \frac{5}{4} \pi + \frac{1}{4} \cdot \left( \pi - \arccos \frac{4}{5} \right) \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{6\pi}{4} - \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right) = \\ &= \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right) = \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right) = \\ &= \left[ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right)} = \\ &= \left[ \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}; \right. \\ &= \frac{4}{5} \in [0; 1] \Rightarrow \arccos \frac{4}{5} \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \in \left( 0; \frac{\pi}{8} \right) = \\ &\left. \Rightarrow \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right) > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \left( \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{5} \right)} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right) \right)} - 1}} = \\ &= \left[ \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left( \frac{1 + \cos \left( \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right)}{2} \right)} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1 + \cos \left( \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right)} - 1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \frac{4}{5} \in [0;1] \Rightarrow \arccos \frac{4}{5} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \right. \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right) > 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \left. \vphantom{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right] = \\
&= \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos \frac{4}{5}\right)}{2}} = [\cos(\arccos a) = a, |a| \leq 1] = \right. \\
&= \sqrt{\frac{1+4/5}{2}} = \sqrt{\frac{9/5}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \left. \vphantom{\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3\sqrt{10}}{10}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{20}{10+3\sqrt{10}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{20-(10+3\sqrt{10})}{10+3\sqrt{10}}}} = \\
&= \sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{10-3\sqrt{10}} \cdot \frac{10+3\sqrt{10}}{10+3\sqrt{10}}} = \sqrt{\frac{(10+3\sqrt{10})^2}{10^2 - (3\sqrt{10})^2}} = \sqrt{\frac{(10+3\sqrt{10})^2}{100-90}} = \frac{10+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} + 3.
\end{aligned}$$

Ответ.  $\sqrt{10} + 3$ .

**Задача 17.** Вычислить значение выражения  $A$ , если

$$A = \arcsin \frac{24}{25} + \arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

**Решение.**

Пусть  $\arcsin \frac{24}{25} = a$ ,  $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\sin a = \frac{24}{25}$ ,  $\cos a > 0$ ;

$\arccos \frac{3}{5} = b$ ,  $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos b = \frac{3}{5}$ ,  $\sin b > 0$ .

Следовательно,  $\sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ .

Тогда,  $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{4}{3}$ ,  $a = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = \arccos \frac{3}{5} = b$ .

Т.к.  $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\sin a = \frac{24}{25}$ ,  $\sin(\pi - 2b) = \sin 2b = 2 \sin b \cos b = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ , то,  $\sin a = \sin(\pi - 2b)$ ,

$a = \pi - 2b$  и все выражение равно

$$A = \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{7}{25} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = a + b + b = \pi - 2b + b + b = \pi.$$

Ответ.  $A = \pi$ .

**Задача 18.** Доказать тождество  $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$ .

**Решение.**

Применим в левой части тождества формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и формулы обратных преобразований.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{\sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ} \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\cos 10^\circ - \cos 120^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 120^\circ} \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \\
&= \frac{\cos 10^\circ + \frac{1}{2}}{\cos 10^\circ - \frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{2 \sin 10^\circ \left( \cos 10^\circ + \frac{1}{2} \right)}{2 \sin 10^\circ \left( \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \right)} \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 20^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ - \sin 10^\circ} \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = \\
&= \frac{2 \sin 15^\circ \cos 5^\circ}{2 \cos 15^\circ \sin 5^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} = \operatorname{ctg} 5^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ.
\end{aligned}$$

Что требовалось доказать.

**Задача 19.** Доказать тождество  $\frac{2 \sin^2 2\alpha + 8 \sin^2 \alpha - 8}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha$ .

**Решение.**

Преобразуем левую часть тождества.

$$\begin{aligned} \frac{2(4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4(1 - \sin^2 \alpha))}{1 - 8 \sin^2 \alpha - (1 - 2 \sin^2 2\alpha)} &= \frac{2(4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha)}{1 - 8 \sin^2 \alpha - 1 + 2 \sin^2 2\alpha} = \frac{-8 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{-8 \sin^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{-8 \cos^4 \alpha}{-8 \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha, \quad \operatorname{ctg}^4 \alpha = \operatorname{ctg}^4 \alpha. \end{aligned}$$

Что требовалось доказать.

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 20.** Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{2}z + 1)^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}z}{(\sqrt[4]{z} - 1)^2 \left(z^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2 + 2(\sqrt[4]{z} - 1)\left(z^{\frac{2}{8}} + 1\right) + 1} - \frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ответ.  $2z$ .

**Задача 21.** Упростить выражение

$$\left( \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}} - \left( \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right) a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}.$$

Ответ. 1.

**Задача 22.** Упростить выражение

$$\left( \frac{1 - a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} \right)^2 - \frac{(a^2 + 2)^2}{a^3}.$$

Ответ. 0.

**Задача 23.** Доказать тождество  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

Указание. Для доказательства применить метод математической индукции.

**Задача 24.** Найти значение выражения  $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ .

Ответ.  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Задача 25.** Доказать тождеств  $\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}80^\circ - \operatorname{tg}60^\circ = 8 \sin 40^\circ$ .

**Задача 26.** Доказать тождество  $\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}35^\circ = \operatorname{tg}5^\circ$ .

Указание. Привести тождество к виду  $\operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}35^\circ = \operatorname{tg}5^\circ \cdot \operatorname{ctg}15^\circ$  и преобразовать произведения синусов и косинусов в суммы.

### 1.3. Последовательности. Прогрессии

**Задача 27.** Найти сумму первых 19 членов арифметической прогрессии, если  $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$ .

**Решение.**

Если  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — члены арифметической прогрессии, то  $a_k = a_1 + (k-1)d$ , где  $d$  — разность прогрессии, и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} &= (a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 15d) = \\ &= 4a_1 + 36d = 4(a_1 + 9d). \end{aligned}$$

По условию  $4(a_1 + 9d) = 224$ , то есть,  $a_1 + 9d = 224/4 = 56$ .

$$S_{19} = \frac{2a_1 + (19-1)d}{2} \cdot 19 = (a_1 + 9d) \cdot 19 = 56 \cdot 19 = 1064.$$

Ответ. 1064.

**Задача 28.** С помощью арифметической прогрессии найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

**Решение.**

Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью  $d = 6$ . Общий член прогрессии определяется по формуле  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ , и, так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1) \cdot 6 \leq 999, \quad n \leq 1 + \frac{999-102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150.5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму,  $n = 150$ .

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 102 + 149 \cdot 6}{2} \cdot 150 = 82305.$$

*Ответ.* 82305.

**Задача 29.** Три числа (третье из которых равно 12), образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

**Решение.**

Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа  $(a, b, c)$  образуют геометрическую прогрессию, то  $ac = b^2$ ; если три числа  $(a, b, c)$  образуют арифметическую прогрессию, то  $a + c = 2b$ .

Обозначим  $x$  и  $y$  – первые два числа. Тогда получим

$$\begin{cases} 12x = y^2, \\ x + 9 = 2y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем:  $x = 2y - 9$ .

Подставляя  $x$  в первое уравнение, получим  $(2y - 9)12 = y^2$ ,  $y^2 - 24y + 108 = 0$ ,  $y_1 = 18$ ,  $y_2 = 6$ .

Тогда,  $x_1 = 27$ ,  $x_2 = 3$ .

*Ответ.* Две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12;  
две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9.

**Задача 30.** Решить уравнение  $x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \dots}}} = 16$ .

**Решение.**

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Перепишем левую часть уравнения в виде

$$x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \dots}}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \dots = x^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $\left(q = \frac{1}{2}\right)$  имеем

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Получим уравнение  $x^2 = 16$ , откуда, учитывая ОДЗ,  $x = 4$ .

*Ответ.*  $x = 4$ .

**Задача 31.** Один из углов треугольника равен  $120^\circ$ , а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

**Решение.**

Обозначим длины сторон треугольника в порядке возрастания через  $a$ ,  $a + d$ ,  $a + 2d$ . Тогда наибольшая сторона расположена против наибольшего угла треугольника, равного  $120^\circ$  (см. рис.1).

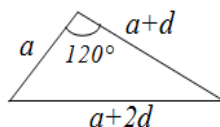


Рис.1

Применим теорему косинусов:  $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2 - 2a(a + d)\cos 120^\circ$ ,



$$(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2 + 2a(a+d) \cdot \frac{1}{2},$$

$$a^2 + 4ad + 4d^2 = a^2 + a^2 + 2ad + d^2 + a^2 + ad,$$

$$a^2 + 4ad + 4d^2 = 3a^2 + 3ad + d^2,$$

$$2a^2 - ad - 3d^2 = 0.$$

Разделив на  $d^2$ , ( $d^2 \neq 0$ ), получим

$$2\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \left(\frac{a}{d}\right) - 3 = 0.$$

Учитывая, что  $a > 0$ ,  $d > 0$ , получим  $\frac{a}{d} = \frac{3}{2}$ .

Тогда имеем  $a = \frac{3}{2}d$ ,  $a + d = \frac{3}{2}d + d = \frac{5}{2}d$ ,  $a + 2d = \frac{3}{2}d + 2d = \frac{7}{2}d$ .

Найдем отношение длин сторон треугольника:

$$a : (a + d) : (a + 2d) = \frac{3}{2}d : \frac{5}{2}d : \frac{7}{2}d,$$

$$a : (a + d) : (a + 2d) = 3 : 5 : 7.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все треугольники, длины сторон которых относятся как  $3 : 5 : 7$ .

*Ответ.* Все треугольники, длины сторон которых относятся как  $3 : 5 : 7$ .

**Задача 32.** Найти значение выражения  $A$ , если

$$A = (4\sqrt{3} + 8) \left( \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{3} \dots \right).$$

**Решение.**

$$A = (4\sqrt{3} + 8) \left( \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{3} \dots \right) = 4(\sqrt{3} + 2) (\sqrt{3} - 2) \left( \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots \right).$$

Заметим, что выражение  $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$  является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$$\text{Тогда } \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Следовательно,

$$A = 4(\sqrt{3} + 2) (\sqrt{3} - 2) \left( \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \right) = 4 \cdot (3 - 4) \cdot \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2} = -6(\sqrt{3} + 1).$$

*Ответ.*  $A = -6(\sqrt{3} + 1)$ .

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 33.** Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого члена. Сколько процентов от первого составляет пятый член этой прогрессии?

*Ответ.* 52%.

**Задача 34.** Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от первого числа отнять единицу, а от третьего отнять 19, то новая тройка чисел составляет арифметическую прогрессию. Найти первоначальные числа.

*Ответ.* 5; 15; 45.

**Задача 35.** Найти количество членов арифметической прогрессии, сумма которой равна 36, если ее первый член равен 4, а последний 5.

*Ответ.* 8.

**Задача 36.** Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти острые углы этого треугольника.

$$\text{Ответ. } \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \arccos \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

**Задача 37.** В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий – на  $\frac{1}{2}$  очка больше, чем за предыдущий промах. Определить, сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков.

Ответ. 21.

**Задача 38.** Решить уравнение  $x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \dots}}} = 64$ .

Ответ.  $x = 16$ .

## 2. Уравнения и системы уравнений

### 2.1. Алгебраические уравнения и системы уравнений

**Задача 39.** Доказать, что уравнение  $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$  не имеет решений.

**Решение.**

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x^2 - 24x + 24 = \\ &= (x^2 - 2x)^2 + 8(x^2 - 3x + 3) = (x^2 - 2x)^2 + 8((x - 1.5)^2 + 0.75) = \\ &= (x^2 - 2x)^2 + 8(x - 1.5)^2 + 6 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать.

**Задача 40.** Решить уравнение  $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = 0$ .

**Решение.**

Разложим левую часть уравнения на множители, представив её в виде:

$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ , где  $a, b, c, d$  определяются методом неопределённых коэффициентов. Тогда получим

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Одно из решений системы (находить все её решения не обязательно):

$$\begin{cases} a + c = 8, \\ b + d + ac = 18, \\ ad + bc = 11, \\ bd = 2. \end{cases}$$

Находим неизвестные коэффициенты (все положительные и целые):  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 1$ .

Значит,  $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = (x^2 + 5x + 2)(x^2 + 3x + 1)$ .

Данное уравнение равносильно двум уравнениям:

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ или } x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Отсюда получим:  $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ ,  $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$$\text{Ответ. } x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}, x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**Задача 41.** Решить уравнение  $\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) = (x - 1) \cdot (x - 2)$ .

**Решение.**

Область определения уравнения  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Приводя к общему знаменателю выражение в левой части уравнения, получим:

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^2 - 4}{x}\right) = (x - 1) \cdot (x - 2),$$

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \cdot \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} = (x - 1) \cdot (x - 2),$$

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2),$$

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) - x^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0,$$

$$(x-1) \cdot (x-2) \left( (x+1)(x+2) - x^2 \right) = 0.$$

Корни этого уравнения равны:  $x=1$ ,  $x=2$ .

Другие корни определяются из уравнения  $(x+1) \cdot (x+2) = x^2$ ,  $x^2 + 3x + 2 = x^2$ ,  $3x + 2 = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ .

Ответ.  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $x=-\frac{2}{3}$ .

**Задача 42.** Решить уравнение  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$ .

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-6 \geq 0; \end{cases} \cdot x \in [6; \infty).$$

Не нарушая тождественности преобразований при возведении в квадрат, перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6},$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (2 + \sqrt{x-6})^2,$$

$$x+2 = 4 + 4\sqrt{x-6} + x-6,$$

$$\sqrt{x-6} = 1,$$

$$x-6 = 1,$$

$$x = 7.$$

Выполним проверку:  $\sqrt{7+2} - \sqrt{7-6} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$ ;  $2 \equiv 2$ .

Ответ.  $x=7$ .

**Задача 43.** Решить уравнение  $\sqrt{|x^2 - 3x + 2|} = 2x + 1$ .

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } 2x + 1 \geq 0, \quad x \geq -\frac{1}{2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:  $|x^2 - 3x + 2| = (2x + 1)^2$ .

Рассмотрим два случая.

Случай 1.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ,  $(x-2)(x-1) \geq 0$ ,  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$ .

Тогда имеем  $x^2 - 3x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$ ,  $3x^2 + 7x - 1 = 0$ ,  $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{61}}{6}$ .

С учетом ОДЗ получим корень  $x = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}$ .

Случай 2.  $x^2 - 3x + 2 < 0$ ,  $x \in (1; 2)$ .

Тогда  $-x^2 + 3x - 2 = 4x^2 + 4x + 1$ ,  $5x^2 + x + 3 = 0$ . Это уравнение корней не имеет.

Ответ.  $x = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}$ .

**Задача 44.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\left| \frac{4 - |x|}{|x| - 1} \right| = a$  имеет ровно 4 кор-

ня.

**Решение.**

Определим возможные значения параметра  $a$  и переменной  $x$ :

$$\left| \frac{4 - |x|}{|x| - 1} \right| = a, \quad |x| \neq 1, \quad |x| \neq 0, \quad a > 0. \quad (*)$$

Используя свойство модуля, получим совокупность уравнений:

$$\begin{cases} 4 - |x| = a|x| - a, & |x|(1 + a) = 4 + a, & |x| = \frac{4 + a}{1 + a}, \\ 4 - |x| = -a|x| + a; & |x|(1 - a) = 4 - a; & |x| = \frac{4 - a}{1 - a}; \end{cases}$$

Отсюда получим 4 решения системы:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{4 + a}{1 + a}, \\ x = \pm \frac{4 - a}{1 - a}; \end{cases}$$

Проверим выполнение условий (\*)

$$\begin{cases} a > 0, \\ \frac{4 + a}{1 + a} > 0, \\ \frac{4 - a}{1 - a} > 0. \end{cases}$$

Решая каждое неравенство методом интервалов (см. рис.2), получим



Рис. 2

$$\begin{cases} a > 0, \\ a > -1, \\ a < 4. \end{cases}$$

Т.о.,  $a > 4$ .

Ответ.  $a > 4$ .

**Задача 45.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0, \\ x^3 + y^3 = 65. \end{cases}$$

**Решение.**

Первое уравнение системы однородное. Разделим его почленно на  $y^2$ . При этом решение  $(0;0)$  первого уравнения системы, но не удовлетворяет второму уравнению.

Получим  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 4 = 0$ . Полагая  $\frac{x}{y} = t$ , получим  $t^2 - 3t - 4 = 0$ ,  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -1$ .

Пусть  $t = 4$ , т.е.  $x = 4y$ . Из второго уравнения системы имеем:  $64y^3 + y^3 = 65$ ,  $65y^3 = 65$ ,  $y^3 = 1$ ;  $y = 1$ ,  $x = 4$ .

Пусть  $t = -1$ , т.е.  $x = -y$ . В этом случае второе уравнение решения не имеет.

Ответ.  $x = 4$ ,  $y = 1$ .

**Задача 46.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

**Решение.**

Считаем первое уравнение системы квадратным относительно неизвестной  $x$ . Перепишем его в виде:  $2x^2 - (7y - 13)x + 3y^2 - 4y - 7 = 0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} D &= (7y - 13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - 4y - 7) = 49y^2 - 182y + 169 - 24y^2 + 32y + 56 = \\ &= 25y^2 - 150y + 225 = (5y - 15)^2. \end{aligned}$$

$$x = \frac{7y-13-5y+15}{4} = \frac{2y+2}{4} = \frac{y+1}{2} \text{ или } x = \frac{7y-13+5y-15}{4} = \frac{12y-28}{4} = 3y-7.$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y+1), \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \\ x = 3y-7, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Решим первую систему.

$$\text{Если } x = \frac{1}{2}(y+1), \text{ то } \frac{1}{4}(y+1)^2 + \frac{1}{2}y(y+1) + y^2 - 3 = 0.$$

$$y^2 + 2y + 1 + 2y^2 + 2y + 4y^2 - 12 = 0,$$

$$7y^2 + 4y - 11 = 0, \quad (7 + 4 - 11 = 0),$$

$$y_1 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1;$$

$$y_2 = -\frac{11}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{7} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{7}.$$

Решим вторую систему.

$$\text{Если } x = 3y-7, \text{ то } (3y-7)^2 + y(3y-7) + y^2 - 3 = 0.$$

$$13y^2 - 49y + 46 = 0, \quad (D = 49^2 - 4 \cdot 13 \cdot 46 = 2401 - 2392 = 9),$$

$$y_3 = \frac{49-3}{26} = \frac{23}{13}, \quad x_3 = 3 \cdot \frac{23}{13} - 7 = -\frac{22}{13};$$

$$y_4 = \frac{49+3}{26} = 2, \quad x_4 = 3 \cdot 2 - 7 = -1.$$

$$\text{Ответ. } (1;1), (-1;2), \left(-\frac{2}{7}; -\frac{11}{7}\right), \left(-\frac{22}{13}; \frac{23}{13}\right).$$

**Задача 47.** Найти в зависимости от значений параметра  $a$  наименьший корень уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2 x - 2a(a+1)^2 = 0.$$

**Решение.**

Преобразуем уравнение.

$$x^2(x+2a) - (a+1)^2(x+2a) = 0,$$

$$(x+2a)(x^2 - (a+1)^2) = 0,$$

$$(x+2a)(x-a-1)(x+a+1) = 0.$$

Корни этого уравнения равны:  $x_1 = -2a$ ,  $x_2 = -a-1$ ,  $x_3 = a+1$ .

Найдем значения параметра  $a$ , при которых наименьшим корнем является  $x_1 = -2a$ .

Для этого решим систему:

$$\begin{cases} -2a < a+1, & \begin{cases} -3a < 1, \\ -2a < -a-1; \end{cases} & \begin{cases} a > -\frac{1}{3}, \\ a > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда получим,  $a > 1$ .

Найдем значения параметра  $a$ , при которых наименьшим корнем является  $x_2 = -a-1$ .

Решим систему:

$$\begin{cases} -a-1 < a+1, & \begin{cases} -2a < 2, \\ -a-1 < -2a; \end{cases} & \begin{cases} a > -1, \\ a < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда получим,  $-1 < a < 1$ .

Найдем значения параметра  $a$ , при которых наименьшим корнем является  $x_3 = a+1$ .

Решим систему:

$$\begin{cases} a+1 < -a-1, \\ a+1 < -2a; \end{cases} \begin{cases} 2a < -2, \\ 3a < -1; \end{cases} \begin{cases} a < -1, \\ a < -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отсюда получим,  $a < -1$ .

Ответ.  $x = a + 1$  при  $a < -1$ ,  
 $x = -a - 1$  при  $-1 < a < 1$ ,  
 $x = -2a$  при  $a > 1$ .

**Задача 48.** Действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $a$  таковы, что выполняется следующая система равенств:

$$\begin{cases} x + y = a + 1, \\ xy = a^2 - 7a + 16. \end{cases} \quad \text{Найти при каком значении параметра } a \text{ сумма } x^2 + y^2 \text{ принимает наибольшее значение.}$$

**Решение.**

Итак, имеем

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (a + 1)^2 - 2(a^2 - 7a + 16) = -a^2 + 16a - 31 = -(a - 8)^2 + 33.$$

Отсюда получим, что при  $a = 8$  сумма  $x^2 + y^2$  принимает наибольшее значение, равное 33.

Далее, учитывая условие существования действительных корней, удовлетворяющих заданной системе равенств, решив систему относительно неизвестной  $x$ :

$$x^2 - (a + 1)x + a^2 - 7a + 16 = 0,$$

$$D = (a + 1)^2 - 4(a^2 - 7a + 16) = -3a^2 + 30a - 63,$$

$$-3a^2 + 30a - 63 \geq 0,$$

Отсюда получим,  $3 \leq a \leq 7$ .

На промежутке  $3 \leq a \leq 7$  функция  $f(a) = -(a - 8)^2 + 33$  возрастает и наибольшее значение достигает при  $a = 7$  и равно 32.

Ответ.  $a = 7$ .

**Задача 49.** Найти значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(7 + a), \\ (x + y)^2 = 50 \end{cases}$  имеет

ровно два решения.

**Решение.**

Построим график функции, описываемой вторым уравнением.

Это две прямые:  $|x + y| = \sqrt{50}$ ,  $x + y = \pm\sqrt{50}$ ,

$$\begin{cases} y = -x + \sqrt{50}, \\ y = -x - \sqrt{50}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы описывает окружность с радиусом  $R = \sqrt{2(7 + a)}$ ,  $a > -7$ , и центром в точке  $O(0;0)$ .

Исходная система имеет равно два решения, если графики функций будут иметь две общие точки, т.е. обе прямые будут касаться окружности (рис.3). Тогда расстояние от начала координат до каждой прямой равно радиусу окружности. Так как прямые отсекают в первой и третьей четвертях прямоугольные равнобедренные треугольники, то точки касания – середины гипотенуз прямоугольных треугольников (точки  $A$  и  $B$ ).

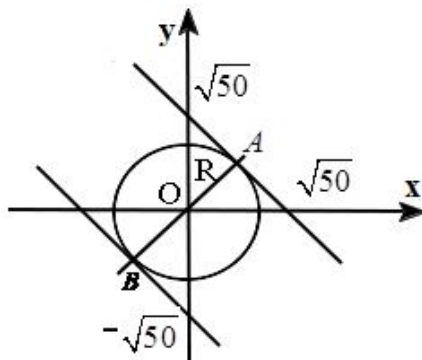


Рис. 3

Найдем координаты точки:  $A\left(\frac{\sqrt{50}}{2}; \frac{\sqrt{50}}{2}\right)$ .

$$R = |OA| = \sqrt{2(7+a)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2},$$

$$\sqrt{2(7+a)} = 5,$$

$$7+a = 12,5;$$

$$a = 5,5.$$

Ответ.  $a = 5,5$ .

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 50.** Решить уравнение  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 5$ .

Ответ.  $-1; 3$ .

**Задача 51.** Решить уравнение  $x^2 - 5 + \frac{2x^2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$ .

Ответ.  $-3$ .

**Задача 52.** Решить уравнение  $\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$ .

Ответ.  $28$ .

**Задача 53.** Решить уравнение  $\sqrt[3]{x-2} + 2\sqrt[3]{(x-2)^2} = 3$ .

Ответ.  $x_1 = 3, x_2 = -11/8$ .

**Задача 54.** Решить уравнение  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ .

Ответ.  $x = 1$ .

**Задача 55.** Решить уравнение  $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$ .

Ответ.  $x_1 = -7/2, x_2 = 2$ .

**Задача 56.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – различные корни уравнения  $3x^2 + 2x + a - 1 = 0$ . Найти все значения параметра  $a$ , при которых выполнено неравенство  $-1 \leq x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \leq 2$ .

Ответ.  $-10/3 \leq a < 4/3$ .

**Задача 57.** Решить уравнение  $(x+1)(x+2)(x+3) = x(x^2 - 4)$ .

Ответ.  $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}$ .

**Задача 58.** Решить уравнение  $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x} = 2$ .

Ответ.  $x = 0$ .

**Задача 59.** Найти значения параметра  $a$ , при которых один из корней уравнения  $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$  был квадратом другого.

Ответ.  $-\frac{125}{8}; \frac{27}{8}$ .

**Задача 60.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} xy + x + y = -1, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$

Ответ.  $\{(-1; -1), (-1; 2), (2; -1)\}$ .

**Задача 61.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

Ответ.  $\{(27, 1), (-1, -27)\}$ .

**Задача 62.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 7, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } \left\{ \left( 0; \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \right), \left( \pm 2\sqrt{\frac{7}{10}}; \pm \sqrt{\frac{7}{10}} \right) \right\}.$$

**Задача 63.** Найти значения параметра  $a$ , при которых система  $\begin{cases} 2x + (a-1)y = 3, \\ (a+1)x + 4y = -3 \end{cases}$  имеет бесконечное множество решений.

*Ответ.  $a = -3$ .*

**Задача 64.** Найти значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(10+a), \\ (x+y)^2 = 50 \end{cases}$  имеет ровно два решения.

*Ответ. 2,5.*

## 2.2. Тригонометрические уравнения и системы уравнений

**Задача 65.** Решить уравнение  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$ .

**Решение.**

ОДЗ уравнения  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$  определяется неравенствами:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x \neq \pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть уравнения.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^4 x - 1 + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(\cos^2 x - 1) + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{4}{\sin^2 2x}. \end{aligned}$$

Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при  $\sin^2 2x = 1$ .

Тогда имеем  $2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен  $2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x = 2 - (16x^2 - 8\pi x + \pi^2) = 2 - (4x - \pi)^2$  и достигает наибольшего значения, равного 2, при  $(4x - \pi)^2 = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Сравнивая полученные результаты, получим, что равенство левой и правой частей уравнения возможно только при значении  $x = \frac{\pi}{4}$ .

*Ответ.  $x = \frac{\pi}{4}$ .*

**Задача 66.** Решить уравнение  $2|\sin x| \cos(2\pi - x) = \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$ .

**Решение.**

Воспользуемся формулами приведения и равенством  $\sin^2 x = |\sin x|^2$ .

$$2|\sin x| \cos x = \sin^2 x,$$

$$2|\sin x| \cos x = |\sin x|^2,$$

$$|\sin x| = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x = |\sin x|.$$

Если  $|\sin x| = 0$ , то  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

При  $\sin x \geq 0$  имеем  $2\cos x = \sin x$ ,  $\operatorname{tg} x = 2$ ,  $x = \arctg 2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



Учитывая, что  $\sin x \geq 0$ , то  $x = \arctg 2 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Аналогично, при  $\sin x < 0$  имеем  $2\cos x = -\sin x$ ,  $\tg x = -2$ ,  $x = -\arctg 2 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (учитывая, что  $\sin x < 0$ ).

Ответ.  $x_1 = \pi n$ ,  $x_2 = \pm \arctg 2 + 2\pi k$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 67.** Найти корни уравнения 
$$\frac{\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0.$$

**Решение.**

ОДЗ:  $4\pi^2 - x^2 > 0$ ,  $x \in (-2\pi; 2\pi)$ .

Решим уравнение.

$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2 = 0,$$

$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2.$$

$$\text{Учитывая, что } \cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) = \cos\left(x + 10\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{получим уравнение: } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2.$$

Сумма значений тригонометрических функций, косинуса и синуса, равна  $-2$  только при минимальных значениях данных функций, т.е.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$  и  $\sin 2x = -1$ , тогда имеем

$$\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin 2x = -1; \end{cases} \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определим значения корней  $x \in (-2\pi; 2\pi)$ :

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ при } k = -1, k = 0; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z}, \text{ при } l = -1, l = 0, l = 1, l = 2. \end{cases}$$

$$\text{Т.е. это корни } \begin{cases} x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}, \\ x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет два корня  $x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$ .

$$\text{Ответ. } x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

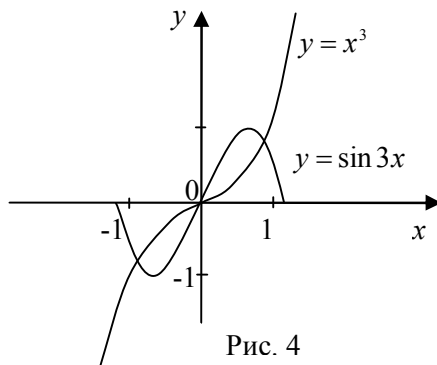
**Задача 68.** Определить количество корней уравнения  $\sin 3x = x^3$ .

**Решение.**

Построим графики левой и правой частей уравнения  $x^3 = \sin 3x$  (рис. 4).

Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно начала координат точках.

Так как функция  $y = x^3$  является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция  $y = \sin 3x$  ограничена и периодична (ее период  $T = \frac{2\pi}{3}$ ), других точек пересечения графиков функций нет.



Ответ: 3.

**Задача 69.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x. \end{cases}$$

**Решение.**

Из второго уравнения системы следует, что  $\cos x \geq 0$ , тогда получим:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем  $\sin x + \cos x = 1$ ,

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = 1,$$

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $n = 2k$ , то  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ . Откуда  $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Если  $n = 2k + 1$ , то  $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$ . Откуда  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Подставляя найденные значения  $x$  в первое уравнение системы, найдем неизвестное  $y$ .

Если  $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то  $1 + \cos y = 0$ ,  $\cos y = -1$ ,  $y_1 = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

Если  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то  $\cos y = 1$ ,  $y_2 = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$ .

Следовательно, исходная система имеет два решения:

$$(2\pi k; \pi + 2\pi m) \text{ и } \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l \right), k, m, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } (2\pi k; \pi + 2\pi m), \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l \right), k, m, l \in \mathbb{Z}.$$

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 70.** Решить уравнение  $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x = 0$ .

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

**Задача 71.** Решить уравнение  $\cos^3 x - \cos x = \sin 2x$ .

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**Задача 72.** Решить уравнение  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ .

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{\pi k}{2}, x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

**Задача 73.** Решить уравнение  $\sin 2x + \sin x = \cos x - \cos 2x$ .

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

**Задача 74.** Найти все корни уравнения  $(\sin 2x + \cos 2x + 1) \cdot \sqrt{(\pi - x) \left( \frac{\pi}{2} + x \right)} = 0$ .

$$\text{Ответ. } \left\{ -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi \right\}.$$

**Задача 75.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

**Задача 76.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } \begin{cases} x = 2\arctg(\sqrt{3} + 2) + 2\pi k, \\ y = \frac{2\pi}{3} - 2\arctg(\sqrt{3} + 2) - 2\pi k; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \frac{\pi}{3} - 2\pi n; \quad k, n \in Z. \end{cases}$$

### 2.3. Показательные и логарифмические уравнения и системы уравнений

*Замечание.* При решении логарифмических и показательных уравнений необходимо найти область допустимых значений и сделать проверку.

**Задача 77.** Решить уравнение  $\left( \sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4} \right)^x = \frac{27}{2}$ .

**Решение.** ОДЗ:  $x \in R$ .

Преобразуем уравнение.

$$\left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2^2} \right)^x = \frac{27}{2}, \quad \left( \frac{1+2}{\sqrt[3]{2}} \right)^x = \frac{27}{2}, \quad \left( \frac{27}{2} \right)^{\frac{x}{3}} = \frac{27}{2}, \quad x = 3.$$

$$\text{Ответ. } x = 3.$$

**Задача 78.** Решить уравнение  $\log_3(x - 2) = 1 - \log_3 x$ .

**Решение.**

ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad x \in (2; +\infty).$$

Тогда имеем  $\log_3(x - 2) + \log_3 x = \log_3 3$ ,

$$\log_3(x - 2)x = \log_3 3,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Очевидно, что  $x_2 = -1 \notin (2; +\infty)$ , т.е. ОДЗ.

*Проверка.* Подставляем  $x_1 = 3$  в левую и правую части уравнения по отдельности:

$$\log_3(3 - 2) = 0; \quad 1 - \log_3 3 = 1 - 1 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

$$\text{Ответ. } x = 3.$$

**Задача 79.** Решить уравнение  $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$ .

**Решение.**

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x \neq 0; \end{cases} x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Запишем уравнение в виде  $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$ .

Т.к. показательная функция строго монотонна, данное уравнение эквивалентно уравнению:

$$\frac{3}{\log_3 x} = -6, \quad \log_3 x = -\frac{1}{2}, \quad x = 3^{-\frac{1}{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ. } x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Задача 80.** Решить уравнение  $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}} (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$ .

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } 5x^2 - 2x - 3 > 0, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty).$$

Упростим левую часть уравнения, заменив основание  $\frac{1}{6}$  на 6, и избавимся от корня, получим

$$\frac{1}{2} x^2 \log_6 (5x^2 - 2x - 3) + x \log_6 (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x,$$

$$\log_6 (5x^2 - 2x - 3) \left( \frac{1}{2} x^2 + x \right) - (x^2 + 2x) = 0,$$

$$(x^2 + 2x) \left( \frac{1}{2} \log_6 (5x^2 - 2x - 3) - 1 \right) = 0,$$

$$(x^2 + 2x) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \log_6 (5x^2 - 2x - 3) - 1 = 0.$$

Следовательно, для уравнения  $(x^2 + 2x) = 0$  корнями являются  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ .

Из уравнения  $\log_6 (5x^2 - 2x - 3) = 2$ ,  $5x^2 - 2x - 39 = 0$  имеем  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -\frac{13}{5}$ .

Учитывая ОДЗ, окончательно получим  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -\frac{13}{5}$ .

$$\text{Ответ. } x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -\frac{13}{5}.$$

**Задача 81.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y+7) + 0,5x^3 = \frac{6x \cdot \ln(y+7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1. \end{cases}$$

**Решение.**

ОДЗ.  $y+7 > 0$ ,  $y > -7$ .

Проведем преобразования системы.

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y+7) + 0,5x^3 = \frac{6x \cdot \ln(y+7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y+7) + 0,5x^3 = 6x \cdot \log_{27} (y+7) + x^2, \\ x^2(y+7) - 4x(y+7) + 3(y+7) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) - 2x \cdot \log_3(y+7) = -0,5x^3 + x^2, \\ x^2(y+7) - 4x(y+7) + 3(y+7) + 1 = 0; \\ \begin{cases} (x^2 - 2x)\log_3(y+7) = -0,5x^2(x-2), & x(x-2)(\log_3(y+7) + 0,5x) = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; & (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x = 0, \\ 3(y+7) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y + 7 = -\frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -7\frac{1}{3}; \end{cases}$$

Не входит в ОДЗ.

$$2) \begin{cases} x - 2 = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ -(y+7) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ y + 7 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -6; \end{cases}$$

(2; -6).

$$3) \begin{cases} \log_3(y+7) + 0,5x = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3^{-0,5x} - 7, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3^{-0,5x} - 7, \\ 3^{-0,5x}(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

$$3^{0,5x} = -x^2 + 4x - 3,$$

$$3^{\frac{x}{2}} = -(x-2)^2 + 1.$$

Графики функций  $f_1(x) = 3^{\frac{x}{2}}$ ,  $f_2(x) = -(x-2)^2 + 1$  не пересекаются (рис. 5), т.е. данная система решений не имеет.

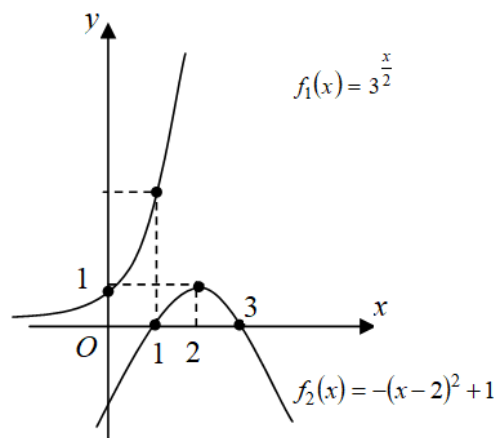


Рис. 5

Т.о. система уравнений имеет одно решение (2; -6).

Ответ. (2; -6).

#### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 82.** Решить уравнение  $3^{\sqrt{x}+1} - 2 \cdot 5^{\sqrt{x}-2} = 5^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$ .

Ответ.  $x = 9$ .

**Задача 83.** Решить уравнение  $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 = 0$ .

Ответ.  $x = 0,5$ .

**Задача 84.** Решить уравнение  $\lg(x+1) - \frac{1}{2}\lg(5x-1) = \frac{1}{2}\lg x$ .

Ответ.  $x = 1$ .

**Задача 85.** Решить уравнение  $\log_2(x-3) + \log_2(3+x) = 4$ .

Ответ.  $x = 5$ .

**Задача 86.** Решить уравнение  $\lg(3x-1) - \frac{1}{2}\lg(x+1) = \frac{1}{2}\lg(x+13)$ .

Ответ. 3.

**Задача 87.** Решить уравнение  $\lg 5^{\frac{(2x-8)x}{5}} = \lg 25$ .

Ответ.  $x_1 = 5, x_2 = -1$ .

**Задача 88.** Решить систему  $\begin{cases} x^y = 9; \\ (324)^{\frac{1}{y}} = 2x^2. \end{cases}$

Ответ.  $(3, 2)$ .

**Задача 89.** Решить систему  $\begin{cases} 7^y \log_5 x = -14; \\ 7^y + \log_5 x = 5. \end{cases}$

Ответ.  $x = \frac{1}{25}, y = 1$ .

### 3. Неравенства

#### 3.1. Алгебраические неравенства

**Задача 90.** Решить неравенство:  $\sqrt{x^2 - x} > 1 + x$ .

**Решение.**

Для решения неравенства  $\sqrt{x^2 - x} > 1 + x$  найдем область определения, т.е.

$x^2 - x \geq 0, x(x-1) \geq 0, x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$  (рис. 6).

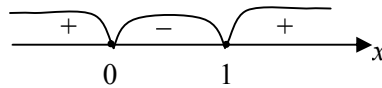


Рис. 6

Заметим, что арифметическое значение квадратного корня  $\sqrt{x^2 - x}$  всегда неотрицательно; следовательно, при отрицательной правой части решением неравенства будет любое  $x$  из ОДЗ:

$$\begin{cases} 1+x < 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad x < -1. \\ \begin{cases} 1+x < 0, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x \leq 0; \end{cases} \end{cases}$$

При условии, что правая часть неотрицательна, возведем обе части неравенства в квадрат.

$$\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x^2 - x > (1+x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x^2 - x > x^2 + 2x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ -1 > 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < -\frac{1}{3}; \end{cases} \quad x \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right).$$

Объединим полученные результаты, тогда имеем  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ .

Ответ.  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Задача 91.** Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$ .

**Решение.**

ОДЗ:  $\begin{cases} x+2\sqrt{x-1} > 0, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \quad x+2\sqrt{x-1} > 0, x \geq 1.$

Выполним преобразование левой части неравенства.

$$\frac{1}{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}} > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}} > 2,$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|} > 2,$$

Обозначая  $\sqrt{x-1} = t, t > 0, t \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$ , тогда получим

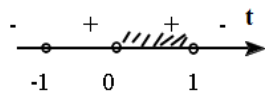
$$\frac{1}{|t+1|} + \frac{1}{|t-1|} > 2,$$

$$\frac{|t-1| + |t+1| - 2 \cdot |t+1| \cdot |t-1|}{|t+1| \cdot |t-1|} > 0,$$

Учитывая ОДЗ, решим неравенство на двух промежутках.

1.  $0 < t < 1$ .

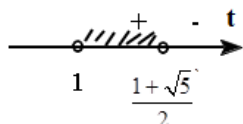
$$\frac{-t+1+t+1-2(-t+1)(t+1)}{(-t+1)(t+1)} > 0, \quad \frac{2t^2}{(-t+1)(t+1)} > 0.$$



Таким образом,  $0 < t < 1$ .

2.  $t > 1$ .

$$\frac{t-1+t+1-2(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)} > 0, \quad \frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+1)} > 0, \quad \frac{-\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(t-1)(t+1)} > 0.$$



Таким образом, решением неравенства будет промежуток  $1 < t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим совокупность неравенств:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < \sqrt{x-1} < 1, \\ 0 < \sqrt{x-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} 0 < x-1 < 1, \\ 0 < x-1 < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2; \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ 1 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$$

Таким образом, имеем  $x \in (1; 2) \cup \left(1; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Ответ.  $(1; 2) \cup \left(1; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

**Задача 92.** При каком значении параметра  $a$  длина отрезка, являющегося областью решений неравенства  $x^2 - 4 \leq a$ , равна 6?

**Решение.**

Запишем неравенство  $x^2 - 4 \leq a$  в виде  $x^2 \leq a + 4$ .

ОДЗ:  $a + 4 \geq 0$ ,  $a \geq -4$ .

Тогда имеем  $|x| \leq \sqrt{a+4}$ ,  $-\sqrt{a+4} \leq x \leq \sqrt{a+4}$ .

Отсюда длина отрезка, являющегося областью решений неравенства  $x^2 - 4 \leq a$ , равна  $2\sqrt{a+4}$ .

Следовательно,  $2\sqrt{a+4} = 6$ ,  $a + 4 = 9$ ,  $a = 5$ .

Ответ.  $a = 5$ .

**Задача 93.** Доказать, что при любом натуральном  $n$ ,  $n > 1$ , справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

**Решение.**

Докажем неравенство методом математической индукции.

При  $n = 2$  неравенство очевидно:  $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ .

Предположим, что исходное неравенство имеет место при  $n = k$ , то есть  $\sqrt{k} < S_k < 2\sqrt{k}$ , где  $S_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Докажем теперь, что  $\sqrt{k+1} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1}$ , где  $S_{k+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ .

Имеем:  $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ,

$S_{k+1} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ , так как  $\sqrt{k^2 + k} > k$ ,

$S_{k+1} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ , так как  $2\sqrt{k^2 + k} < 2k + 1$ .

Таким образом,  $\sqrt{k+1} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1}$ .

Следовательно, двойное неравенство доказано для любого  $n > 1$ .

*Что и требовалось доказать.*

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 94.** Найти наибольшее значение  $x$ , удовлетворяющее двойному неравенству

$$x^2 + 7x + 11 \leq -1 \leq \frac{1}{x}.$$

*Ответ.*  $x = -3$ .

**Задача 95.** Решить неравенство  $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-3} > 1$ .

*Ответ.*  $(2; 3)$ .

**Задача 96.** Решить неравенство  $\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2 - x} < x^2$ .

*Ответ.*  $(-\infty; -2) \cup [-1; 1)$ .

**Задача 97.** Решить неравенство  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |5x + 3| \leq 7$ .

*Ответ.*  $x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right)$ .

**Задача 98.** Найти наименьшее значение  $x$ , удовлетворяющее двойному неравенству

$$\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x - 1} \leq \sqrt{x^2 - 13}.$$

*Ответ.*  $x = 4$ .

**Задача 99.** Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}}} > 2$ .

*Ответ.*  $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5 + \sqrt{5}}{4}\right)$ .

**Задача 100.** Найти решения неравенства  $x^2 - (a + 1)x + a \geq 0$  при разных значениях параметра  $a$ .

*Ответ.* При  $a < 1$ ,  $x \in (-\infty, a] \cup [1, \infty)$ ;

при  $a > 1$ ,  $x \in (-\infty, 1] \cup [a, \infty)$ ;

при  $a = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Задача 101.** Найти все значения параметра  $k$ , при которых неравенство  $x^2 + 2kx + |2k + 3| > 0$  верно для всех значений  $x$ .

*Ответ.*  $-1 < k < 3$ .

### 3.2. Тригонометрические, логарифмические и показательные неравенства

**Задача 102.** Решить неравенство  $2 \sin 6x \cos 3x + \cos 6x < -1$ .

**Решение.**

Запишем неравенство в виде  $2 \sin 6x \cos 3x + 1 + \cos 6x < 0$ .

Приведем тригонометрические функции к одинаковому аргументу:

$$1 + \cos 6x = 2 \cos^2 3x, \quad \sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x.$$



Тогда получим, что  $4 \sin 3x \cos^2 3x + 2 \cos^2 3x < 0$ ,

$$(2 \sin 3x + 1) \cos^2 3x < 0.$$

Так как  $\cos^2 3x \geq 0$ , то получим равносильные неравенства

$$\begin{cases} 2 \sin 3x + 1 < 0, \\ \cos 3x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 3x < -\frac{1}{2}, \\ \cos 3x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \begin{cases} -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Т.о. } -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \text{ где } x \neq -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}.$$

$$x \in \left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x \in \left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

**Задача 103.** Решить неравенство  $\frac{4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 1}{\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2} > 0$ .

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } \frac{1}{2} - \cos x \neq 0, \cos x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство равносильно неравенству

$$4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 1 > 0.$$

Воспользуемся формулой  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ .

$$\text{Получим неравенство } 2\left(\sin x + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) + \sqrt{3} + 1 > 0.$$

$$2 \sin x - \frac{2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 1 > 0, \sin x > -\frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ (см. рис. 7), получим

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

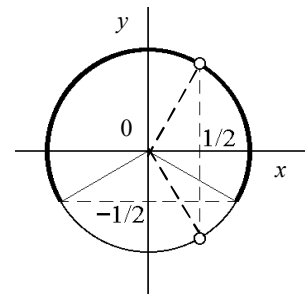


Рис. 7

**Задача 104.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых решения неравенства  $2^{|x|+a} < \frac{1}{2}$  заполняют промежуток  $(-3; 3)$ .

**Решение.** Преобразуем неравенство к виду  $2^{|x|+a} < 2^{-1}$ . В силу строгого возрастания показательной функции с основанием 2, полученное неравенство равносильно неравенству  $|x| + a < -1$ , или  $|x| < -1 - a$ , или, раскрывая модуль,  $1 + a < x < -1 - a$ .

По условию  $1 + a = -3$  и  $-1 - a = 3$ , откуда  $a = -4$ .

Ответ:  $a = -4$ .

**Задача 105.** Решить неравенство  $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$ .

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ \log_{x-1} 9 > 0, \\ \log_2 \log_{x-1} 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ x \neq 2, \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1, \\ \log_{x-1} 9 > 1; \end{cases}$$

так как неравенство  $\log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1$  выполняется только при  $x-1 > 1$ , поэтому ОДЗ (рис.8)

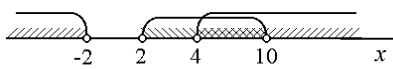


Рис. 8

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x-1 > 1, \\ \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} (x-1); \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x > 2, \\ x-1 < 9; \end{cases} \quad x \in (2; 10).$$

Исходное неравенство:  $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_{\frac{1}{2}} 1$ . Основание логарифма меньше единицы, поэтому при

потенцировании знак неравенства меняется на противоположный:

$$\log_2 \log_{x-1} 9 < 1, \log_{x-1} 9 < 2, 9 < (x-1)^2, (x-1)^2 - 3^2 > 0, (x-4)(x+2) > 0.$$

Учитывая ОДЗ, имеем  $x \in (4; 10)$ .

*Ответ.*  $x \in (4; 10)$ .

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 106.** Решить неравенство  $|\sin x + \cos x| < 1$ .

$$\text{Ответ. } x \in \left( \pi k + \frac{\pi}{2}; \pi k + \pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

**Задача 107.** Решить неравенство  $5^{x^3-4x-2} < 0,04$ .

$$\text{Ответ. } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2).$$

**Задача 108.** Решить неравенство  $5^x - 5^{3-x} > 20$ .

$$\text{Ответ. } (2; +\infty).$$

**Задача 109.** Решить неравенство  $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$ .

$$\text{Ответ. } (-\infty; 2) \cup (3; +\infty).$$

**Задача 110.** Решить неравенство  $\log_2^2 (x-1)^2 - 4 \log_{\frac{1}{2}} (x-1) - 24 \geq 0$ .

$$\text{Ответ. } x \in \left[ 1; \frac{9}{8} \right] \cup [5; +\infty).$$

**Задача 111.** Решить неравенство  $\lg(10x^2 - 90) - \frac{3}{2} \left( \log_{x^2-6x+9} 10 \right)^{-1} \leq 1$ .

$$\text{Ответ. } x \in (-\infty; -3) \cup [6; +\infty).$$

**Задача 112.** Решить неравенство  $\log_2 (9 - 4^x) + 2x > 3$ .

$$\text{Ответ. } x \in (0; 1,5).$$

**Задача 113.** Решить неравенство  $x^{(\lg x)^2 - 3 \lg x + 1} > 1000$ .

$$\text{Ответ. } (1000; +\infty).$$

**Задача 114.** Найти область определения функции  $y = \sqrt{2 \sin x - \sqrt{2}} + \log_3 (\log_{0,5} (x-2) + 2)$ .

$$\text{Ответ. } x \in \left[ 2; \frac{3\pi}{4} \right].$$

#### 4. Задачи по алгебре и геометрии

##### 4.1 «Текстовые» задачи

**Задача 115.** Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться нефтью, причем в первую поступает 100 литров в минуту, во вторую – 60 литров в минуту, в третью – 80 литров в минуту. В начальный момент первая цистерна была пуста, вторая и третья цистерны – частично заполнены.

Все три цистерны полностью заполнились одновременно. Во сколько раз количество нефти в начальный момент во второй цистерне было больше, чем в третьей?

**Решение.**

Примем объем цистерны равные  $V$  литров. Пусть первоначальный объем нефти второй цистерны равен  $x$ , тогда необходимо заполнить  $(V - x)$  от ее объема; пусть первоначальный объем нефти третьей цистерны равен  $y$ , тогда необходимо заполнить  $(V - y)$  от ее объема. Так как все три цистерны полностью заполнились одновременно, то на заполнение первой полностью пустой цистерны потребовалось  $0,01 \cdot V$  минут. Тогда первоначальный объем второй цистерны равен  $60 \cdot 0,01 \cdot V = V - x$ ,  $x = 0,4 \cdot V$ ; первоначальный объем второй третьей цистерны равен  $80 \cdot 0,01 \cdot V = V - y$ ,  $y = 0,2 \cdot V$ . Следовательно, количество нефти в начальный момент во второй цистерне было в 2 раза больше, чем в третьей.

*Ответ.* В 2 раза.

**Задача 116.** Две точки, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 12 минут, причем первая обходит окружность на 10 секунд быстрее, чем вторая. Какую часть окружности проходит за 1 секунду каждая точка?

**Решение.**

Примем длину окружности за единицу. Обозначим скорости первой и второй точек соответственно через  $v_1$  и  $v_2$  (в долях этой единицы в секунду).

Тогда по первому условию задачи:  $v_1 - v_2 = \frac{1}{12 \cdot 60}$ , а по второму:  $\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 10$ .

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1 - v_2} = 12 \cdot 60, \\ \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 10. \end{cases}$$

Для решения системы преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{720}, \\ v_1 - v_2 = 10v_1v_2. \end{cases}$$

Далее из первого уравнения системы выразим  $v_1$  через  $v_2$ , подставим это выражение во второе уравнение и получим квадратное уравнение:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + \frac{1}{720}, \\ 7200v_2^2 + 10v_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение  $7200v_2^2 + 10v_2 - 1 = 0$  имеет только один корень, удовлетворяющий условию задачи,  $v_2 = \frac{1}{90}$ . Тогда имеем  $v_1 = \frac{1}{80}$ .

*Ответ.*  $\frac{1}{80}$  и  $\frac{1}{90}$ .

**Задача 117.** Два школьника вышли одновременно из дома в школу с одинаковой скоростью. Через 3 минуты один из них вспомнил, что забыл дома тетрадь, и побежал обратно со скоростью на 60 метров в минуту больше прежней. Взяв тетрадь, он побежал обратно с той же скоростью и догнал товарища, который шел с первоначальной скоростью, у дверей школы. Расстояние от дома до школы равно 400 метров. Найдите начальную скорость школьников.

**Решение.**

Обозначим начальную скорость школьников через  $v$  м/мин. Тогда за 3 минуты они прошли путь  $3v$  м. Следовательно, школьник, который бегал за тетрадью, проделал путь  $(400 + 3v)$  со скоростью  $(v + 60)$  м/мин. Второй школьник за тоже время прошел путь  $(400 - 3v)$  м со скоростью  $v$  м/мин.

Выражая время нахождения школьников в пути двумя способами, получим уравнение:

$$\frac{400 + 3v}{v + 60} = \frac{400 - 3v}{v} \text{ или } v^2 + 30v - 4000 = 0, \text{ которое имеет только один корень, удовлетворяющий}$$

условию задачи,  $v = 50$  м/мин или  $v = 3$  км/ч.

*Ответ.*  $v = 50$  м/мин или  $v = 3$  км/ч.

**Задача 118.** Два бассейна наполняют водой. В одном из них уже имеется  $200 \text{ м}^3$  воды, а в другом –  $112 \text{ м}^3$ . Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на  $22 \text{ м}^3$  воды больше, чем в первый?

**Решение.**

Пусть  $t$  – искомое число часов;  $x$  –  $\text{м}^3/\text{ч}$  – скорость наполнения водой первого бассейна; скорость заполнения второго бассейна равна  $(x + 22) \text{ м}^3/\text{ч}$ . По условию задачи имеем

$$(x + 22) \cdot t - x \cdot t = 88, \quad 22t = 88, \quad t = 4 \text{ ч.}$$

*Ответ.* 4 часа.

**Задача 119.** У автомобиля новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег  $16000 \text{ км}$ , а на переднем –  $24000 \text{ км}$ . Какой максимальный пробег можно осуществить на этих колёсах?

**Решение.**

Будем считать, что скорость роста износа колеса является постоянной и не зависит от того насколько оно давно служит.

Очевидно, что задние колёса изнашиваются в 1,5 раза быстрее передних. Значит, когда задние колёса износятся на 60%, то передние – только на 40%. Это произойдёт после пробега

$$0,6 \cdot 16000 = 0,4 \cdot 24000 = 9600 \text{ км.}$$

В этот момент и следует сменить колёса. Оставшийся 40%-й ресурс задних колёс, поставленных спереди, и 60%-й ресурс передних колёс, поставленных сзади, очевидно, исчерпается одновременно, и произойдёт это ещё через  $9600 \text{ км}$ . Таким образом, максимальный пробег составляет  $2 \cdot 9600 = 19200 \text{ км}$ .

*Замечание.* Приведено одно из возможных решений задачи. Попробовать найти своё.

*Ответ.* 19200 км.

**Задача 120.** В спортивном магазине два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 футбольных мячей, 2 баскетбольных мяча и один волейбольный мяч. Футбольный мяч дешевле баскетбольного и дороже волейбольного на одну и ту же сумму. Сколько и каких мячей приобрел тот, кто купил волейбольный мяч?

**Решение.**

Допустим, что тот, кто купил волейбольный мяч, купил  $U$  футбольных и  $Z$  баскетбольных мячей. Тогда другой покупатель купил  $14 - U$  футбольных мячей и  $2 - Z$  баскетбольных мячей. Если  $c$  – цена футбольного мяча и она на  $s$  ( $0 < s < c$ ) дороже волейбольного, то цена баскетбольного мяча равна  $c + s$ , а из условия задачи следует, что

$$Z(c + s) + Uc + (c - s) = (2 - Z)(c + s) + (14 - U)c,$$

$$(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s.$$

Число  $Z$  может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть  $Z = 0$ , тогда из уравнения  $(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s$  получим  $(15 - 2U)c = -3s$ ,  $(2U - 15)c = 3s$ . Так как  $0 < s < c$ , следовательно,  $0 < (2U - 15)c < 3c$ ,  $0 < 2U - 15 < 3$ ,  $15 < 2U < 18$ ,  $7,5 < U < 9$ . Единственное целое число  $U$ , которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае  $Z = 1$  уравнение  $(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s$  эквивалентно  $(13 - 2U)c = -s$ ,  $(2U - 13)c = s$ . Так как  $0 < s < c$ , то  $0 < (2U - 13)c < c$ ,  $0 < 2U - 13 < 1$ ,  $13 < 2U < 14$ ,  $6,5 < U < 7$ . Очевидно, что никакое целое число  $U$  не удовлетворяет получившемуся неравенству.

Рассуждая аналогично при  $Z = 2$ , получим, что уравнение  $(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s$  не выполняется ни при каких целых  $U$ , т.е.  $(11 - 2U)c = s$ , тогда  $0 < (11 - 2U)c < c$ ,  $0 < 11 - 2U < 1$ ,  $-1 < 2U - 11 < 0$ ,  $10 < 2U < 11$ ,  $5 < U < 5,5$ .

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при  $Z = 0$ ,  $U = 8$ . Значит, купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

*Ответ.* Купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

**Задача 121.** Статистика знает всё. В одном городе 47,7% всех детей предпочитают электронные форматы книг; 15,1% – бумажные форматы книг, а оставшимся 37,2% детям безразлично, в каком формате книги. Статистика отдельно среди мальчиков такова: 33%, 20% и 47% соответственно. Сколько процентов девочек предпочитает книги в бумажном формате, если 63% из них предпочитают книги в электронном формате?

**Решение.**

Пусть в городе  $x$  мальчиков и  $y$  девочек, тогда  $x + y$  – общее число детей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	Электронный формат	Бумажный формат	Безразлично, какой формат
$x + y$	47,7%	15,1%	37,2%
$x$	33%	20%	47%
$y$	63%	?	?

Используя данные второго столбца таблицы, запишем соотношение «по электронному формату»:  
 $0,477(x + y) = 0,33x + 0,63y$ .

Отсюда получим  $0,147x = 0,153y$  или  $49x = 51y$ .

Пологая  $m = \frac{x}{51} = \frac{y}{49}$ , тогда  $x = 51m$ ,  $y = 49m$ , а разность  $0,151(x + y) - 0,2x = 15,1m - 10,2m = 4,9m$  дает число девочек, которые предпочитают книги в бумажном формате.

Разделив эту разность на  $y$  и умножив на 100%, получим искомый результат:  $\frac{4,9m}{49m} \cdot 100\% = 10\%$ .

*Ответ. 10%*

**Задача 122.** Была проведена проверка на соответствие стандарту партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандарту, оказалось в интервале от 97,3% до 98,4%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

**Решение.**

Количество деталей, не соответствующих стандартам, колеблется в пределах от 1,6% до 2,7% от общего количества деталей. Если  $N$  – количество деталей в партии, то это означает, что найдется натуральное число (деталей, не соответствующих стандарту)  $x$ :

$$0,016N < x < 0,027N$$

$$\begin{cases} 0,027N > x, \\ 0,016N < x; \end{cases} \begin{cases} N > \frac{x}{0,027}, \\ N < \frac{x}{0,016}; \end{cases} \begin{cases} N > \frac{x \cdot 1000}{27}, \\ N < \frac{x \cdot 1000}{16}; \end{cases} \frac{1000x}{27} < N < \frac{125x}{2}, 37\frac{1}{27}x < N < 62\frac{1}{2}x$$

Наименьшее возможное число  $N$  достигается при  $x=1 \Rightarrow N=38$ .

*Ответ. 38.*

**Задача 123.** Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

**Решение.**

Пусть  $x$  – количество машин, производимых в сутки первым заводом. Тогда второй завод до реконструкции производил в сутки  $\frac{95x}{100}$  машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать

$\frac{95x}{100} + \frac{23x}{100}$  машин. Из условий задачи следует следующая система неравенств:

$$\begin{cases} x \leq 950, \\ \frac{95x}{100} + \frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток  $847\frac{54}{118} < x \leq 950$ . Так как числа  $\frac{95x}{100}$  и  $\frac{23x}{100}$  должны быть целыми, то  $x$  должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому  $x = 900$ . Следовательно, первый завод выпускает в сутки 900 автомобилей, а второй завод до реконструкции выпускал  $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$  автомобилей.

*Ответ. 900 и 855.*

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 124.** На вопрос учеников о результатах контрольной работы учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько учеников получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

*Ответ. 6; 12.*

**Задача 125.** Турист преодолел расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал  $\frac{1}{5}$  всего пути и еще 60 км, во второй день  $\frac{1}{4}$  всего пути и еще 20 км и в третий день  $\frac{23}{80}$  всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

*Ответ.* 400 км.

**Задача 126.** На заводе для изготовления одного электродвигателя типа *A* расходуется 2 кг меди и 4 кг свинца; на изготовление одного электродвигателя типа *B* расходуется 3 кг меди и 5 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа произведено на заводе, если известно, что израсходовали 146 кг меди и 258 кг свинца?

*Ответ.* 22;34.

**Задача 127.** Жидкость поступает в сосуд через три крана. Заполнение сосуда только через второй кран требует 0,75 времени, за которое сосуд может наполниться через один первый кран. Наполнение сосуда только через третий кран требует времени на 10 мин больше, чем через один второй кран. Если одновременно открыть все три крана, то сосуд заполнится за 6 мин. За сколько минут наполняет сосуд каждый кран в отдельности?

*Ответ.*  $\frac{56}{3}$ , 14, 24 мин.

**Задача 128.** Два печника могут сложить печь за 12 ч. Если первый печник будет работать 2 ч, а второй – 3 ч, то они выполнят 20 % всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

*Ответ.* 20 ч, 30 ч.

**Задача 129.** Расстояние от пункта *A* до пункта *B* по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем, за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Путь от пункта *B* до пункта *A* против течения реки теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости катера и теплохода в стоячей воде.

*Ответ.* 12 км/ч; 20 км/ч.

**Задача 130.** Андерсон покинул отель в Сан-Ремо в 9 часов и находился в пути целый час, когда Бастер вышел вслед за ним по тому же пути. Собака Бакстера выскочила одновременно со своим хозяином и бегала всё время между ним и Андерсоном до тех пор, пока Бастер не догнал Андерсона. Скорость Андерсона составляет 2 км/ч, Бакстера – 4 км/ч и собаки – 10 км/ч. Сколько километров пробежала собака к моменту, когда Бастер догнал Андерсона?

*Ответ.* 10 км.

**Задача 131.** Температуру можно измерить по шкалам Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что  $0^\circ$  по Цельсию соответствует  $0^\circ$  по Реомюру и  $32^\circ$  по Фаренгейту, а  $100^\circ$  по Цельсию соответствует  $80^\circ$  по Реомюру и  $212^\circ$  по Фаренгейту. Сколько будет градусов по шкале Реомюра, если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадут?

*Ответ.*  $-32^\circ$ .

**Задача 132.** Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 метров одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую – на 3 м больше, чем в предыдущую. Определить, на какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи.

*Ответ.*  $60^\circ$ .

**Задача 133.** В компьютерном магазине за два дня продали 2 одинаковых системных блока, 13 принтеров и один сканер, причем в первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Принтер дешевле системного блока и дороже сканера на одну и ту же сумму. Сколько принтеров и сколько системных блоков продали в один день со сканером?

*Ответ.* В один день со сканером продано 8 принтеров и ни одного системного блока.

#### 4.2. Алгебра и начала анализа

**Задача 134.** Для функции  $y = xe^x$  найти производную 2019-го порядка ( $y^{(2019)}$ ).

**Решение.**

$$y = xe^x,$$

$$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1),$$

$$y'' = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2),$$

$$y''' = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3),$$

...

$$y^{(n)} = e^x(x+n).$$

Тогда, имеем  $y^{(2019)} = e^x(x+2019)$ .

$$\text{Ответ. } y^{(2019)} = e^x(x+2019).$$

**Задача 135.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$ .

**Решение.**

Найдем область определения функции  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} : D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

$$\text{Вычислим } f'(x): f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{3} = \frac{x^4 - 1}{x^2}.$$

Найдем стационарные точки функции:  $f'(x) = 0, x^4 - 1 = 0, x = \pm 1$ .

Исследуем производную на знак в области определения функции, результаты исследования представим в виде таблицы:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↑	-4/3	↓		↓	4/3	↑

*Ответ.* Функция возрастает на интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ ;  
убывает на интервалах  $(-1, 0)$  и  $(0, 1)$ ;

$$x = 1 \text{ — точка минимума, } f(1) = \frac{4}{3};$$

$$x = -1 \text{ — точка максимума, } f(-1) = -\frac{4}{3}.$$

**Задача 136.** Касательная к параболе  $y = x^2$  в точке касания с абсциссой  $x_0$  составляет угол  $60^\circ$  с осью  $Ox$ . Найти координаты точки касания.

**Решение.**

Тангенс угла наклона касательной к кривой  $y = x^2$  при  $x = x_0$  равен значению производной в этой точке, следовательно,  $y'(x_0) = 2x_0, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ , откуда  $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $y_0 = \frac{3}{4}$ .

$$\text{Ответ. } \left( \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4} \right).$$

**Задача 137.** Найти угол между касательными к графику функции  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  в точках с абсциссами  $x_0 = 1$  и  $x_0 = -1$ .

**Решение.**

$$\text{Уравнение касательной } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем  $f'(x)$ :  $f'(x) = x$ . Вычислим угловые коэффициенты касательных:  $k_1 = f'(-1) = -1, k_2 = f'(1) = 1$ . Поскольку  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , т.е. касательные перпендикулярны (угол между касательными равен  $90^\circ$ ).

*Ответ.*  $90^\circ$ .

**Задача 138.** К графику функции  $y(x) = 3x - x^2$  проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ , вторая — в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными (рис. 9).

**Решение.**

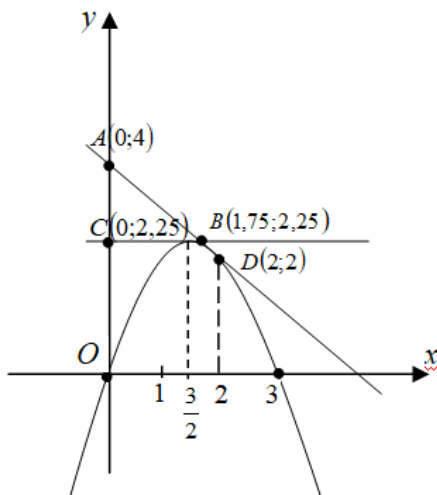


Рис. 9

Графиком функции  $y(x) = 3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$  является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина находится в точке  $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ . Т.к. точкой максимума параболы является ее вершина, то абсциссой точки максимума функции  $y(x) = 3x - x^2$  является  $x_1 = \frac{3}{2}$ .

Уравнение касательной в точке с абсциссой  $x_0$  имеет вид  $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$ .

$y' = (3x - x^2)' = 3 - 2x$ . Т.к.  $y'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$  и  $y\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$ , то уравнение касательной в точке  $x_1 = \frac{3}{2}$  имеет вид  $y = 2,25$ . Т.к.  $y'(2) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$  и  $y(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2$ , то уравнение касательной в точке  $x_0 = 2$  имеет вид  $y - 2 = -(x - 2)$  или  $y = -x + 4$ .

Из системы уравнений  $\begin{cases} y = 2,25, \\ y = -x + 4 \end{cases}$  находим координаты точки пересечения касательных к параболу:  $B(1,75; 2,25)$ .

Касательная  $y = 2,25$  пересекает ось  $Oy$  в точке  $C(0; 2,25)$ , касательная  $y = -x + 4$  пересекает ось  $Oy$  в точке  $A(0; 4)$ . Искомая площадь есть площадь треугольника  $ABC$ , поэтому  $S = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC|$ . Т.к.  $|AC| = |2,25 - 4| = 1,75$ ,  $|BC| = |1,75 - 0| = 1,75$ , то получим  $S = \frac{49}{32}$ .

Ответ.  $\frac{49}{32}$ .

**Задача 139.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен  $27 \text{ дм}^3$ . При каких размерах параллелепипеда площадь его полной поверхности будет наименьшей?

**Решение.**

Обозначим стороны основания параллелепипеда через  $x \text{ дм}$  и  $y \text{ дм}$ , высоту  $-h \text{ дм}$ . Тогда объем параллелепипеда равен  $x \cdot y \cdot h = 27$ .

Площадь  $S$  полной поверхности параллелепипеда равна:  $S = 2xy + 2xh + 2yh$ .

Для определения размеров параллелепипеда, при которых площадь его полной поверхности будет наименьшей, воспользуемся теоремой: *если произведение  $n$  положительных чисел постоянно:  $x_1 \cdot x \cdot \dots \cdot x_n = P$ , то их сумма  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  будет наименьшей при равенстве этих чисел.*

Произведение слагаемых суммы  $S = 2xy + 2xh + 2yh$  постоянно, так как

$$2xy \cdot 2xh \cdot 2yh = 8 \cdot x^2 y^2 h^2 = 8 \cdot 27^2.$$

Тогда сумма  $S$  будет наименьшей при условиях:  $2xy = 2xh = 2yh$ . Отсюда  $x = y = h$ . Так как  $x \cdot y \cdot h = 27$ , то  $x^3 = 27$ . Следовательно,  $x = y = h = 3$ .

Ответ. Площадь полной поверхности параллелепипеда будет наименьшей, если каждое из измере-



ний равно 3 дм, т.е. когда параллелепипед является кубом.

**Задача 140.** Найдите наибольшее значение произведения  $P = (x + y + 1)(5 - x)(6 - y)$ , если  $0 < x < 5$ ,  $0 < y < 6$ .

**Решение.**

На основании неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим  $n$  чисел  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ , получим:

$$\frac{(x + y + 1) + (5 - x) + (6 - y)}{3} \geq \sqrt[3]{(x + y + 1)(5 - x)(6 - y)},$$

$$\sqrt[3]{P} \leq 4, \quad P \leq 64.$$

Следовательно, наибольшее значение произведения  $P = 64$ .

Найдем значения переменных  $x$  и  $y$ , при которых  $P = 64$ . Для этого решим систему уравнений (на основании теоремы: если произведение  $n$  положительных чисел постоянно, то их сумма будет наименьшей при равенстве этих чисел):  $x + y + 1 = 5 - x = 6 - y$ . Отсюда  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

Ответ.  $P = 64$  при  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 141.** Найти уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 8$ , параллельной оси абсцисс.

Ответ.  $y = -3$ ,  $y = -35$ .

**Задача 142.** Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \ln(4x + 1)$  в точке с абсциссой  $x = 0$ .

Ответ.  $y = 3x$ .

**Задача 143.** Найти точки экстремума функции  $f(x) = 3x^2 + \frac{6}{x}$ .

Ответ.  $f_{\min} = f(1) = 9$ .

#### 4.3. Геометрия

**Задача 144** В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина медианы  $AK$  (рис.10). Прямая  $BM$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $L$ . Найти длину отрезка  $AL$ , если известно, что длина  $AC$  равна 9 см.

**Решение.**

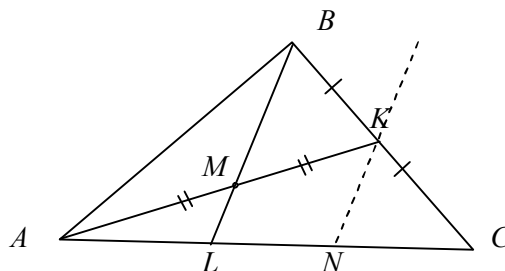


Рис.10

Проведем прямую  $KN \parallel BL$  (см. рис.10). Так как  $AM = MK$ , то по теореме Фалеса, примененной к  $\angle KAC$ ,  $AL = LN$ . Аналогично, для  $\angle BCA$  и параллельных прямых  $KN$  и  $BL$  получим  $LN = NC$ . Таким образом,

$$AL = LN = NC = \frac{1}{3} AC = 3 \text{ см.}$$

Ответ. 3.

**Задача 145.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  медиана, проведенная к гипотенузе, равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти катеты.

**Решение.**

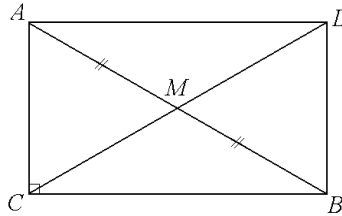


Рис.11

Итак,  $CM$  – медиана,  $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$  см,  $\angle ACM : \angle MCB = 2:1$ . Необходимо найти катеты  $AC$  и  $CB$ .

Достроим треугольник до прямоугольника  $CADB$  (см. рис. 11). Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому  $CD = 2CM = \sqrt{3}$  см. По условию  $\angle MCB = 30^\circ$ . В треугольнике  $CDB$ , тогда

$$DB = AC = CD \sin \angle MCB = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}, \quad CB = CD \cos \angle MCB = \sqrt{3} \cos 30^\circ = \frac{3}{2} \text{ см}.$$

$$\text{Ответ. } AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}, \quad CB = \frac{3}{2} \text{ см}.$$

**Задача 146.** Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему необходимо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, где у него собранные грибы заберет сын, приехавший на машине; а далее зайти в лес в другой точке, в которой ожидает его жена. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

**Решение.**

Покажем на рис. 12 графически решение этой задачи.

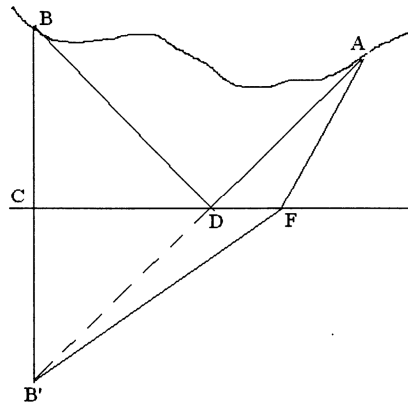


Рис. 12

Пусть грибник выходит из леса в точке  $A$ , а зайти в лес в точке  $B$ . Симметрично точки  $C$  шоссе – отобразим точку  $B$ , затем, получив точку  $B'$ . Проводим прямую  $AB'$ , получив точку  $D$ , которая и является искомой точкой задачи.  $BD = B'D$ ,  $BC = B'C$ . Очевидно, что для любой другой точки  $F$  справедливо неравенство:  $AF + FB' > AD + DB'$ .

Таким образом, расстояние  $AD + BD$  является наименьшим для выхода на шоссе из леса и захода в лес в заданной точке  $D$ .

**Задача 147.** В круговой сектор, дуга которого содержит  $60^\circ$ , вписан круг (рис. 13). Найти отношение площади сектора к площади вписанного круга.

**Решение.**

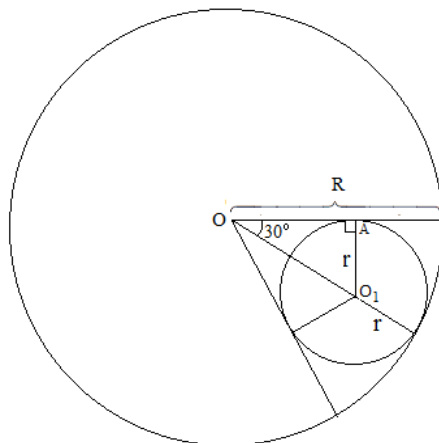


Рис. 13

Необходимо найти  $\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{вписанного круга}}}$ .

Известно, что  $S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ ,  $S_{\text{вписанного круга}} = \pi r^2$ .

В прямоугольном треугольнике  $OO_1A$ ,  $O_1A = r$ ,  $\angle O_1OA = 30^\circ$ , отсюда гипотенуза равна  $OO_1 = 2r$ . Тогда радиус большого круга:  $R = OO_1 + r = 3r$ .

Таким образом,  $\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{вписанного круга}}} = \frac{\frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \frac{R^2}{6r^2} = \frac{(3r)^2}{6r^2} = \frac{9r^2}{6r^2} = \frac{3}{2}$ .

Ответ. 1,5.

**Задача 148.** В равносторонний треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $r$ . На окружности выбрана точка  $M$  (). Найти все возможные значения суммы  $AM^2 + BM^2 + CM^2$ .

**Решение.**

Пусть для определенности точка  $M$  лежит на дуге окружности, ближайшей к вершине  $A$ , т.е. из отрезков  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  ( $O$  – центр окружности) выберем тот отрезок, угол между которым и  $OM$  – наименьший.

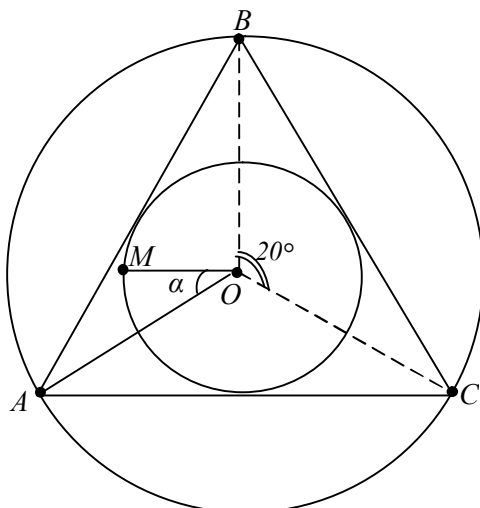


Рис. 14

Обозначим через  $\alpha$  величину угла между отрезком  $AO$  и  $OM$ ,  $|OM| = r$ .

Тогда имеем  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ .

Угол между  $OM$  и  $BO$  равен  $\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$ , угол между  $OM$  и  $CO$  равен  $\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$ .

Пусть  $R$  – радиус описанной вокруг данного треугольника окружности.

Применяя теорему косинусов к треугольникам  $AOM$ ,  $BOM$  и  $COM$ , получим

$$AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2AO \cdot OM \cdot \cos \alpha = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos \alpha ,$$

$$\text{Аналогично, } BM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right),$$

$$CM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right).$$

Сложив полученные выражения, получим

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 - 2r \cdot R \cdot \left( \cos \alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right).$$

$$\text{Выражение } \cos \alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 0, \text{ т.к.}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \alpha = -\cos \alpha .$$

Отсюда, величина  $AM^2 + BM^2 + CM^2$  постоянна и равна  $3r^2 + 3R^2$ . Учитывая, что  $R = 2r$ ,  $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 = 3r^2 + 3(2r)^2 = 15r^2$ . Т.о., величина  $AM^2 + BM^2 + CM^2$  постоянна и равна  $15r^2$  независимо от положения точки  $M$  на окружности. Что и требовалось доказать.

Ответ.  $15r^2$ .

**Задача 149.** Три квадрата расположены так как показано на рис. 15. Найти величину угла между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

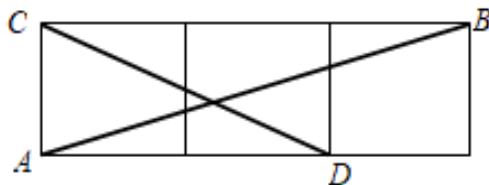


Рис. 15

**Решение.**

I способ.

Достроим фигуру (рис. 15) до фигуры (рис. 16).

Пусть сторона квадрата равна  $x$ , тогда  $AE = BE = x\sqrt{5}$  и  $AB = \sqrt{5x^2 + 5x^2} = x\sqrt{10}$ .

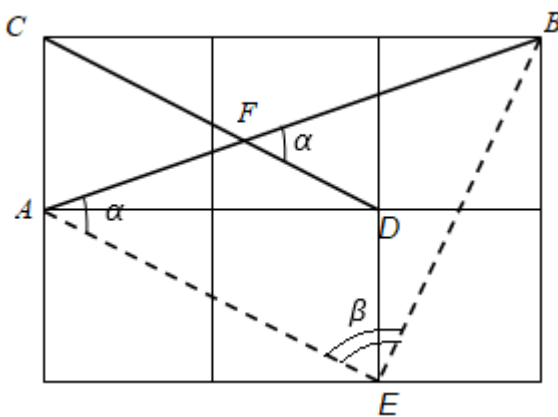


Рис. 16

В треугольнике  $ABE$ , где  $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$ ,  $\angle AEB = \beta$ , по теореме косинусов имеем  $10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5} \cos \beta$ , т.е.  $\cos \beta = 0$ ,  $\beta = 90^\circ$ . Тогда  $\angle BAE = \angle ABE = 45^\circ$ .

II способ.

Применить скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ .

Ответ.  $45^\circ$ .

**Задача 150.** Найти все значения переменных  $x$  и  $y$ , при которых выражение

$$z = \sqrt{x^2 + (y-5)^2} + \sqrt{y^2 + (x-12)^2}$$

принимает наименьшее значение.

**Решение.**

Каждый из радикалов, входящих в выражение  $z = \sqrt{x^2 + (y-5)^2} + \sqrt{y^2 + (x-12)^2}$ , представляет собой расстояние между двумя точками координатной плоскости (рис. 17).

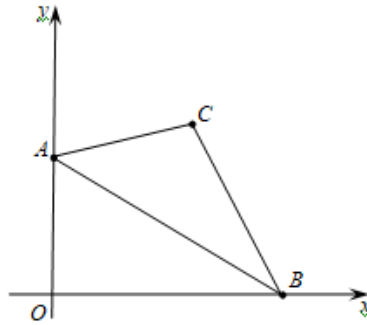


Рис.17

Радикал  $\sqrt{x^2 + (y-5)^2}$  есть расстояние между точками  $A(0;5)$  и  $C(x;y)$ , т.е.  $|AC| = \sqrt{x^2 + (y-5)^2}$ ; радикал  $\sqrt{y^2 + (x-12)^2}$  есть расстояние между точками  $B(12;0)$  и  $C(x;y)$ , т.е.  $|CB| = \sqrt{y^2 + (x-12)^2}$ .

Тогда  $z = |AC| + |CB|$ . На основании неравенства треугольника:  $|AC| + |CB| \geq |AB|$ ,  $z \geq |AB|$ .

$|AB| = 13$  (по т. Пифагора  $|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ).

Т.е.,  $z \geq 13$ .

Тогда, наименьшее значение  $z = 13$ .

Все точки  $C(x;y)$ , при которых  $z = 13$ , принадлежат отрезку прямой  $AB$  при  $x \in [0;12]$ . Составим уравнение прямой  $AB$ , проходящей через точки  $A(0;5)$  и  $B(12;0)$ :  $\frac{x}{12} = \frac{y-5}{-5}$ . Т.е. имеем  $y = -\frac{5}{12}x + 5$ .

Таким образом, наименьшее значение  $z = 13$ , достигается при  $x \in [0;12]$ ,  $y = -\frac{5}{12}x + 5$ .

*Замечание.* Приведено одно из возможных решений задачи. Попробовать найти своё.

*Ответ.*  $z = 13$ ,  $x \in [0;12]$ ,  $y = -\frac{5}{12}x + 5$ .

**Задача 151.** Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \sqrt{30}. \end{cases}$$

**Решение.**

Рассмотрим вектор  $\vec{a} = \{x^2; y^2; z^2\}$  и вектор  $\vec{b} = \{2; 3; 4\}$ .

Тогда,  $|\vec{a}| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} = \sqrt{1} = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ .

Скалярное произведение векторов равно:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \sqrt{29} \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их компоненты равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \sqrt{30}.$$

Тогда,  $\sqrt{30} = \sqrt{29} \cdot \cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{29}} > 1$ .

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

*Ответ.* Система уравнений не имеет решений.

**Задача 152.** Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не меньше 12 м. Доказать, что в роще размещено не больше 2018 деревьев.

**Решение.**

Пусть в роще имеется  $x$  деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. согласно условию; круги не пересекаются и расположены в круге радиуса  $258 + 6 = 264$  м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство  $264^2 \pi \geq 6^2 \pi \cdot x$ . Тогда  $x \leq 44^2$ ,  $x \leq 1936$ , т.е.  $x < 2018$ .

*Что требовалось доказать*

**Задача 153.** В прямоугольнике  $ABCD$   $AB=2$  и  $BC=\sqrt{3}$ . Точка  $E$  на прямой  $AB$  выбрана так, что  $\angle AED = \angle DEC$ . Найти  $AE$ .

**Решение.**

Неопределенным моментом этой задачи является расположение точки  $E$  на прямой относительно двух данных на ней точек  $A$  и  $B$ .

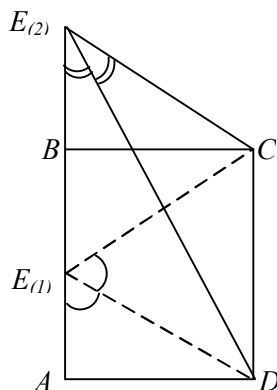


Рис. 18

Рассмотрим случаи (рис. 18):

1. Если точка  $E$  на прямой лежит между точками  $A$  и  $B$ , то  $AE=1$ .

По свойству параллельных прямых  $\angle AED = \angle EDC$ , следовательно,  $\triangle DEC$  – равнобедренный и  $EC = CD = 2$ . Из прямоугольного треугольника  $BEC$  с гипотенузой  $EC = 2$  и катетом  $BC = \sqrt{3}$  по теореме Пифагора найдем  $BE$ :  $BE = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ .

2. Если точка  $B$  на прямой лежит между точками  $A$  и  $E$ , то  $AE = 3$ .

3. Положение точки  $A$  между точками  $B$  и  $E$  невозможно, т.к. в этом случае  $\angle AED > \angle DEC$ , т.е. не выполняется условие задачи.

*Ответ. 1 или 3.*

**Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 154.** Медиана треугольника  $ABC$ , проведенная к стороне  $AB$ , составляет со стороной  $CB$  угол  $60^\circ$  и равна  $\frac{\sqrt{6}}{10}$  см. Найти длину стороны  $AB$ , если она составляет со стороной  $CB$  угол  $45^\circ$ .

*Ответ. 0,6.*

**Задача 155.** Треугольник, высота которого равна  $\frac{5}{3}$  см, равновелик ромбу с диагоналями  $\frac{7}{2}$  см и 5 см. Найти основание треугольника.

*Ответ. 10,5.*

**Задача 156.** В треугольнике  $ABC$  боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равны 6 см. На стороне  $AB$  как на диаметре построена окружность, пересекающая  $BC$  в точке  $D$  так, что  $BD:DC = 2:1$ . Найти длину стороны  $AC$ .

*Ответ.  $2\sqrt{6}$  см.*

**Задача 157.** В равнобедренной трапеции задана диагональ, равная 4 см, и угол между диагональю и основанием, равен  $\frac{\pi}{6}$ . Найти площадь трапеции.

*Ответ.  $S = 4\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.*

**Задача 158.** Три pizzas диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если pizzas попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

*Ответ.  $32(2\sqrt{3} + 3)$  см<sup>2</sup>.*

**Задача 159.** В ромб с острым углом  $30^\circ$  вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

*Ответ. 4.*

**Задача 160.** Найти все значения переменных  $x$  и  $y$ , при которых выражение

$$z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$$

принимает наибольшее значение.

$$\text{Ответ. } z = 5, x \in [0;3], y = -\frac{4}{3}x + 4.$$

### Рекомендации участникам олимпиады

1. Прочитать условия всех задач и наметить, в каком порядке их решать (обычно задачи упорядочены по возрастанию их сложности).
2. Внимательно прочитать условие задачи. Проверить условие задачи на правдоподобность. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирать самый удобный способ для себя, а рассмотреть все возможные варианты постановки задачи.
3. Если задача решилась слишком легко – это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.
4. Если задача не решается – попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или порешать ее «от противного», или заменить числа буквами и т.д.
5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, попробуйте его поочередно то доказывать, то опровергать (совет академика А.Н. Колмогорова).
6. Не заикливаться на решении одной задачи: иногда полезно отключиться от нее и оценить положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжить решение, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).
7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут.
8. Решив задачу, проверить правдоподобность полученных результатов, а затем сразу оформлять решение. Это поможет проверить правильность решения и освободит время и внимание для других задач.
9. Каждый шаг решения задачи надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений. Это поможет при проверке работы.
10. Перед тем как сдать работу, перечитать её «глазами проверяющих» – смогут ли они в ней разобратся?

### Некоторые варианты заданий заключительного этапа

#### Отраслевой олимпиады школьников «ГАЗПРОМ»

2018 – 2019 учебный год

(с ответами и указаниями)

#### 9 класс

Задача 1. Вычислить без калькулятора значение выражения  $A$ , если

$$A = \sqrt{2012 \cdot 2014 \cdot 2016 \cdot 2018 + 16}.$$

Ответ. 4060220.

Задача 2. Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую.

$$\text{Ответ. } 16\frac{4}{11}.$$

Задача 3. Доказать, что уравнение  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$  не имеет действительных решений.

Задача 4. Статистика знает всё. В одном городе 47,7% всех детей предпочитают электронные форматы книг; 15% – бумажные форматы книг, а оставшимся 37,3% детям безразлично, в каком формате книги. Статистика отдельно среди девочек такова: 23,4%, 28,5% и 48,1% соответственно. Сколько процентов мальчиков предпочитает книги в бумажном формате, если 53,1% из них предпочитают книги в электронном формате?

Ответ. 12%

Задача 5. Действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $a$  таковы, что выполняется следующая система равенств:

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

Найти при каком значении  $a$  сумма  $x^2 + y^2$  принимает наибольшее значение.

Ответ.  $a = 5$ .

Задача 6. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = 5$  и  $BC = 4$ . Точка  $E$  на прямой  $AB$  выбрана так, что  $\angle AED = \angle DEC$ . Найти  $AE$ .

Ответ. 2 или 8.

### 10 класс

**Задача 1.** Турист отправляется в поход из пункта  $A$  в пункт  $B$  и обратно. Проходит весь путь за 4 часа 30 минут. Дорога из пункта  $A$  в пункт  $B$  идет сначала в гору, потом по ровному месту, затем под гору. Определить, на каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 3 км/ч, на ровном месте – 5 км/ч, при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние  $AB$  равно 10 км.

*Ответ. 5.*

**Задача 2.** Найти значение выражения  $A$ , если

$$A = (3\sqrt{2} - 4) \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots \right).$$

*Ответ. 2.*

**Задача 3.** Доказать, что число  $\frac{3^{2020^{2018}} - 7^{20^{17}}}{10}$  целое.

*Указание. Проанализировать на какую цифру оканчиваются степени  $3^n$  и  $7^n$ .*

**Задача 4.** Производительность одного цеха автомобильных покрышек не превышает 2650 штук в сутки. Производительность второго цеха первоначально составляла 95% от производительности первого цеха. После ввода дополнительной линии во втором цехе производство покрышек увеличилось в сутки на 23% от числа покрышек, выпускаемых в сутки в первом цехе, и стали выпускать более 3000 штук в сутки. Сколько автомобильных покрышек за сутки выпускал каждый цех до реконструкции второго цеха? Предполагается, что каждый цех в сутки выпускает целое число автомобильных покрышек.

*Ответ. 2600 и 2470.*

**Задача 5.** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\left| \frac{7 - |x|}{|x| - 2} \right| = a$  имеет ровно 4 корня.

*Ответ.  $a > 3,5$ .*

**Задача 6.** В окружность радиуса  $R$  вписан равносторонний треугольник  $ABC$ . На окружности выбрана точка  $M$ . Найти все возможные значения суммы  $AM^2 + BM^2 + CM^2$ .

*Ответ.  $6R^2$ .*

### 11 класс

**Задача 1.** Для функции  $y = e^{-x}$  найти производную 2018-го порядка ( $y^{(2018)}$ ).

*Ответ.  $y^{(2018)} = e^{-x}$ .*

**Задача 2.** Вычислить значение выражения  $A$ , если

$$A = \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{7}{25} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

*Ответ.  $A = \pi$ .*

**Задача 3.** Была проведена проверка на соответствие стандартам партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандартам, оказалось в интервале от 95,2% до 98,2%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

*Ответ. 21.*

**Задача 4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \frac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3, \\ 2xy - 8x = x^2(y-4) + 1. \end{cases}$$

*Ответ.  $(1; 5)$ .*



*Задача 5.* К графику функции  $y(x) = 6x + x^2$  проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой  $x_0 = -2$ , вторая – в точке минимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными.

*Ответ.*  $\frac{25}{4}$ .

*Задача 6.* Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1, \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$$

*Ответ.* Система уравнений не имеет решений.

Составитель: доц. Л.В. Бакеева

Научный редактор проф. А.П. Господариков