МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГАЗПРОМ»

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМУ ЭТАПУ ОЛИМПИАДЫ 2022 ГОДА

Заключительный этап **отраслевой олимпиады школьников «Газпром»** по математике проводится в письменной форме. Вариант билета содержит 6 задач, связанных с преобразованием алгебраического выражения, решением алгебраического, иррационального, тригонометрического, показательного, логарифмического уравнений и неравенств (или их систем); задачи на прогрессии, на применение производной, по геометрии, текстовые задачи и задачи с параметрами. Время для написания олимпиады – 3 часа (180 минут).

Задачи рассчитаны на выявление математической смекалки и эрудиции каждого участника олимпиады. При решении следует учитывать, что в вариант включены задачи разной сложности, как правило, сложность возрастает в порядке возрастания номера задачи. Выполнение более сложной задачи оценивается и большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные дроби и наоборот. В решении задачи не требуется приводить пространные словесные пояснения, но следует выполнить все необходимые математические выкладки.

В целом уровень предлагаемых заданий не выходит за рамки рабочей программы образовательного стандарта средней общеобразовательной школы. Рассмотренные примеры дают представление об уровне требований, предъявляемых к участникам олимпиады.

1. Тождественные преобразования выражение. Прогрессии

1.1. Задачи на вычисление значений выражений

Задача 1. Доказать, что выражение $\dfrac{7^{2020^{2019}}-3^{20^{18}}}{10}$ – это целое число.

Решение:

Последняя цифра числа 7^n зависит от показателя степени n и принимает значения 7, 9, 3, 1; причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть 1 (единица).

Число 3^n оканчивается на одну из цифр 3, 9, 7, 1; причем если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 3^n есть 1 (единица).

Т.к. число 20 делится на 4, то и число 2020 делится на 4. Следовательно, 2020^{2019} делится на 4; число 20^{18} также делится на 4. Потому выражение $\dfrac{7^{2020^{2019}}-3^{20^{18}}}{10}$ – целое число, т.к. в числителе данной дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются цифрой 1. Таким образом, числитель дроби делится на 10.

Что требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что $A<B$, если $A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}$, $B=2019^{2\cdot 2019}$.

Решение:

Преобразуем выражение $A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}$.

$A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}=2018^{2}\cdot 2018^{2018}\cdot 2020^{2018}=$

$=2018^{2}\cdot(2019-1)^{2018}(2019+1)^{2018}=2018^{2}\cdot(2019^{2}-1)^{2018}$.

Тогда, $2018^{2}\cdot(2019^{2}-1)^{2018}<2019^{2}\cdot 2019^{2\cdot 2018}$, где

$2019^{2}\cdot 2019^{2\cdot 2018}=2019^{2+2\cdot 2018}=2019^{2\cdot 2019}=B$.

Следовательно, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3. Найти значение числового выражения A, если

$$A=(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right).$$

Решение:

$$(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5\cdot 2}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{\frac{7\cdot 8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-140\sqrt{\frac{1}{50}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{28\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-140\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot\left(\frac{5\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}(28-3+1+4-28)}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=1000\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot(1+1{,}017)=1000\cdot 2{,}017=2017.$$

Ответ: 2017.

Задача 4. Найти сумму $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2$.

Решение:

Т.к. $-n^2+(n+1)^2=n+(n+1)$, то получим

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2=1+(2+3)+(4+5)+\ldots+(100+101)=$$

$$=1+2+3+4+5+\ldots+100+101=\frac{(1+101)\cdot 101}{2}=5151.$$

Ответ: 5151.

Задача 5. Найти сумму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Решение:

Заметим, что

$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, поэтому имеем

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=10-1=9.$$

Ответ: 9.

Задача 6. Найти значение выражения A, если $A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)$.

Решение:

Упростим выражение A.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)=.$$

$$=\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9-1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}\cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}.$$

Полученное выражение сократим на величину произведения

$2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 2017^2\cdot 2018$ и получим

$$A=\frac{2019}{2\cdot 2018}=\frac{2019}{4036}.$$

Ответ: $A=\dfrac{2019}{4036}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Найти сумму $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{87\cdot 101}$.

Указание. Представить каждое слагаемые суммы по формуле

$$\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right).$$

Ответ: $\dfrac{25}{101}$.

Задача 8. Доказать, что число

$$(998\cdot 999\cdot 1000\cdot 1001+1)\cdot(999\cdot 1000\cdot 1001\cdot 1002+1)(1000\cdot 1001\cdot 1002\cdot 1003+1)$$

является полным квадратом.

Указание. Показать, что каждый множитель произведения представим в виде

$$(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=(n^2-n-1)^2.$$

Задача 9. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}+\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}$.

Ответ: 5.

Задача 10. Найти величину X из пропорции $\dfrac{(20{,}18)^0\cdot X}{10{,}5\cdot\left(\dfrac{5^2}{6}\right)^{-1}-15{,}15:\left(\dfrac{2}{15}\right)^{-1}}=\dfrac{(-3)^2\cdot\left(1\dfrac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\dfrac{3}{40}-4\dfrac{3}{8}:\left(7^{-1}\right)^{-1}}$.

Ответ: 5.

Задача 11. Найти значение выражения A, если $A=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{2017^2}\right)$.

Ответ: $\dfrac{2018}{4034}$.

Задача 12. Вычислить без калькулятора значение выражения A, если

$$A=\sqrt{2012\cdot 2014\cdot 2016\cdot 2018+16}.$$

Ответ: 4060220.

Задача 13. Найти значение выражения A, если

$$A=(3\sqrt{2}-4)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right).$$

Ответ: 2.

Задача 14. Доказать, что выражение $\dfrac{3^{2020^{2018}}-7^{20^{17}}}{10}$ – это целое число.

Указание. Проанализировать на какую цифру оканчиваются степени 3^n *и* 7^n.

Задача 15. Найти значение выражения A, если

$$A=\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{4})^2+\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}}-\sqrt[6]{25}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{1}.$$

Ответ: 1.

1.2. Задачи на доказательство тождеств и упрощение выражений

Задача 16. Доказать, что A делится на 13, если $A=3+3^2+3^3+...+3^{2019}$.

Решение:

Выполним преобразования A:

$$A=3+3^2+3^3+...+3^{2019}=3(1+3+3^2)+3^4(1+3+3^2)+...+3^{2017}(1+3+3^2)=$$

$$=(1+3+3^2)(3+3^4+...+3^{2017})=13(3+3^4+...+3^{2017}).$$

Так как один из множителей делится на 13, то A делится на 13.

Что требовалось доказать.

Задача 17. Доказать, что $(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot...\cdot(1+b^{2n})=1+b+b^2+b^3+..b^{2n}$, где b – рациональное число, n – натуральное число.

Решение: Умножим и разделим левую часть равенства на $(1-b)$. В числителе после последовательного применения формулы разности квадратов получим

$$(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot...\cdot(1+b^{2n})=\frac{(1-b)(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot...\cdot(1+b^{2n})}{1-b}=$$

$$=\frac{(1-b)(1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdot...\cdot(1+b^{2n})}{1-b}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}.$$

Правая часть представляет сумму $(2n+1)$ членов геометрической прогрессии с первым членом равным 1 и знаменателем, равным b. Тогда имеем $1+b+b^2+b^3+...+b^{2n}=\dfrac{1-b^{2n+1}}{1-b}$.

Следовательно, равенство верно.

Что и требовалось доказать.

Задача 18. Доказать тождество $1+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Решение:

Для доказательства тождества применим метод математической индукции.

1) Проверим справедливость тождества при $n=1$: $1=\left(\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$, $1=1$.

2) Предположим, что данное тождество справедливо при $n=k>1$, т.е. верно равенство вида

$$1+2^3+3^3+...+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

3) Докажем, что тождество справедливо при $n=k+1$, т.е.

$$1+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Используя индукционное предположение, в левой части тождества получим

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Что требовалось доказать.

Задача 19. Найти значение выражения A при $x=998{,}\underbrace{222\ldots2}_{2019}3$, $y=1021{,}\underbrace{777\ldots77}_{2020}$, если

$$A=\frac{y^2+xy-\sqrt[4]{x^5y^3}-\sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{x^2y^3}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Решение:
Выполним преобразования выражения A.

$$\frac{y^2+xy-x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{3}{4}}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=\frac{y(y+x)-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}(y+x)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{2}{4}}-x^{\frac{2}{4}}\right)}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=$$

$$=\frac{(y+x)\left(y-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{(y+x)y^{\frac{3}{4}}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}=x+y\,.$$

При $x=998{,}\underbrace{222\ldots2}_{2019}3$, $y=1021{,}\underbrace{777\ldots77}_{2020}$, получим: $x+y=998{,}\underbrace{222\ldots2}_{2019}3+1021{,}\underbrace{777\ldots77}_{2020}=2020.$

Ответ: 2020.

Задача 20. Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b в n раз меньше их среднего арифметического. Доказать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}.$$

Решение: Очевидно, что $a>b$. По условию задачи имеем:
$\frac{a+b}{2}=n\cdot\sqrt{ab}$, $\frac{a}{b}+1=2n\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$. Примем $\sqrt{\frac{a}{b}}=t>1$. Тогда $t^2-2nt+1=0$, $t_{1,2}=n\pm\sqrt{n^2-1}$. При условии $t>1$, $t=n+\sqrt{n^2-1}$.

$$\frac{a}{b}=t^2=\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{1}=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{n^2-\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2}=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}=\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 21. Вычислить значение выражения A, если $A=\cos260^\circ\cdot\sin130^\circ\cdot\cos160^\circ$.
Решение:
Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения.

$A=\cos260^\circ\cdot\sin130^\circ\cdot\cos160^\circ=$

$=\cos(270^\circ-10^\circ)\cdot\sin(180^\circ-50^\circ)\cdot\cos(180^\circ-20^\circ)=$

$=-\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot(-\cos20^\circ)=(\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ)\cdot\cos20^\circ=$

={по формуле произведения синусов}=

$=\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos60^\circ)\cos20^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos40^\circ-\frac{1}{2}\right)\cos20^\circ=$

$=\frac{2\cos40^\circ-1}{4}\cdot\cos20^\circ=\frac{2\cos40^\circ\cdot\cos20^\circ-\cos20^\circ}{4}=$

={по формуле произведения косинусов}=

$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(\cos20^\circ+\cos60^\circ)-\cos20^\circ}{4}=\frac{\cos60^\circ}{4}=\frac{1}{8}.$

Ответ: $A=\frac{1}{8}$.

Задача 22. Найти значение выражения A, если $A=\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\left[\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ |a|\le 1\right]=$$

$$=\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\cdot\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}\right)\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{6\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\left[\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha,\ \alpha\ne\pi n, n\in Z\right]=\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\left[\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha},\quad \alpha\ne\pi n, n\in Z\right]=\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1},\ \ \alpha\ne\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z;\\ \frac{4}{5}\in[0;1]\Rightarrow\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{8}\right)\\ \Rightarrow\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)>0\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\alpha=+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}.\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)\right)}-1}}=$$

$$=\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \frac{4}{5}\in[0;1]\Rightarrow\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)>0\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}}=\left[\cos(\arccos a)=a,\ |a|\le 1\right]=\\ =\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3\sqrt{10}}{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20}{10+3\sqrt{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20-\left(10+3\sqrt{10}\right)}{10+3\sqrt{10}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{10-3\sqrt{10}}\cdot\frac{10+3\sqrt{10}}{10+3\sqrt{10}}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{10^2-\left(3\sqrt{10}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{100-90}}=\frac{10+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}+3.$$

Ответ: $\sqrt{10}+3$.

Задача 23. Вычислить значение выражения A, если

$$A=\arcsin\frac{24}{25}+\arccos\frac{3}{5}+\mathrm{arctg}\frac{4}{3}.$$

Решение:

Пусть $\arcsin\frac{24}{25}=a$, $a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{24}{25}$, $\cos a>0$;

$\arccos\frac{3}{5}=b$, $b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos b=\frac{3}{5}$, $\sin b>0$.

Следовательно, $\sin b=\sqrt{1-\cos^2 b}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

Тогда, $\mathrm{tg}a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{4}{3}$, $a=\mathrm{arctg}\frac{4}{3}=\arccos\frac{3}{5}=b$.

Т.к. $a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{24}{25}$, $\sin(\pi-2b)=\sin 2b=2\sin b\cos b=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$, то, $\sin a=\sin(\pi-2b)$, $a=\pi-2b$ и все выражение равно

$$A=\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\mathrm{arctg}\frac{4}{3}=a+b+b=\pi-2b+b+b=\pi.$$

Ответ: $A=\pi$.

Задача 24. Доказать тождество $tg55°\cdot tg65°\cdot tg75°=tg85°$.

Решение:

Применим в левой части тождества формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и формулы обратных преобразований.

$$\mathrm{tg}55°\cdot\mathrm{tg}65°\cdot\mathrm{tg}75°=\frac{\sin 55°\cdot\sin 65°}{\cos 55°\cdot\cos 65°}\cdot\mathrm{tg}75°=\frac{\cos 10°-\cos 120°}{\cos 10°+\cos 120°}\cdot\mathrm{tg}75°=$$

$$=\frac{\cos 10°+\frac{1}{2}}{\cos 10°-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{tg}75°=\frac{2\sin 10°\left(\cos 10°+\frac{1}{2}\right)}{2\sin 10°\left(\cos 10°-\frac{1}{2}\right)}\cdot\mathrm{tg}75°=\frac{\sin 20°+\sin 10°}{\sin 20°-\sin 10°}\cdot\mathrm{ctg}15°=$$

$$\frac{2\sin 15°\cos 5°}{2\cos 15°\sin 5°}\cdot\frac{\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{\sin 30°}{\sin 30°}\cdot\frac{\cos 5°}{\sin 5°}=\mathrm{ctg}5°=\mathrm{tg}85°.$$

Что требовалось доказать.

Задача 25. Доказать тождество $\frac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\mathrm{ctg}^4\alpha$.

Решение:

Преобразуем левую часть тождества.

$$\frac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\left(1-\sin^2\alpha\right)\right)}{1-8\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)}=\frac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha\right)}{1-8\sin^2\alpha-1+2\sin^2 2\alpha}=\frac{-8\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{-8\sin^2\alpha+8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{-8\cos^4\alpha}{-8\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=\mathrm{ctg}^4\alpha,\qquad \mathrm{ctg}^4\alpha=\mathrm{ctg}^4\alpha.$$

Что требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 26. Вычислить значение выражения A, если

$$A=\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\mathrm{arctg}\frac{4}{3}.$$

Ответ: $A=\pi$.

Задача 27. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt{2}\,z+1\right)^2-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\,z}{\left(\sqrt[4]{z}-1\right)^2\left(z^{\frac{1}{4}}+1\right)^2+2\left(\sqrt[4]{z}-1\right)\left(z^{\frac{2}{8}}+1\right)+1}-\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ответ: $2z$.

Задача 28. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: 1.

Задача 29. Упростить выражение

$$\left(\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}\right)^2-\frac{(a^2+2)^2}{a^3}.$$

Ответ: 0.

Задача 30. Доказать тождество $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Указание. Применить метод матматической индукции.

Задача 31. Упростить выражение A, если $A=7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots7}_{n}$.

Ответ: $A=\dfrac{7}{9}(10^{n+1}-10-9n)$.

Задача 32. Доказать, что A делится на 31, если $A=5+5^2+5^3+\ldots+5^{2019}$.

Указание. Сгруппировать в группы по три слагаемых.

Задача 33. Доказать, что $A<B$, если $A=2017^{2019}\cdot 2019^{2017}$, $B=2018^{2\cdot 2018}$.

Указание. Оценить выражение A, *представив* $2017=2018-1$ и $2019=2018+1$.

Задача 34. Найти значение выражения $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{4}\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$. *Ответ:* $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Задача 35. Доказать тождеств $\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\mathrm{tg}80^\circ-\mathrm{tg}60^\circ=8\sin 40^\circ$.

Задача 36. Доказать тождество $\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}25^\circ\cdot\mathrm{tg}35^\circ=\mathrm{tg}5^\circ$.

Указание. Привести тождество к виду $\mathrm{tg}25^\circ\cdot\mathrm{tg}35^\circ=\mathrm{tg}5^\circ\cdot\mathrm{ctg}15^\circ$
и преобразовать произведения синусов и косинусов в суммы.

Задача 37. Доказать, что $A<B$, если

$$A=\frac{\cos 2018^0}{\cos 2019^0},\quad B=\frac{\cos 2020^0}{\cos 2021^0}.$$

Указание. Оцените разность выражений A и B.

1.3. Последовательности. Прогрессии

Задача 38. Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Решение:

Длина стороны первого квадрата равна 2, его площадь равна 4.

Длина стороны второго квадрата равна $\sqrt{2}$ (т. Пифагора), его площадь равна 2.

Длина стороны третьего квадрата равна 1, его площадь равна 1.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$, его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}$. И т. д.

Получим последовательность: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$, т.е. $|q|<1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$, то $S=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$.

Ответ: 8**.**

Задача 39. С помощью арифметической прогрессии найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение:

Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, … образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=6$. Общий член прогрессии определяется по формуле $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, и, так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102+(n-1)\cdot 6\le 999,\ n\le 1+\frac{999-102}{6}=1+\frac{897}{6}=150.5.$$

Таким образом, число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n=150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\frac{2\cdot 102+149\cdot 6}{2}\cdot 150=82305.$$

Ответ: 82305.

Задача 40. Три числа (третье из которых равно 12), образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение:

Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a,b,c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac=b^2$; если три числа (a,b,c) образуют арифметическую прогрессию, то $a+c=2b$.

Обозначим x и y – первые два числа. Тогда получим

$$\begin{cases} 12x=y^2, \\ x+9=2y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем: $x=2y-9$.

Подставляя x в первое уравнение, получим $(2y-9)12=y^2$, $y^2-24y+108=0$, $y_1=18$, $y_2=6$. Тогда, $x_1=27$, $x_2=3$.

Ответ: Две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12;
две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9.

Задача 41. Решить уравнение $x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}=16$.

Решение:

ОДЗ: $x\geq 0$.

Перепишем левую часть уравнения в виде

$x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ имеем

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Получим уравнение $x^2=16$, откуда, учитывая ОДЗ, $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Задача 42. Один из углов треугольника равен $120°$, а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

Решение:

Обозначим длины сторон треугольника в порядке возрастания через a, $a+d$, $a+2d$. Тогда наибольшая сторона расположена против наибольшего угла треугольника, равного $120°$ (см. рис.1).

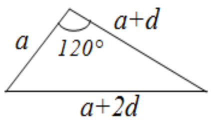


Рис.1

Применим теорему косинусов: $(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2-2a(a+d)\cos 120°$,

$$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2+2a(a+d)\cdot\frac{1}{2},$$

$$a^2+4ad+4d^2=a^2+a^2+2ad+d^2+a^2+ad,$$

$$a^2+4ad+4d^2=3a^2+3ad+d^2,$$

$$2a^2-ad-3d^2=0.$$

Разделив на d^2, $(d^2\neq 0)$, получим

$$2\left(\frac{a}{d}\right)^2-\left(\frac{a}{d}\right)-3=0.$$

Учитывая, что $a>0$, $d>0$, получим $\frac{a}{d}=\frac{3}{2}$.

Тогда имеем $a=\frac{3}{2}d$, $a+d=\frac{3}{2}d+d=\frac{5}{2}d$, $a+2d=\frac{3}{2}d+2d=\frac{7}{2}d$.

Найдем отношение длин сторон треугольника:

$a:(a+d):(a+2d)=\frac{3}{2}d:\frac{5}{2}d:\frac{7}{2}d$,

$a:(a+d):(a+2d)=3:5:7$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Ответ: Все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Задача 43. Найти значение выражения A, если

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{3}\ldots\right).$$

Решение:

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{3}\ldots\right)=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\ldots\right).$$

Заметим, что выражение $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.

Следовательно,

$$A=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=4\cdot(3-4)\cdot\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=-6\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Ответ: $A=-6\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Задача 44. Найти два различных корня x_1, x_2 уравнения $x^2-6bx+c=0$, если числа b, x_1, x_2, c образуют геометрическую прогрессию.

Решение:

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=c, \\ x_1+x_2=6b; \end{cases}$

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии, тогда $x_1=bq,\ x_2=bq^2,\ c=bq^3$.

Система примет вид $\begin{cases} bq\cdot bq^2=bq^3, \\ bq+bq^2=6b; \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-b=0, \\ q+q^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1=0, b_2=1, \\ q+q^2-6=0; \end{cases}$

Так как b первый член геометрической прогрессии, то $b_1=0$ не подходит по смыслу.

Если $b=1$, то $q^2+q-6=0$, $q_1=-3, q_2=2$.

Если $q=-3$, то $x_1=-3, x_2=9$.

Если $q=2$, то $x_1=2, x_2=4$.

Ответ: $x_1=-3, x_2=9$ или $x_1=2, x_2=4$.

Задача 45. В первый год разработки месторождения было добыто 600 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 250тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.

Решение:

Пусть n – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто

$$600+\frac{3}{2}\cdot 600+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 600+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 600+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 600 \text{ тыс. т нефти.}$$

И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение:

$$600\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=35250,\quad 600\cdot\left(12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2\right)=35250,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{81}{16},\quad n=4.$$

Тогда общее количество лет будет равно 14.

Ответ: 14.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 46. Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Ответ: 2.

Задача 47. Числа, равные произведениям первого члена арифметической прогрессии на второй, второго на третий и третьего на первый в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Ответ: -2.

Задача 48. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти острые углы этого треугольника.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\arccos\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 49. В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий – на $\dfrac{1}{2}$ очка больше, чем за предыдущий промах. Определить, сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков.

Ответ: 21.

Задача 50. Решить уравнение $x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}=64$.

Ответ: $x=16$.

2. Уравнения и системы уравнений

2.1. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Задача 51. Доказать, что уравнение $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ не имеет решений.

Решение:

$$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=x^4-4x^3+4x^2+8x^2-24x+24=$$
$$(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=(x^2-2x)^2+8((x-1.5)^2+0.75)=$$
$$(x^2-2x)^2+8(x-1.5)^2+6\neq 0.$$

Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать.

Задача 52. Решить уравнение $x^4+8x^3+18x^2+11x+2=0$.

Решение:

Разложим левую часть уравнения на множители, представив её в виде:

$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$, где a,b,c,d определяются методом неопределённых коэффициентов. Тогда получим

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(b+d+ac\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd.$$

Одно из решений системы (находить все её решения не обязательно):

$$\begin{cases} a+c=8, \\ b+d+ac=18, \\ ad+bc=11, \\ bd=2. \end{cases}$$

Находим неизвестные коэффициенты (все положительные и целые): $a=5$, $b=2$, $c=3$, $d=1$.

Значит, $x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+5x+2\right)\left(x^2+3x+1\right)$.
Данное уравнение равносильно двум уравнениям:
$x^2+5x+2=0$ или $x^2+3x+1=0$.

Отсюда получим: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Задача 53. Решить уравнение $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2)$.

Решение:
Область определения уравнения $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
Приводя к общему знаменателю выражение в левой части уравнения, получим:

$\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2)$,

$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}=(x-1)\cdot(x-2)$,

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=x^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)$,

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)-x^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)=0$,

$(x-1)\cdot(x-2)\left((x+1)(x+2)-x^2\right)=0$.

Корни этого уравнения равны: $x=1$, $x=2$.

Другие корни определяются из уравнения $(x+1)\cdot(x+2)=x^2$, $x^2+3x+2=x^2$, $3x+2=0$, $x=-\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $x=1$, $x=2$, $x=-\dfrac{2}{3}$.

Задача 54. Решить уравнение

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3}.$$

Решение:

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=2+\sqrt{3}-4$,

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=\sqrt{3}-2$, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=-2-\sqrt{3}$.

Тогда, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}=2-\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=2+\sqrt{3}$,

$\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$, $2x-\sqrt{3}=-2-\sqrt{3}$, $2x=-2$, $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Задача 55. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\dfrac{4-|x|}{|x|-1}\right|=a$ имеет ровно 4 корня.

Решение:

Определим возможные значения параметра a и переменной x:

$$\left|\frac{4-|x|}{|x|-1}\right| = a\,,\ |x| \neq 1,\ |x| \neq 0\,,\ a > 0\,. \qquad (*)$$

Используя свойство модуля, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 4-|x| = a|x| - a, \\ 4-|x| = -a|x| + a; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} |x|(1+a) = 4+a, \\ |x|(1-a) = 4-a; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} |x| = \dfrac{4+a}{1+a}, \\ |x| = \dfrac{4-a}{1-a}; \end{array}\right. \qquad (**)$$

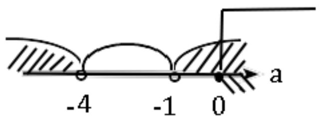
Отсюда получим 4 решения системы:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4+a}{1+a}, \\ x = \pm\dfrac{4-a}{1-a}; \end{array}\right.$$

Проверим выполнение условий (*) и (**)

$$\begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{4+a}{1+a} > 0, \\ \dfrac{4-a}{1-a} > 0. \end{cases}$$

Решая каждое неравенство методом интервалов (см. рис.2), получим



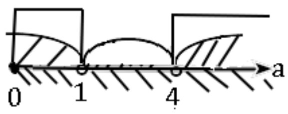


Рис. 2

$$\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > -1, \\ a < -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Т.о., $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

Задача 56. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим первое уравнение системы квадратным относительно неизвестной x. Перепишем его в виде: $2x^2 - (7y-13)x + 3y^2 - 4y - 7 = 0$. Тогда получим

$$D = (7y-13)^2 - 4\cdot 2\cdot\left(3y^2 - 4y - 7\right) = 49y^2 - 182y + 169 - 24y^2 + 32y + 56 =$$

$$= 25y^2 - 150y + 225 = (5y-15)^2\,.$$

$$x = \frac{7y-13-5y+15}{4} = \frac{2y+2}{4} = \frac{y+1}{2} \text{ или } x = \frac{7y-13+5y-15}{4} = \frac{12y-28}{4} = 3y-7\,.$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{1}{2}(y+1),\\ x^2+xy+y^2=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y-7,\\ x^2+xy+y^2=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему.

Если $x=\frac{1}{2}(y+1)$, то $\frac{1}{4}(y+1)^2+\frac{1}{2}y(y+1)+y^2-3=0$.

$$y^2+2y+1+2y^2+2y+4y^2-12=0,$$

$$7y^2+4y-11=0,\ (7+4-11=0),$$

$$y_1=1,\ x_1=\frac{1}{2}(1+1)=1;$$

$$y_2=-\frac{11}{7},\ x_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{11}{7}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{2}{7}.$$

Решим вторую систему.

Если $x=3y-7$, то $(3y-7)^2+y(3y-7)+y^2-3=0$.

$$13y^2-49y+46=0,\ \left(D=49^2-4\cdot13\cdot46=2401-2392=9\right),$$

$$y_3=\frac{49-3}{26}=\frac{23}{13},\ x_3=3\cdot\frac{23}{13}-7=-\frac{22}{13};$$

$$y_4=\frac{49+3}{26}=2,\ x_4=3\cdot2-7=-1.$$

Ответ: $(1;1),(-1;2),\left(-\frac{2}{7};-\frac{11}{7}\right),\left(-\frac{22}{13};\frac{23}{13}\right)$.

Задача 57. Найти наименьший корень уравнения

$$x^3+2ax^2-(a+1)^2x-2a(a+1)^2=0.$$

Решение:

Преобразуем уравнение.

$x^2(x+2a)-(a+1)^2(x+2a)=0$,

$(x+2a)\left(x^2-(a+1)^2\right)=0$,

$(x+2a)(x-a-1)(x+a+1)=0$.

Корни этого уравнения равны: $x_1=-2a$, $x_2=-a-1$, $x_3=a+1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_1=-2a$.

Для этого решим систему:

$$\begin{cases}-2a<a+1,\\ -2a<-a-1;\end{cases}\ \begin{cases}-3a<1,\\ -a<-1;\end{cases}\ \begin{cases}a>-\frac{1}{3},\\ a>1.\end{cases}$$

Отсюда получим, $a>1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_2=-a-1$.

Решим систему:

$$\begin{cases}-a-1<a+1,\\ -a-1<-2a;\end{cases}\ \begin{cases}-2a<2,\\ a<1;\end{cases}\ \begin{cases}a>-1,\\ a<1.\end{cases}$$

Отсюда получим, $-1<a<1$.

Найдем значения параметра a, при которых наименьшим корнем является $x_3=a+1$.

Решим систему:

$$\begin{cases}a+1<-a-1,\\ a+1<-2a;\end{cases}\ \begin{cases}2a<-2,\\ 3a<-1;\end{cases}\ \begin{cases}a<-1,\\ a<-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Отсюда получим, $a<-1$.

Ответ: $x=a+1$ при $a<-1$,
$x=-a-1$ при $-1<a<1$,
$x=-2a$ при $a>1$.

Задача 58. Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств: $\begin{cases} x+y=a+1, \\ xy=a^2-7a+16. \end{cases}$ Найти при каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

Решение:

Итак, имеем

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2(a^2-7a+16)=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33.$$

Отсюда получим, что при $a=8$ сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение, равное 33.

Далее, учитывая условие существования действительных корней, удовлетворяющих заданной системе равенств, решив систему относительно неизвестной x:

$x^2-(a+1)x+a^2-7a+16=0$,

$D=(a+1)^2-4(a^2-7a+16)=-3a^2+30a-63$,

$-3a^2+30a-63\geq 0$,

Отсюда получим, $3\leq a\leq 7$.

На промежутке $3\leq a\leq 7$ функция $f(a)=-(a-8)^2+33$ возрастает и наибольшее значение достигает при $a=7$ и равно 32.

Ответ: $a=7$.

Задача 59. Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(7+a), \\ (x+y)^2=50 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение:

Построим график функции, описываемой вторым уравнением.

Это две прямые: $|x+y|=\sqrt{50}$, $x+y=\pm\sqrt{50}$,

$$\left[\begin{array}{l} y=-x+\sqrt{50}, \\ y=-x-\sqrt{50}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение системы описывает окружность с радиусом $R=\sqrt{2(7+a)}$, $a>-7$, и центром в точке $O(0;0)$.

Исходная система имеет равно два решения, если графики функций будут иметь две общие точки, т.е. обе прямые будут касаться окружности (рис.3). Тогда расстояние от начала координат до каждой прямой равно радиусу окружности. Так как прямые отсекают в первой и третьей четвертях прямоугольные равнобедренные треугольники, то точки касания – середины гипотенуз прямоугольных треугольников (точки A и B).

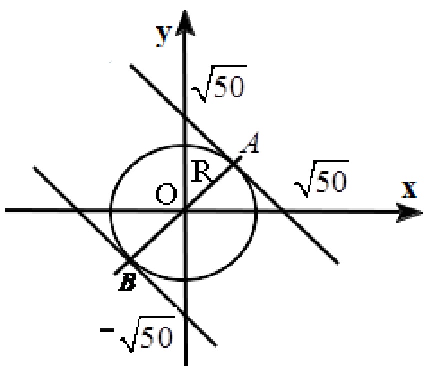


Рис. 3

Найдем координаты точки: $A\left(\frac{\sqrt{50}}{2};\frac{\sqrt{50}}{2}\right)$.

$$R = |OA| = \sqrt{2(7+a)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2},$$

$\sqrt{2(7+a)} = 5$,

$7 + a = 12{,}5$;

$a = 5{,}5$.

Ответ: $a = 5{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 60. Решить уравнение

$$4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 61. Пусть x_1 и x_2 – различные корни уравнения $3x^2 + 2x + a - 1 = 0$. Найти все значения параметра a, при которых выполнено неравенство $-1 \le x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \le 2$.

Ответ: $-10/3 \le a < 4/3$.

Задача 62. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3) = x(x^2 - 4)$.

Ответ: $x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$.

Задача 63. Доказать, что уравнение $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$ Не имеет действительных решений.

Задача 64. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7 - |x|}{|x| - 2}\right| = a$ имеет ровно 4 корня.

Ответ: $a > 3{,}5$.

Задача 65. Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств:

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

Найти при каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение.

Ответ: $a = 5$.

Задача 66. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

Ответ: $\{(27, 1), (-1, -27)\}$.

Задача 67. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 7, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(0; \pm\sqrt{\frac{7}{4}}\right), \left(\pm 2\sqrt{\frac{7}{10}}; \pm\sqrt{\frac{7}{10}}\right)\right\}$.

Задача 68. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1, \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$

Ответ: Система уравнений не имеет решений.

Задача 69. Найти значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 2x + (a-1)y = 3, \\ (a+1)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $a = -3$.

Задача 70. Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(10+a), \\ (x+y)^2 = 50 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Ответ: 2,5.

2.2. Тригонометрические уравнения и системы уравнений

Задача 71. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$.

Решение:

ОДЗ уравнения $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x$ определяется неравенствами:

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ x \neq \pi l,\ k, l \in Z$.

Преобразуем левую часть уравнения.

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin^4 x - 1 + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(\cos^2 x - 1) + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$
$$= \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при $\sin^2 2x = 1$. Тогда имеем $2x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$, и $x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен $2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x = 2 - (16x^2 - 8\pi x + \pi^2) = 2 - (4x - \pi)^2$ и достигает наибольшего значения, равного 2, при $(4x - \pi)^2 = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Сравнивая полученные результаты, получим, что равенство левой и правой частей уравнения возможно только при значении $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 72. Решить уравнение $2|\sin x|\cos(2\pi - x) = \cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)$.

Решение:

Воспользуемся формулами приведения и равенством $\sin^2 x = |\sin x|^2$.

$$2|\sin x|\cos x = \sin^2 x,$$

$2|\sin x|\cos x = |\sin x|^2$,

$|\sin x| = 0$ или $2\cos x = |\sin x|$.

Если $|\sin x| = 0$, то $x = \pi n$, $n \in Z$.

При $\sin x \geq 0$ имеем $2\cos x = \sin x$, $\mathrm{tg} x = 2$, $x = \mathrm{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$.

Учитывая, что $\sin x \geq 0$, то $x = \mathrm{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Аналогично, при $\sin x < 0$ имеем $2\cos x = -\sin x$, $\mathrm{tg} x = -2$, $x = -\mathrm{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in Z$ (учитывая, что $\sin x < 0$).

Ответ: $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm \mathrm{arctg} 2 + 2\pi k$, $k, n \in Z$.

Задача 73. Найти корни уравнения $\dfrac{\cos\left(x + \dfrac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

Решение:

ОДЗ: $4\pi^2 - x^2 > 0$, $x \in (-2\pi; 2\pi)$.

Решим уравнение.

$\cos\left(x + \dfrac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2 = 0$,

$\cos\left(x + \dfrac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2$.

Учитывая, что $\cos\left(x + \dfrac{41\pi}{4}\right) = \cos\left(x + 10\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

получим уравнение: $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2$.

Сумма значений тригонометрических функций, косинуса и синуса, равна -2 только при минимальных значениях данных функций, т.е. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ и $\sin 2x = -1$, тогда имеем

$$\begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin 2x = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \ l \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi l, \ l \in Z. \end{cases}$$

Определим значения корней $x \in (-2\pi; 2\pi)$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z, \ \text{при}\, k = -1, k = 0; \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi l, \ l \in Z, \ \text{при}\, l = -1, l = 0, l = 1, l = 2. \end{cases}$$

Т.е. это корни $\begin{cases} x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}, \\ x = \left\{-\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}. \end{cases}$

Таким образом, уравнение имеет два корня $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Ответ: $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Задача 74. Определить количество корней уравнения $\sin 3x = x^3$.

Решение:

Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$ (рис. 4).

Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно начала координат точках.

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена и периодична (ее период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

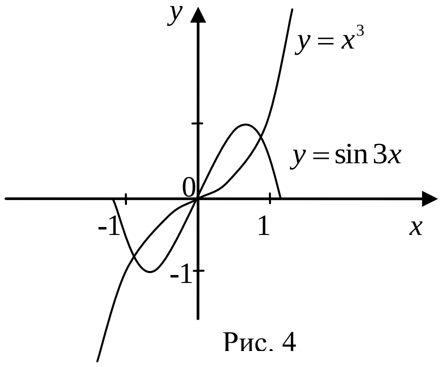


Рис. 4

Ответ: 3 .

Задача 75. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x. \end{cases}$

Решение:

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x \geq 0$, тогда получим:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $\sin x + \cos x = 1$,

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 1,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Если $n = 2k$, то $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Откуда $x_1 = 2\pi k, k \in Z$.

Если $n = 2k + 1$, то $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$. Откуда $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Подставляя найденные значения x в первое уравнение системы, найдем неизвестное y.

Если $x_1 = 2\pi k, k \in Z$, то $1 + \cos y = 0$, $\cos y = -1$, $y_1 = \pi + 2\pi m, m \in Z$.

Если $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, то $\cos y = 1$, $y_2 = 2\pi l, l \in Z$.

Следовательно, исходная система имеет два решения:

$(2\pi k; \pi + 2\pi m)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l\right)$, $k.m, l \in Z$.

Ответ: $(2\pi k; \pi + 2\pi m)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi l\right)$, $k.m, l \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 76. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $k \in Z$, $n \in Z$.

Задача 77. Решить уравнение $\cos^3 x - \cos x = \sin 2x$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Задача 78. Найти все корни уравнения $(\sin 2x + \cos 2x + 1)\cdot\sqrt{(\pi - x)\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = 0$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$.

Задача 79. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k, \ k \in Z. \end{cases}$

Задача 80. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3} + 2\right) + 2\pi k, \\ y = \frac{2\pi}{3} - 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3} + 2\right) - 2\pi k; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \\ y = \frac{\pi}{3} - 2\pi n; \ k, n \in Z. \end{cases}$

2.3. Показательные и логарифмические уравнения и системы уравнений

Замечание. При решении логарифмических и показательных уравнений необходимо найти область допустимых значений (ОДЗ) и сделать проверку.

Задача 81. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{0{,}5} + \sqrt[3]{4}\right)^x = \frac{27}{2}$.

Решение: ОДЗ: $x \in R$.
Преобразуем уравнение.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2^2}\right)^x = \frac{27}{2},\ \left(\frac{1+2}{\sqrt[3]{2}}\right)^x = \frac{27}{2},\ \left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = \frac{27}{2},\ x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Задача 82. Решить уравнение $\log_3(x-2) = 1 - \log_3 x$.

Решение:
ОДЗ:

$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (2; +\infty)$.

Тогда имеем $\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 3$,

$\log_3(x-2)x = \log_3 3$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

По теореме Виета:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = -3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$

Очевидно, что $x_2 = -1 \notin (2; +\infty)$, т.е. ОДЗ.

Проверка. Подставляем $x_1 = 3$ в левую и правую части уравнения по отдельности:
$\log_3(3-2) = 0;\ 1 - \log_3 3 = 1 - 1 = 0;\ 0 \equiv 0$.

Ответ: $x = 3$.

Задача 83. Решить уравнение $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

Решение:
ОДЗ:
$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x \neq 0; \end{cases} \quad x \in (0;1) \cup (1, +\infty).$$

Запишем уравнение в виде $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$.
Т.к. показательная функция строго монотонна, данное уравнение эквивалентно уравнению:
$$\frac{3}{\log_3 x} = -6, \ \log_3 x = -\frac{1}{2}, \ x = 3^{-\frac{1}{2}}, \ x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 84. Решить уравнение $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}} (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$.

Решение:
ОДЗ: $5x^2 - 2x - 3 > 0$, $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty)$.

Упростим левую часть уравнения, заменив основание $\frac{1}{6}$ на 6, и избавимся от корня, получим
$$\frac{1}{2} x^2 \log_6 (5x^2 - 2x - 3) + x \log_6 (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x,$$
$$\log_6 (5x^2 - 2x - 3)\left(\frac{1}{2} x^2 + x\right) - (x^2 + 2x) = 0,$$
$$(x^2 + 2x)\left(\frac{1}{2} \log_6 (5x^2 - 2x - 3) - 1\right) = 0,$$
$$(x^2 + 2x) = 0 \text{ или } \frac{1}{2} \log_6 (5x^2 - 2x - 3) - 1 = 0.$$
Следовательно, для уравнения $(x^2 + 2x) = 0$ корнями являются $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.
Из уравнения $\log_6 (5x^2 - 2x - 3) = 2$, $5x^2 - 2x - 39 = 0$ имеем $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{13}{5}$.

Учитывая ОДЗ, окончательно получим $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{13}{5}$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{13}{5}$.

Задача 85. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y + 7) + 0{,}5x^3 = \dfrac{6x \cdot \ln(y + 7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2 (y + 7) + 1. \end{cases}$$

Решение:
ОДЗ. $y + 7 > 0$, $y > -7$.
Проведем преобразования системы.
$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y + 7) + 0{,}5x^3 = \dfrac{6x \cdot \ln(y + 7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2 (y + 7) + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3 (y + 7) + 0{,}5x^3 = 6x \cdot \log_{27} (y + 7) + x^2, \\ x^2 (y + 7) - 4x(y + 7) + 3(y + 7) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) - 2x \cdot \log_3(y+7) = -0{,}5x^3 + x^2, \\ x^2(y+7) - 4x(y+7) + 3(y+7) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)\log_3(y+7) = -0{,}5x^2(x-2), \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-2)(\log_3(y+7) + 0{,}5x) = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x = 0, \\ 3(y+7) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y + 7 = -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -7\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

Не входит в ОДЗ.

2) $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ -(y+7) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y + 7 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -6; \end{cases}$

$(2;-6)$.

3) $\begin{cases} \log_3(y+7) + 0{,}5x = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3^{-0{,}5x} - 7, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3^{-0{,}5x} - 7, \\ 3^{-0{,}5x}(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$

$3^{0{,}5x} = -x^2 + 4x - 3$,

$3^{\frac{x}{2}} = -(x-2)^2 + 1$.

Графики функций $f_1(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, $f_2(x) = -(x-2)^2 + 1$ не пересекаются (рис. 5), т.е. данная система решений не имеет.

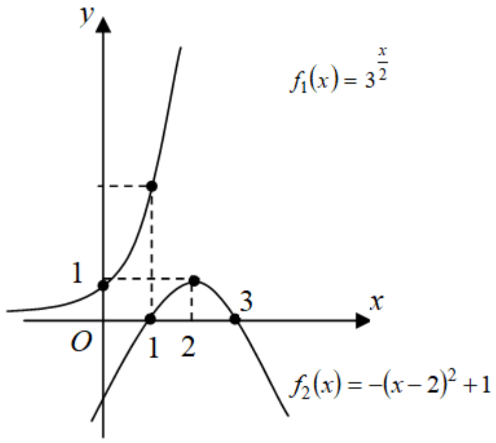


Рис. 5

Т.о. система уравнений имеет одно решение $(2;-6)$.

Ответ: $(2;-6)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 86. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3, \\ 2xy - 8x = x^2(y-4) + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1;5)$.

Задача 87. Решить систему $\begin{cases} x^y = 9; \\ (324)^{\frac{1}{y}} = 2\,x^2. \end{cases}$

Ответ: (3, 2).

Задача 88. Решить систему $\begin{cases} 7^y \log_5 x = -14; \\ 7^y + \log_5 x = 5. \end{cases}$

Ответ: $x = \dfrac{1}{25}$, $y = 1$.

Задача 89. Найти количество корней уравнения

$5^{\frac{4\cos x+1}{3\cos x+2}} - 4 = 5^{\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}}$, принадлежащих отрезку $\left[-\pi, \dfrac{15\pi}{2}\right]$.

Ответ: 4.

Задача 90. Найти все пары вещественных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$.

3. Неравенства

3.1. Алгебраические неравенства

Задача 91. Решить неравенство $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

Решение:

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$$

При ограничениях $x \neq 4$ и $x \neq 2{,}5$ умножим обе части неравенства на положительную величину $\dfrac{|x-4|}{|x-3|+|x-2|}$.

Получим равносильное неравенство $\dfrac{(x-4)^2 - |(x-1)(x-4)|}{(x-3)^2 - (x-2)^2} < 1$.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 - 8x + 16 - |x^2 - 5x + 4|}{-2x+5} - 1 < 0,$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16 - |x^2 - 5x + 4| + 2x - 5}{-2x+5} < 0,$$

$$\frac{x^2 - 6x + 11 - |x^2 - 5x + 4|}{2x-5} > 0.$$

1) Пусть $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, тогда $x \in (-\infty; 1] \cup (4; +\infty)$.

Неравенство примет вид

$\dfrac{x^2 - 6x + 11 - x^2 + 5x - 4}{2x-5} > 0$, $\dfrac{-x+7}{2x-5} > 0$, $2{,}5 < x < 7$, т.е. $x \in (2{,}5; 7)$.

Учитывая, что $x \in (-\infty; 1] \cup (4; +\infty)$, получим $x \in (4; 7)$.

2) Пусть $x^2 - 5x + 4 < 0$, тогда $x \in (1; 4)$.

Неравенство примет вид

$\dfrac{x^2 - 6x + 11 + x^2 - 5x + 4}{2x-5} > 0$, $\dfrac{2x^2 - 11x + 15}{2x-5} > 0$, $\dfrac{(x-3)(2x-5)}{2x-5} > 0$, $x > 3$, т.е. $x \in (3; +\infty)$.

Учитывая, что $x \in (1; 4)$, получим $x \in (3; 4)$.

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x \in (3;4) \cup (4;7)$.

Ответ: $(3;4) \cup (4;7)$.

Задача 92. При каком значении параметра a длина отрезка, являющегося областью решений неравенства $x^2 - 4 \le a$, равна 6?

Решение:

Запишем неравенство $x^2 - 4 \le a$ в виде $x^2 \le a + 4$.

ОДЗ: $a + 4 \ge 0$, $a \ge -4$.

Тогда имеем $|x| \le \sqrt{a+4}$, $-\sqrt{a+4} \le x \le \sqrt{a+4}$.

Отсюда длина отрезка, являющегося областью решений неравенства $x^2 - 4 \le a$, равна $2\sqrt{a+4}$.

Следовательно, $2\sqrt{a+4} = 6$, $a + 4 = 9$, $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

Задача 93. Доказать, что при любом натуральном n, $n > 1$, справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Решение:

Докажем неравенство методом математической индукции.

При $n = 2$ неравенство очевидно: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.

Предположим, что исходное неравенство имеет место при $n = k$, то есть $\sqrt{k} < S_k < 2\sqrt{k}$, где $S_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Докажем теперь, что $\sqrt{k+1} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1}$, где $S_{k+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Имеем: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

$S_{k+1} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$, так как $\sqrt{k^2 + k} > k$,

$S_{k+1} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$, так как $2\sqrt{k^2 + k} < 2k + 1$.

Таким образом, $\sqrt{k+1} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1}$.

Следовательно, двойное неравенство доказано для любого $n > 1$.

Что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 94. Решить неравенство $\dfrac{|x-5| - |x+4|}{|x-2| - |x+1|} < \dfrac{|x-2| + |x+1|}{|x+4|}$.

Ответ: $(-13;-4) \cup (-4;-1)$.

Задача 95. Решить неравенство $\dfrac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2 - x} < x^2$.

Ответ: $(-\infty;-2) \cup [-1;1)$.

Задача 96. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |5x + 3| \le 7$.

Ответ: $x \in \left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$.

Задача 97. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее двойному неравенству

$$\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}.$$

Ответ: $x=4$.

Задача 98. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}>2$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.

Задача 99. Найти решения неравенства $x^2-(a+1)x+a\ge 0$ при разных значениях параметра a.

Ответ: При $a<1$, $x\in(-\infty,a]\cup[1,\infty)$;
при $a>1$, $x\in(-\infty,1]\cup[a,\infty)$;
при $a=1$, $x\in R$.

Задача 100. Найти все значения параметра k, при которых неравенство $x^2+2kx+|2k+3|>0$ верно для всех значений x.

Ответ: $-1<k<3$.

3.2. Тригонометрические, логарифмические и показательные неравенства

Задача 101. Решить неравенство $2\sin 6x\cos 3x+\cos 6x<-1$.

Решение:

Запишем неравенство в виде $2\sin 6x\cos 3x+1+\cos 6x<0$.

Приведем тригонометрические функции к одинаковому аргументу:

$1+\cos 6x=2\cos^2 3x$, $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x$.

Тогда получим, что $4\sin 3x\cos^2 3x+2\cos^2 3x<0$,

$$(2\sin 3x+1)\cos^2 3x<0.$$

Так как $\cos^2 3x\ge 0$, то получим равносильные неравенства

$$\begin{cases}2\sin 3x+1<0,\\ \cos 3x\ne 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin 3x<-\dfrac{1}{2},\\ \cos 3x\ne 0;\end{cases},$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x\ne\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x\ne-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\end{array}\right.(n\in Z),\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3},\\ x\ne\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3},\\ x\ne-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3};\end{cases}\end{array}\right.(n\in Z)$$

Т.о. $-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}<x<-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in Z$, где $x\ne-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$.

$$x\in\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3};-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3};-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{3}\right), n\in Z$.

Задача 102. Решить неравенство $\dfrac{4\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1}{\left(\dfrac{1}{2}-\cos x\right)^2}>0$.

Решение:

ОДЗ: $\dfrac{1}{2}-\cos x\neq 0$, $\cos x\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство равносильно неравенству

$4\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1>0$.

Воспользуемся формулой $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$.

Получим неравенство $2\left(\sin x+\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)+\sqrt{3}+1>0$.

$2\sin x-\dfrac{2\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}+1>0$, $\sin x>-\dfrac{1}{2}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

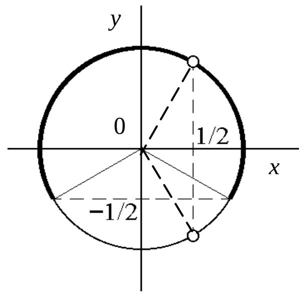


Рис. 7

Учитывая ОДЗ (см. рис. 7), получим

$x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(+\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Ответ: $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(+\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Задача 103. Найти все значения параметра a, при которых решения неравенства $2^{|x|+a}<\dfrac{1}{2}$ заполняют промежуток $(-3;3)$.

Решение: Преобразуем неравенство к виду $2^{|x|+a}<2^{-1}$. В силу строгого возрастания показательной функции с основанием 2, полученное неравенство равносильно неравенству $|x|+a<-1$, или $|x|<-1-a$, или, раскрывая модуль, $1+a<x<-1-a$.

По условию $1+a=-3$ и $-1-a=3$, откуда $a=-4$.

Ответ: $a=-4$.

Задача 104. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\neq 1,\\ \log_{x-1}9>0,\\ \log_2\log_{x-1}9>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-1>0,\\ x\neq 2,\\ \log_{x-1}9>\log_{x-1}1,\\ \log_{x-1}9>1;\end{cases}$

так как неравенство $\log_{x-1}9>\log_{x-1}1$ выполняется только при $x-1>1$, поэтому ОДЗ (рис.8)

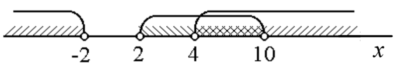


Рис. 8

$\begin{cases}x>1,\\ x\neq 2,\\ x-1>1,\\ \log_{x-1}9>\log_{x-1}(x-1);\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\ x\neq 2,\\ x>2,\\ x-1<9;\end{cases}$ $x\in(2;10)$.

Исходное неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>\log_{\frac{1}{2}}1$. Основание логарифма меньше единицы, поэтому при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный:

$\log_2\log_{x-1}9<1$, $\log_{x-1}9<2$, $9<(x-1)^2$, $(x-1)^2-3^2>0$, $(x-4)(x+2)>0$.

Учитывая ОДЗ, имеем $x\in(4;10)$.

Ответ: $x\in(4;10)$.

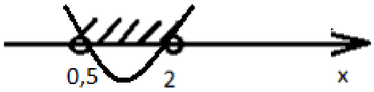
Ответ: $a=-4$.

Задача 105. Найти сумму корней уравнения $(\cos 2\pi x-5\cos\pi x-2)\cdot\log_3\left(5x-2-2x^2\right)=0$.

Решение:

ОДЗ: $5x-2-2x^2>0$, $2x^2-5x+2<0$.

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{4}=\frac{5\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}0{,}5,\\2.\end{array}\right.$$



Тогда $x\in(0{,}5;2)$.

Далее решение сводится к решению двух уравнений:

$\cos 2\pi x-5\cos\pi x-2=0$ и $\log_3\left(5x-2-2x^2\right)=0$.

1) $\cos 2\pi x-5\cos\pi x-2=0$, $2\cos^2\pi x-1-5\cos\pi x-2=0$, $2\cos^2\pi x-5\cos\pi x-3=0$,

$$\cos\pi x=\frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot2\cdot3}}{4}=\frac{5\pm7}{4}=\left[\begin{array}{l}3,\\-0{,}5.\end{array}\right.$$

$\cos\pi x=3$ – не имеет решений, т.к. $\cos\pi x\in[-1;1]$

$\cos\pi x=-0{,}5$, $\pi x=\pm\arccos(-0{,}5)+2\pi n,\ n\in Z$,

$\pi x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$, $x=\pm\frac{2}{3}+2n,\ n\in Z$.

Далее ищем решения, входящие в промежуток $x\in(0{,}5;2)$.

$n=0: x=\frac{2}{3}\in(0{,}5;2),\ x=-\frac{2}{3}\notin(0{,}5;2)$,

$n=1: x=\frac{2}{3}+2\notin(0{,}5;2),\ x=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}\in(0{,}5;2)$,

$n=2: x=\frac{2}{3}+4\notin(0{,}5;2),\ x=-\frac{2}{3}+4=\frac{10}{3}\notin(0{,}5;2)$.

2) Решим второе уравнение

$\log_3\left(5x-2-2x^2\right)=0$, $5x-2-2x^2=1$, $2x^2-5x+3=0$,

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot3}}{4}=\frac{5\pm1}{4}=\left[\begin{array}{l}1{,}5\in(0{,}5;2),\\1\in(0{,}5;2).\end{array}\right.$$

Таким образом, получим 4 решения: $\frac{2}{3};\frac{4}{3};1;1{,}5$.

Их сумма $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+1+1{,}5=4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 106. Решить неравенство $|\sin x+\cos x|<1$.

Ответ: $x\in\left(\pi k+\frac{\pi}{2};\pi k+\pi\right),\ k\in Z$.

Задача 107. Решить неравенство $5^{x^3-4x-2}<0{,}04$.

Ответ: $x\,(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

Задача 108. Решить неравенство $5^x-5^{3-x}>20$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

Задача 109. Решить неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$.

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Задача 110. Решить неравенство $\log_2^2(x-1)^2-4\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-24\geq 0$.

Ответ: $x\in\left(1;\frac{9}{8}\right]\cup[5;+\infty)$.

Задача 111. Решить неравенство $\lg\left(10x^2-90\right)-\frac{3}{2}\left(\log_{x^2-6x+9}10\right)^{-1}\leq 1$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[6;+\infty)$.

Задача 112. Решить неравенство $\log_2\left(9-4^x\right)+2x>3$.

Ответ: $x\in(0;1{,}5)$.

Задача 113. Решить неравенство $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$.

Ответ: $(1000;+\infty)$.

Задача 114. Найти область определения функции $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}+\log_3\left(\log_{0,5}(x-2)+2\right)$.

Ответ: $x\in\left(2;\frac{3\pi}{4}\right]$.

4. Задачи по алгебре и геометрии

4.1 «Текстовые» задачи

Задача 115. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполнются нефтью, причем в первую поступает 100 литров в минуту, во вторую – 60 литров в минуту, в третью – 80 литров в минуту. В начальный момент первая цистерна была пуста, вторая и третья цистерны – частично заполнены. Все три цистерны полностью заполнились одновременно. Во сколько раз количество нефти в начальный момент во второй цистерне было больше, чем в третьей?

Решение:

Примем объем цистерны равные V литров. Пусть первоначальный объем нефти второй цистерны равен x, тогда необходимо заполнить $(V-x)$ от ее объема; пусть первоначальный объем нефти третьей цистерны равен y, тогда необходимо заполнить $(V-y)$ от ее объема. Так как все три цистерны полностью заполнились одновременно, то на заполнение первой полностью пустой цистерны потребовалось $0{,}01\cdot V$ минут. Тогда первоначальный объем второй цистерны равен $60\cdot 0{,}01\cdot V=V-x$, $x=0{,}4\cdot V$; первоначальный объем второй третьей цистерны равен $80\cdot 0{,}01\cdot V=V-y$, $y=0{,}2\cdot V$. Следовательно, количество нефти в начальный момент во второй цистерне было в 2 раза больше, чем в третьей.

Ответ: В 2 раза.

Задача 116. Две точки, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 12 минут, причем первая обходит окружность на 10 секунд быстрее, чем вторая. Какую часть окружности проходит за 1 секунду каждая точка?

Решение:

Примем длину окружности за единицу. Обозначим скорости первой и второй точек соответственно через v_1 и v_2 (в долях этой единицы в секунду).

Тогда по первому условию задачи: $v_1-v_2=\frac{1}{12\cdot 60}$, а по второму: $\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}=10$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{v_1-v_2}=12\cdot 60,\\ \dfrac{1}{v_2}-\dfrac{1}{v_1}=10.\end{cases}$$

Для решения системы преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{720}, \\ v_1 - v_2 = 10 v_1 v_2. \end{cases}$$

Далее из первого уравнения системы выразим v_1 через v_2, подставим это выражение во второе уравнение и получим квадратное уравнение:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + \dfrac{1}{720}, \\ 7200 v_2^2 + 10 v_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение $7200 v_2^2 + 10 v_2 - 1 = 0$ имеет только один корень, удовлетворяющий условию задачи, $v_2 = \dfrac{1}{90}$. Тогда имеем $v_1 = \dfrac{1}{80}$.

Ответ: $\dfrac{1}{80}$ и $\dfrac{1}{90}$.

Задача 117. Два школьника вышли одновременно из дома в школу с одинаковой скоростью. Через 3 минуты один из них вспомнил, что забыл дома тетрадь, и побежал обратно со скоростью на 60 метров в минуту больше прежней. Взяв тетрадь, он побежал обратно с той же скоростью и догнал товарища, который шел с первоначальной скоростью, у дверей школы. Расстояние от дома до школы равно 400 метров. Найдите начальную скорость школьников.

Решение:

Обозначим начальную скорость школьников через v м/мин. Тогда за 3 минуты они прошли путь $3v$ м. Следовательно, школьник, который бегал за тетрадью, проделал путь $(400 + 3v)$ со скорость $(v + 60)$м/мин. Второй школьник за тоже время прошел путь $(400 - 3v)$ м со скоростью v м/мин.

Выражая время нахождения школьников в пути двумя способами, получим уравнение:

$\dfrac{400 + 3v}{v + 60} = \dfrac{400 - 3v}{v}$ или $v^2 + 30v - 4000 = 0$, которое имеет только один корень, удовлетворяющий условию задачи, $v = 50$ м/мин или $v = 3$ км/ч.

Ответ: $v = 50$ м/мин или $v = 3$ км/ч.

Задача 118. У автомобиля новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег 16000 км, а на переднем – 24000 км. Какой максимальный пробег можно осуществить на этих колёсах?

Решение:

Будем считать, что скорость роста износа колеса является постоянной и не зависит от того насколько оно давно служит.

Очевидно, что задние колёса изнашиваются в 1,5 раза быстрее передних. Значит, когда задние колёса износятся на 60%, то передние – только на 40%. Это произойдёт после пробега

$0{,}6 \cdot 16000 = 0{,}4 \cdot 24000 = 9600$км.

В этот момент и следует сменить колёса. Оставшийся 40%-й ресурс задних колёс, поставленных спереди, и 60%-й ресурс передних колёс, поставленных сзади, очевидно, исчерпается одновременно, и произойдёт это ещё через 9600 км. Таким образом, максимальный пробег составляет 2·9600 = 19200 км.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Попробовать найти своё.

Ответ: 19200 км.

Задача 119. В спортивном магазине два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 футбольных мячей, 2 баскетбольных мяча и один волейбольный мяч. Футбольный мяч дешевле баскетбольного и дороже волейбольного на одну и ту же сумму. Сколько и каких мячей приобрел тот, кто купил волейбольный мяч?

Решение:

Допустим, что тот, кто купил волейбольный мяч, купил U футбольных и Z баскетбольных мячей. Тогда другой покупатель купил $14 - U$ футбольных мячей и $2 - Z$ баскетбольных мячей. Если c − цена футбольного мяча и она на s ($0 < s < c$) дороже волейбольного, то цена баскетбольного мяча равна $c + s$, а из условия задачи следует, что

$Z(c + s) + Uc + (c - s) = (2 - Z)(c + s) + (14 - U)c$,

$(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s$.

Число Z может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть $Z=0$, тогда из уравнения $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ получим $(15-2U)c=-3s$, $(2U-15)c=3s$. Так как $0<s<c$, следовательно, $0<(2U-15)c<3c$, $0<2U-15<3$, $15<2U<18$, $7{,}5<U<9$. Единственное целое число U, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае $Z=1$ уравнение $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ эквивалентно $(13-2U)c=-s$, $(2U-13)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2U-13)c<c$ $0<2U-13<1$, $13<2U<14$, $6{,}5<U<7$. Очевидно, что никакое целое число U не удовлетворяет получившемуся неравенству.

Рассуждая аналогично при $Z=2$, получим, что уравнение $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ не выполняется ни при каких целых U, т.е. $(11-2U)c=s$, тогда $0<(11-2U)c<c$, $0<11-2U<1$, $-1<2U-11<0$, $10<2U<11$, $5<U<5{,}5$.

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $Z=0$, $U=8$. Значит, купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Ответ: Купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Задача 120. При проведении геологоразведочных работ требуется пробурить скважины типов *A* и *B*. Скважина типа *A* имеет глубину 7 м, типа *B* – 9 м. Расходы на бурение одной скважины типа *A* составляют 50000 руб., а одной скважины типа *B* – 60000 руб. Известно, что суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 329 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 2230000 руб. Найти минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов, которое можно пробурить при заданных условиях.

Решение:

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Предложить другой правильный и обоснованный ход решения задачи и получить правильный ответ.

Пусть x и y – количество скважин типа *A* и *B* соответственно. Тогда $t=x+y$ – суммарное количество скважин. Согласно условиям задачи систему:

$$\begin{cases} 50000x+60000y\le 2230000, \\ 7x+9y\ge 329, \\ t=x+y. \end{cases}$$

Последовательно выполняя преобразования, получим

$$\begin{cases} 5x+6(t-x)\le 223, \\ 7x+9(t-x)\ge 329, \\ y=t-x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t\le \dfrac{223+x}{6}, \\ t\ge \dfrac{329+2x}{9}. \end{cases}$$

Решим систему графически. Изобразим на координатной плоскости Oxt (см. рис.) множество решений системы неравенств, учитывая, что $t>0$, $x>0$.

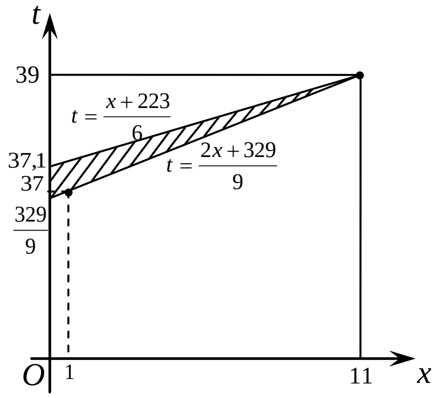


рис. 9

Т.к. $t \in N$ и $x \in N$, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x,t)=(1;37)$, с наибольшей – $(x,t)=(11;39)$.

Ответ: 37; 39.

Задача 121. Была проведена проверка на соответствие стандарту партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандарту, оказалось в интервале от 97,3% до 98,4%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

Решение:

Количество деталей, не соответствующих стандартам, колеблется в пределах от 1,6% до 2,7% от общего количества деталей. Если N – количество деталей в партии, то это означает, что найдется натуральное число (деталей, не соответствующих стандарту) x:

$0{,}016N < x < 0{,}027N$

$$\begin{cases} 0{,}027N > x, \\ 0{,}016N < x; \end{cases} \quad \begin{cases} N > \dfrac{x}{0{,}027}, \\ N < \dfrac{x}{0{,}016}; \end{cases} \quad \begin{cases} N > \dfrac{x \cdot 1000}{27}, \\ N < \dfrac{x \cdot 1000}{16}; \end{cases} \quad \frac{1000x}{27} < N < \frac{125x}{2},\ 37\frac{1}{27}x < N < 62\frac{1}{2}x$$

Наименьшее возможное число N достигается при $x=1 \Rightarrow N=38$.

Ответ: 38.

Задача 122. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

Решение:

Пусть x – количество машин, производимых в сутки первым заводом. Тогда второй завод до реконструкции производил в сутки $\frac{95x}{100}$ машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать $\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}$ машин. Из условий задачи следует следующая система неравенств:

$$\begin{cases} x \le 950, \\ \dfrac{95x}{100}+\dfrac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $847\frac{54}{118} < x \le 950$. Так как числа $\frac{95x}{100}$ и $\frac{23x}{100}$ должны быть целыми, то x должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому $x=900$. Следовательно, первый завод выпускает в сутки 900 автомобилей, а второй завод до реконструкции выпускал $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ автомобилей.

Ответ: 900 и 855.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 123. Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую.

Ответ: $16\frac{4}{11}$.

Задача 124. На вопрос учеников о результатах контрольной работы учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько учеников получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

Ответ: $6; 12$.

Задача 125. Турист преодолел расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй день $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

Ответ: 400км.

Задача 126. На заводе для изготовления одного электродвигателя типа *A* расходуется 2 кг меди и 4 кг свинца; на изготовление одного электродвигателя типа *B* расходуется 3 кг меди и 5 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа произведено на заводе, если известно, что израсходовали 146 кг меди и 258 кг свинца?

Ответ: $22;34$.

Задача 127. Жидкость поступает в сосуд через три крана. Заполнение сосуда только через второй кран требует 0,75 времени, за которое сосуд может наполниться через один первый кран. Наполнение сосуда только через третий кран требует времени на 10 мин больше, чем через один второй кран. Если одновременно открыть все три крана, то сосуд заполнится за 6 мин. За сколько минут наполняет сосуд каждый кран в отдельности?

Ответ: $\frac{56}{3}$, 14, 24 мин.

Задача 128. Статистика знает всё. В одном городе 47,7% всех детей предпочитают электронные форматы книг; 15% – бумажные форматы книг, а оставшимся 37,3% детям безразлично, в каком формате книги. Статистика отдельно среди девочек такова: 23,4%, 28,5% и 48,1% соответственно. Сколько процентов мальчиков предпочитает книги в бумажном формате, если 53,1% из них предпочитают книги в электронном формате?

Ответ: 12%.

Задача 129. Расстояние от пункта *A* до пункта *B* по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем, за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Путь от пункта *B* до пункта *A* против течения реки теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости катера и теплохода в стоячей воде.

Ответ: 12 км/ч; 20 км/ч.

Задача 130. Из города A в город B выехал автобус. Через 20 минут ему вдогонку выехал автомобиль. Автомобиль двигался со скоростью 45 км/ч. После встречи с автобусом автомобиль немедленно повернул обратно. К моменту прибытия автобуса в город B, автомобиль достиг лишь середины пути от места встречи до города A. Определить с какой скоростью двигался автобус, если расстояние между городами составляет 40 км.

Ответ: 30 км/ч.

Задача 131.Температуру можно измерить по шкалам Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что $0°$ по Цельсию соответствует $0°$ по Реомюру и $32°$ по Фаренгейту, а $100°$ по Цельсию соответствует $80°$ по Реомюру и $212°$ по Фаренгейту. Сколько будет градусов по шкале Реомюра, если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадут?

Ответ: $-32°$.

Задача 132. Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 метров одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1м, а в каждую следующую – на 3 м больше, чем в предыдущую. Определить, на какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи.

Ответ: $60°$.

Задача 133. Расстояние между точками A и B равно 270 м. Из точки A в точку B, а затем сразу обратно двигается тело с равномерной скоростью. Второе тело выходит из B на 11с позже первого и с меньшей скоростью. Оно встречается с первым телом два раза: через 10с и 40с после своего выхода из точки B. Определить с какой скоростью двигается второе тело.

Ответ: 6 м/с.

Задача 134. В доме 720 квартир. Однокомнатные квартиры составляют более 12%, но менее 13% от общего числа квартир. 60% от оставшихся были двухкомнатные квартиры, остальные – трехкомнатные. Определить какое количество процентов от общего числа квартир этого дома составили двухкомнатные квартиры.

Ответ: 52,5%.

Задача 135. Была проведена проверка на соответствие стандартам партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандартам, оказалось в интервале от 95,2% до 98,2%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

Ответ: 21.

Задача 136. Производительность одного цеха автомобильных покрышек не превышает 2650 штук в сутки. Производительность второго цеха первоначально составляла 95% от производительности первого цеха. После ввода дополнительной линии во втором цехе производство покрышек увеличилось в сутки на 23% от числа покрышек, выпускаемых в сутки в первом цехе, и стали выпускать более 3000 штук в сутки. Сколько автомобильных покрышек за сутки выпускал каждый цех до реконструкции второго цеха? Предполагается, что каждый цех в сутки выпускает целое число автомобильных покрышек.

Ответ: 2600 и 2470.

Задача 137. Турист отправляется в поход из пункта A в пункт B и обратно. Проходит весь путь за 4 часа 30 минут. Дорога из пункта A в пункт B идет сначала в гору, потом по ровному месту, затем под гору. Определить, на каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 3 км/ч, на ровном месте – 5 км/ч, при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние AB равно 10 км.

Ответ: 5.

4.2.Алгебра и начала анализа

Задача 138. Для функции $y = xe^x$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение:

$y = xe^x$,

$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

$y'' = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2)$,

$y''' = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$,

…

$y^{(n)} = e^x(x+n)$.

Тогда, имеем $y^{(2019)} = e^x(x+2019)$.

Ответ: $y^{(2019)} = e^x(x+2019)$.

Задача 139. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$.

Решение:

Найдем область определения функции $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Вычислим $f'(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{3} = \frac{x^4 - 1}{x^2}$.

Найдем стационарные точки функции: $f'(x) = 0$, $x^4 - 1 = 0$, $x = \pm 1$.

Исследуем производную на знак в области определения функции, результаты исследования представим в виде таблицы:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$-4/3$	$\downarrow$		$\downarrow$	$4/3$	$\uparrow$

Ответ: Функция возрастает на интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$;
убывает на интервалах $(-1,\,0)$ и $(0,\,+1)$;
$x=1$ – точка минимума, $f(1)=\frac{4}{3}$;
$x=-1$ – точка максимума, $f(-1)=-\frac{4}{3}$.

Задача 140. Касательная к параболе $y=x^2$ в точке касания с абсциссой x_0 составляет угол $60°$ с осью Ox. Найти координаты точки касания..

Решение:

Тангенс угла наклона касательной к кривой $y=x^2$ при $x=x_0$ равен значению производной в этой точке, следовательно, $y'(x_0)=2x_0$, $\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}$, откуда $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y_0=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Задача 141. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=\frac{x^2}{2}$ в точках с абсциссами $x_0=1$ и $x_0=1$.

Решение:

Уравнение касательной $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Найдем $f'(x)$: $f'(x)=x$. Вычислим угловые коэффициенты касательных: $k_1=f'(-1)=-1$, $k_2=f'(1)=1$. Поскольку $k_1\cdot k_2=-1$, т.е. касательные перпендикулярны (угол между касательными равен $90°$).

Ответ: $90°$.

Задача 142. К графику функции $y(x)=3x-x^2$ проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=2$, вторая – в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными (рис. 9).

Решение:

Графиком функции $y(x)=3x-x^2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина находится в точке $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$. Т.к. точкой максимума параболы является ее вершина, то абсциссой точки максимума функции $y(x)=3x-x^2$ является $x_1=\frac{3}{2}$.

Уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$.

$y'=\left(3x-x^2\right)'=3-2x$. Т.к. $y'\left(\frac{3}{2}\right)=3-2\cdot\frac{3}{2}=0$ и $y\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=2{,}25$, то уравнение касательной в точке $x_1=\frac{3}{2}$ имеет вид $y=2{,}25$. Т.к. $y'(2)=3-2\cdot 2=-1$ и $y(2)=3\cdot 2-2^2=2$, то уравнение касательной в точке $x_0=2$ имеет вид $y-2=-(x-2)$ или $y=-x+4$.

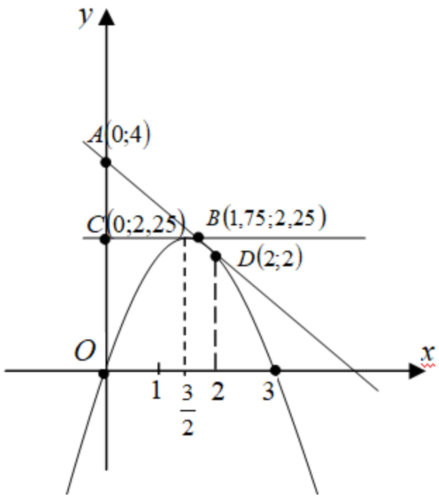


Рис. 10

Из системы уравнений $\begin{cases} y = 2{,}25, \\ y = -x + 4 \end{cases}$ находим координаты точки пересечения касательных к параболе: $B(1{,}75;2{,}25)$.

Касательная $y = 2{,}25$ пересекает ось Oy в точке $C(0;2{,}25)$, касательная $y = -x + 4$ пересекает ось Oy в точке $A(0;4)$. Искомая площадь есть площадь треугольника ABC, поэтому $S = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC|$. Т.к. $|AC| = |2{,}25 - 4| = 1{,}75$, $|BC| = |1{,}75 - 0| = 1{,}75$, то получим $S = \frac{49}{32}$.

Ответ: $\frac{49}{32}$.

Задача 143. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $27\,\text{дм}^3$. При каких размерах параллелепипеда площадь его полной поверхности будет наименьшей?

Решение:

Обозначим стороны основания параллелепипеда через x дм и y дм, высоту $-h$ дм. Тогда объем параллелепипеда равен $x \cdot y \cdot h = 27$.

Площадь S полной поверхности параллелепипеда равна: $S = 2xy + 2xh + 2yh$.

Для определения размеров параллелепипеда, при которых площадь его полной поверхности будет наименьшей, воспользуемся теоремой: *если произведение n положительных чисел постоянно: $x_1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x_n = P$, то их сумма $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ будет наименьшей при равенстве этих чисел.*

Произведение слагаемых суммы $S = 2xy + 2xh + 2yh$ постоянно, так как

$$2xy \cdot 2xh \cdot 2yh = 8 \cdot x^2 y^2 h^2 = 8 \cdot 27^2.$$

Тогда сумма S будет наименьшей при условиях: $2xy = 2xh = 2yh$. Отсюда $x = y = h$. Так как $x \cdot y \cdot h = 27$, то $x^3 = 27$. Следовательно, $x = y = h = 3$.

Ответ: Площадь полной поверхности параллелепипеда будет наименьшей, если каждое из измерений равно 3 дм, т.е. когда параллелепипед является кубом.

Задача 144. Найдите наибольшее значение произведения $P = (x + y + 1)(5 - x)(6 - y)$, если $0 < x < 5$, $0 < y < 6$.

Решение:

На основании неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, получим:

$$\frac{(x + y + 1) + (5 - x) + (6 - y)}{3} \geq \sqrt[3]{(x + y + 1)(5 - x)(6 - y)},$$

$$\sqrt[3]{P} \leq 4, \; P \leq 64.$$

Следовательно, наибольшее значение произведения $P = 64$.

Найдем значения переменных x и y, при которых $P = 64$. Для этого решим систему уравнений (на основании теоремы: *если произведение n положительных чисел постоянно, то их сумма будет наименьшей при равенстве этих чисел*): $x + y + 1 = 5 - x = 6 - y$. Отсюда $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: $P = 64$ при $x = 1$, $y = 2$.

Задача 145. Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2} \cdot (\sin x - \cos x) \cdot \cos 8x - \cos 16x - 7}.$$

Решение:

Преобразуем формулу функции.

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) \cdot \cos 8x - \cos 16x - 7} = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{4(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x) \cdot \cos 8x - (2\cos^2 8x - 1) - 7} =$$

$$= \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{4\sin(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 8x - 2\cos^2 8x - 6}.$$

Обозначим $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = a, \;\; b = \cos 8x, \;\; |a| \le 1, \;\; |b| \le 1$, тогда имеем

$$f(a,b) = \frac{a}{4ab - 2b^2 - 6} = \frac{a}{-2(b^2 - 2ab + a^2) - 6 + 2a^2} = -\frac{a}{2(b-a)^2 + 6 - 2a^2}.$$

$$|f(a,b)| = \left| \frac{a}{2(b-a)^2 + 6 - 2a^2} \right| \le \left| \frac{a}{6 - 2a^2} \right| \le \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{4} \le f(a,b) \le \frac{1}{4}.$$

$f(a,b) = -\frac{1}{4}$ при $(b-a)^2 = 0$ и $a = 1$, отсюда

$$\begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1, \\ \cos 8x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 8x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z; \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{4}, \quad f_{\min} = f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Задача 146. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-4)^2 + 4}$.

Решение:

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Предложить другой правильный и обоснованный ход решения задачи и получить правильный Ответ:

Введем векторы $\bar{a} = \{1 - x; 1\}$ и $\bar{b} = \{x - 4; 2\}$. В соответствии с неравенством $|\bar{a}| + |\bar{b}| \ge |\bar{a} + \bar{b}|$ найдем длины векторов:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(1-x)^2 + 1} = \sqrt{(x-1)^2 + 1}, \; |\bar{b}| = \sqrt{(x-4)^2 + 4}.$$

Найдем координаты суммы векторов и ее длину:

$\bar{a}+\bar{b}=\{1-x+x-4;1+2\}=\{-3;3\}$, $|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Подставляем в неравенство и получим: $y=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+4}\geq 3\sqrt{2}$, т.е. $y\geq 3\sqrt{2}$. Наименьшее значение функции будет тогда, когда достигается знак равенства. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$, т.е. когда

$$\frac{1-x}{x-4}=\frac{1}{2},\ 2(1-x)=x-4,\ x=2.$$

Ответ: Наименьшее значение функции равно $3\sqrt{2}$

достигается при $x=2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 147. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-8$, параллельной оси абсцисс.

Ответ: $y=-3$, $y=-35$.

Задача 148. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\ln(4x+1)$ в точке с абсциссой $x=0$.

Ответ: $y=3x$.

Задача 149. Найти точки экстремума функции $f(x)=3x^2+\frac{6}{x}$.

Ответ: $f_{\min}=f(1)=9$.

Задача 150. Найти минимальное значение функции

$$f(x)=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x)\cdot\cos 3x-\cos 6x-7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Задача 151. Для функции $y=e^{-x}$ найти производную 2018-го порядка ($y^{(2018)}$).

Ответ: $y^{(2018)}=e^{-x}$.

Задача 152. Дана функция $f(x)=\frac{2019+x}{2020-2x}$. Найти $2f(1)-2018f'(1)$.

Ответ: –1.

Задача 153. К графику функции $y(x)=6x+x^2$ проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=-2$, вторая – в точке минимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными.

Ответ: $\frac{25}{4}$.

Задача 154. Определить, какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy, расположенная между прямыми $x=-3{,}5$ и $x=1{,}5$, ограниченная снизу осью Ox, сверху касательной к графику функции $y=156-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания из промежутка $[-3{,}5;1{,}5]$.

Ответ: 750.

4.3. Геометрия

Задача 155. В треугольнике ABC точка M – середина медианы AK (рис.10). Прямая BM пересекает сторону AC в точке L. Найти длину отрезка AL, если известно, что длина AC равна 9 см.

Решение:

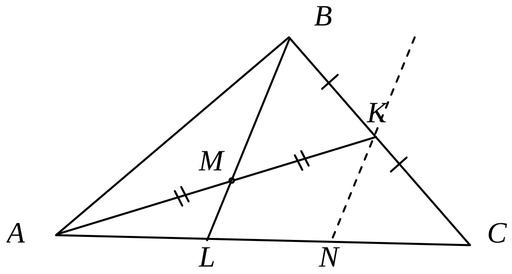


Рис.11

Проведем прямую $KN \parallel BL$ (см. рис.10). Так как $AM = MK$, то по теореме Фалеса, примененной к $\angle KAC$, $AL = LN$. Аналогично, для $\angle BCA$ и параллельных прямых KN и BL получим $LN = NC$. Таким образом,

$$AL = LN = NC = \frac{1}{3} AC = 3\text{см.}$$

Ответ: 3.

Задача 156. Дан равнобедренный треугольник ABC. $AB = BC = 20$, $AC = 24$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 48.

Решение:

Проведем прямую BD, где точка D – основание высоты данного треугольника. Проводя прямые, параллельные сторонам BC и BA, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой AC, расположенный в верней (рис. 12) или в нижней (рис. 13) полуплоскости относительно прямой AC.

1. Рассмотрим случай, представленный на рис. 12, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Тогда $DC = 12$ и $BD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Пусть $DF = x$, $DE = y$, тогда, используя подобие треугольников BDC и EFD, площадь треугольника GFE, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{y} = \dfrac{12}{x}, \\ xy = 48; \end{cases} \begin{cases} 4x = 3y, \\ xy = 48; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = 8. \end{cases}$$

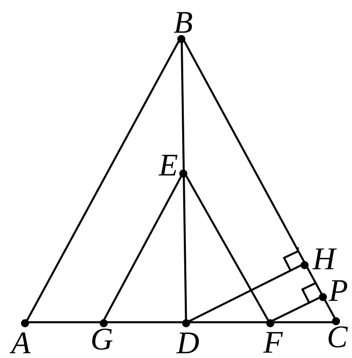


Рис.12

Отсюда следует, что коэффициент подобия равен $\frac{DC}{DF} = \frac{12}{6} = 2$.

Проведем перпендикуляры DH и FP на прямую BC. Т.к. высота DH в прямоугольном треугольнике BCD равна $\frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9{,}6$, то $FP = \frac{9{,}6}{2} = 4{,}8$.

2. Рассмотрим случай, представленный на рис. 13, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Здесь $DC = 12$ и $BD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192$. $\frac{BD}{DE} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{FEG}}} = \sqrt{\frac{192}{48}} = 2$, тогда $DE = 8$, $BE = BD + DE = 16 + 8 = 24$. Т.к. $S_{FEG} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot 2 \cdot DG = ED \cdot DG$, $48 = 8 \cdot DG$, $DG = 6$.

$EG = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

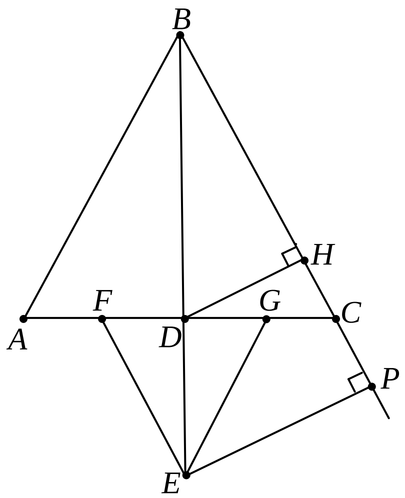


Рис. 13

Из подобия прямоугольных треугольников BPE и EDG получим $\frac{BE}{EG} = \frac{EP}{DG}$. $EP = \frac{BE \cdot DG}{EG} = \frac{24 \cdot 6}{10} = 14{,}4$.

Ответ: 4,8 или 14,4.

Задача 157. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему необходимо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, где у него собранные грибы заберет сын, приехавший на машине; а далее зайти в лес в другой точке, в которой ожидает его жена. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

Решение:

Покажем на рис. 14 графически решение этой задачи.

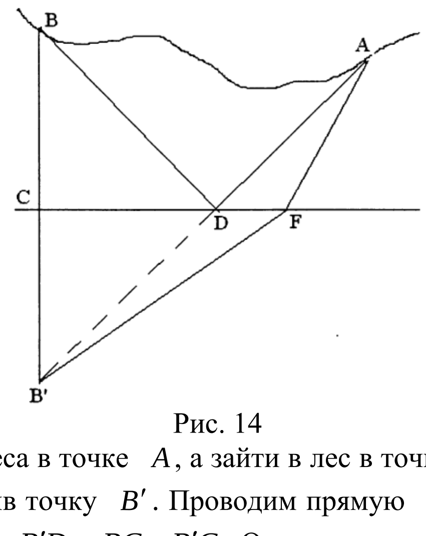


Рис. 14

Пусть грибник выходит из леса в точке A, а зайти в лес в точке B. Симметрично точки C шоссе – отобразим точку B, затем, получив точку B'. Проводим прямую AB', получв точку D, которая и является искомой точкой задачи. $BD = B'D$, $BC = B'C$. Очевидно, что для любой другой точки F справедливо неравенство: $AF + FB' > AD + DB'$.

Таким образом, расстояние $AD + BD$ является наименьшим для выхода на шоссе из леса и захода в лес в заданной точке D.

Задача 158. В круговой сектор, дуга которого содержит 60^0, вписан круг (рис. 15). Найти отношение площади сектора к площади вписанного круга.

Решение:

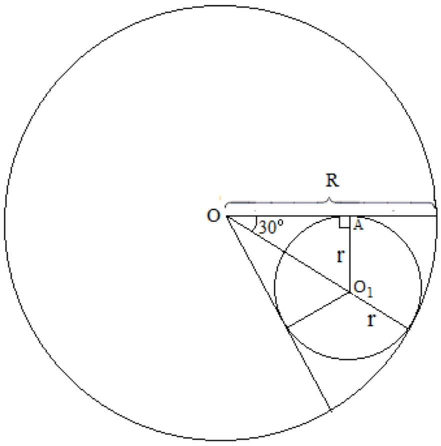


Рис. 15

Необходимо найти $\dfrac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}}$.

Известно, что $S_{сектора} = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha,\ S_{вписанного\ \ круга} = \pi r^2$.

В прямоугольном треугольнике OO_1A, $O_1A = r$, $\angle O_1OA = 30^\circ$, отсюда гипотенуза равна $OO_1 = 2r$.
Тогда радиус большого круга: $R = OO_1 + r = 3r$.

Таким образом, $\dfrac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}} = \dfrac{\dfrac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot 60^\circ}{\pi r^2} = \dfrac{\dfrac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \dfrac{\pi R^2}{6\pi r^2} = \dfrac{R^2}{6r^2} = \dfrac{(3r)^2}{6r^2} = \dfrac{9r^2}{6r^2} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: 1,5.

Задача 159. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность радиуса r. На окружности выбрана точка M (рис. 16). Найти все возможные значения суммы $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Решение:

Пусть для определенности точка M лежит на дуге окружности, ближайшей к вершине A, т.е. из отрезков AO, BO и CO (O – центр окружности) выберем тот отрезок, угол между которым и OM – наименьший.

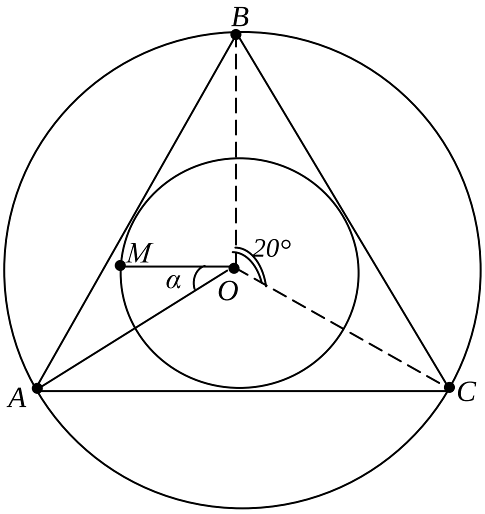


Рис. 16

Обозначим через α величину угла между отрезком AO и OM, $|OM| = r$.

Тогда имеем $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$.

Угол между OM и BO равен $\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right)$, угол между OM и CO равен $\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right)$.

Пусть R – радиус описанной вокруг данного треугольника окружности.

Применяя теорему косинусов к треугольникам AOM, BOM и COM, получим

$AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2AO \cdot OM \cdot \cos\alpha = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\alpha$,

Аналогично, $BM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$,

$$CM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right).$$

Сложив полученные выражения, получим

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 - 2r \cdot R \cdot \left(\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right).$$

Выражение $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 0$, т.к.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha = -\cos\alpha .$$

Отсюда, величина $AM^2 + BM^2 + CM^2$ постоянна и равна $3r^2 + 3R^2$. Учитывая, что $R = 2r$, $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 = 3r^2 + 3(2r)^2 = 15r^2$. Т.о., величина $AM^2 + BM^2 + CM^2$ постоянна и равна $15r^2$ независимо от положения точки M на окружности. Что и требовалось доказать.

Ответ: $15r^2$.

Задача 160. Три квадрата расположены так как показано на рис. 15. Найти величину угла между прямыми AB и CD.

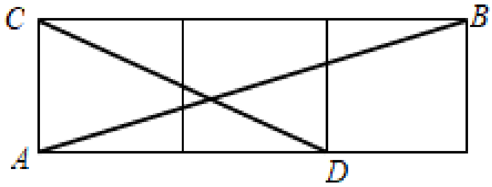


Рис. 17

Решение:

<u>I способ.</u>

Достроим фигуру (рис. 17) до фигуры (рис. 18).

Пусть сторона квадрата равна x, тогда $AE = BE = x\sqrt{5}$ и $AB = \sqrt{5x^2 + 5x^2} = x\sqrt{10}$.

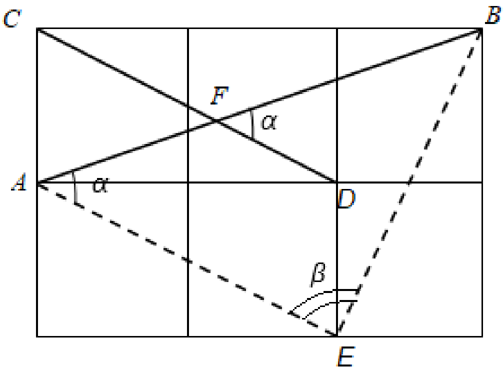


Рис. 18

В треугольнике ABE, где $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, по теореме косинусов имеем

$10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5}\cos\beta$, т.е. $\cos\beta = 0$, $\beta = 90°$. Тогда $\angle BAE = \angle ABE = 45°$.

<u>II способ.</u>

Применить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Ответ: $45°$.

Задача 161. Найти все значения переменных x и y, при которых выражение

$$z = \sqrt{x^2 + (y-5)^2} + \sqrt{y^2 + (x-12)^2}$$

принимает наименьшее значение.

Решение:

Каждый из радикалов, входящих в выражение $z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}$, представляет собой расстояние между двумя точками координатной плоскости (рис. 19).

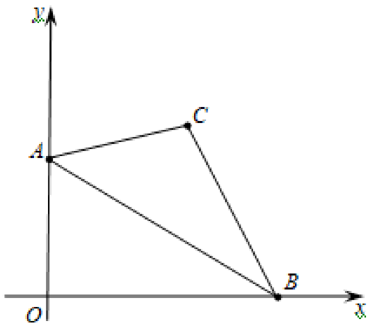


Рис.19

Радикал $\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ есть расстояние между точками $A(0;5)$ и $C(x;y)$, т.е. $|AC|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$; радикал $\sqrt{y^2+(x-12)^2}$ есть расстояние между точками $B(12;0)$ и $C(x;y)$, т.е. $|CB|=\sqrt{y^2+(x-12)^2}$.

Тогда $z=|AC|+|CB|$. На основании неравенства треугольника: $|AC|+|CB|\geq|AB|$, $z\geq|AB|$.

$|AB|=13$ (по т. Пифагора $|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$).

Т.е., $z\geq 13$.

Тогда, наименьшее значение $z=13$.

Все точки $C(x;y)$, при которых $z=13$, принадлежат отрезку прямой AB при $x\in[0;12]$. Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A(0;5)$ и $B(12;0)$: $\frac{x}{12}=\frac{y-5}{-5}$. Т.е. имеем $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Таким образом, наименьшее значение $z=13$, достигается при $x\in[0;12]$, $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Попробовать найти своё.

Ответ: $z=13$, $x\in[0;12]$, $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Задача 162. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1, \\ 2x^2+3y^2+4z^2=\sqrt{30}. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим вектор $\vec{a}=\{x^2;y^2;z^2\}$ и вектор $\vec{b}=\{2;3;4\}$.

Тогда, $|\vec{a}|=\sqrt{x^4+y^4+z^4}=\sqrt{1}=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$.

Скалярное произведение векторов равно: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=1\cdot\sqrt{29}\cdot\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их компоненты равно:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x^2+3y^2+4z^2=\sqrt{30}$.

Тогда, $\sqrt{30}=\sqrt{29}\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{29}}>1$.

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

Ответ: Система уравнений не имеет решений.

Задача 163. Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не меньше 12 м. Доказать, что в роще размещено не больше 2018 деревьев.

Решение:

Пусть в роще имеется x деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. согласно условию; круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $258+6=264$ м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство $264^2\pi \ge 6^2\pi \cdot x$. Тогда $x \le 44^2$, $x \le 1936$, т.е. $x < 2018$.

Что требовалось доказать

Задача 164. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$ и $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найти AE.

Решение:

Неопределенным моментом этой задачи является расположение точки E на прямой относительно двух данных на ней точек A и B.

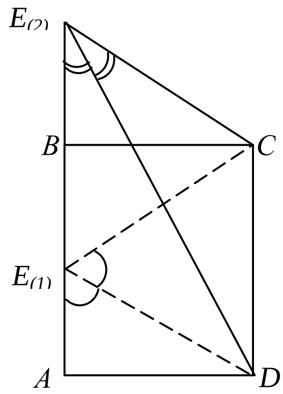


Рис. 20

Рассмотрим случаи (рис. 20):

1. Если точка E на прямой лежит между точками A и B, то $AE = 1$.

По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$, следовательно, ΔDEC – равнобедренный и $EC = CD = 2$. Из прямоугольного треугольника BEC с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора найдем BE: $BE = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$.

2. Если точка B на прямой лежит между точками A и E, то $AE = 3$.

3. Положение точки A между точками B и E невозможно, т.к. в этом случае $\angle AED > \angle DEC$, т.е. не выполняется условие задачи.

Ответ: 1 или 3.

Задача 165. Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 4см с центром в точке *O* в точках *A, B* и С. Площадь треугольника *ABC* больше 16см^2, площадь треугольника *OBC* равна 4см^2. Найти угол *BAC*.

Решение:

Так как радиусы *OA*, *OB* и *OC* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка -*OA*, *OB* и *OC*- лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью.

По условию задачи $S_{\Delta OBC} = 4$, т.е.

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC = 4 \Rightarrow \sin \angle BOC = \frac{1}{2}.$$

Возможные значения $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$ или $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$. Рассмотрим возможные варианты.

1. Если $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$, то $\angle BAC = \frac{\pi}{12}$ (рис.21) или $\angle BAC = \frac{11\pi}{12}$ (рис.22)

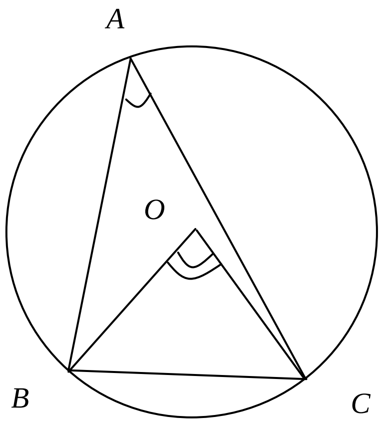


Рис.2

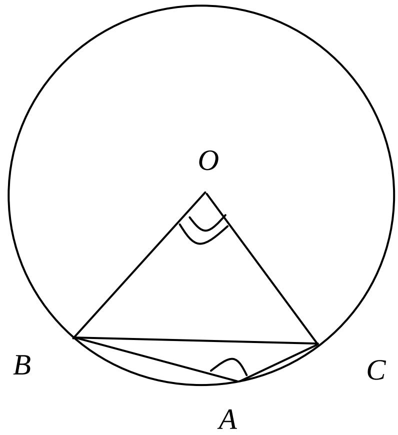


Рис.22

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$, что противоречит условию.

2. Если $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$, то $\angle BAC = \frac{7\pi}{12}$ (рис.23) или $\angle BAC = \frac{5\pi}{12}$ (рис.24).

На рис.21 $S_{\Delta ABC} < \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором $S_{\Delta ABC} < 16$, представлен на рис.24.

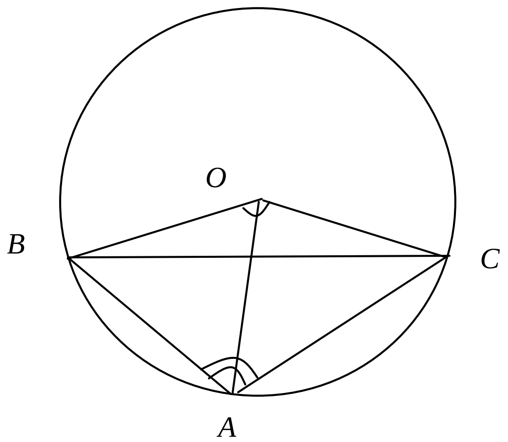


Рис.23

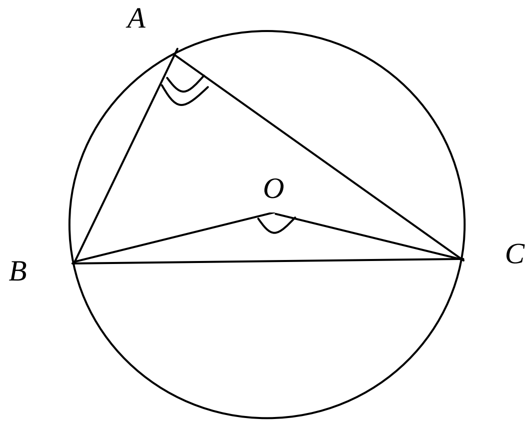


Рис.24

Ответ: $\angle BAC = \frac{5\pi}{12}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 166. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 5$ и $BC = 4$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найти AE.

Ответ: 2 или 8.

Задача 167. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. На окружности выбрана точка M. Найти все возможные значения суммы $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Ответ: $6R^2$.

Задача 168. Найти все значения переменных x и y, при которых выражение

$$z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$$

принимает наибольшее значение.

Ответ: $z=5$, $x\in[0;3]$, $y=-\frac{4}{3}x+4$.

Задача 169. Медиана треугольника ABC, проведенная к стороне AB, составляет со стороной CB угол 60° и равна $\frac{\sqrt{6}}{10}$ см. Найти длину стороны AB, если она составляет со стороной CB угол 45°.

Ответ: 0,6.

Задача 170. Треугольник, высота которого равна $\frac{5}{3}$ см, равновелик ромбу с диагоналями $\frac{7}{2}$ см и 5 см. Найти основание треугольника.

Ответ: 10,5.

Задача 171. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 6 см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $BD:DC=2:1$. Найти длину стороны AC.

Ответ: $2\sqrt{6}$ см.

Задача 172. В равнобедренной трапеции задана диагональ, равная 4 см, и угол между диагональю и основанием, равен $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь трапеции.

Ответ: $S=4\sqrt{3}$ см^2.

Задача 173. Три пиццы диаметром 4 дециметра каждая упакованы в треугольную коробку. Найти наименьшую площадь коробки, если пиццы попарно соприкасаются, но не перекрывают друг друга.

Ответ: $32\left(2\sqrt{3}+3\right)$см^2.

Задача 174. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

Ответ: 4.

Задача 175. Диагонали AC и BD трапеции $ACBD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 25 см^2 и 16 см^2. Найти площадь трапеции.

Ответ: **81 см^2.**

5. Теория вероятностей

Задача 176. Наудачу выбирают число a из промежутка $[-6;6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня.

Решение:

Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases}4(a+1)^2-4(a^2-9)>0,\\ a^2-9>0,\\ 2(a+1)>0;\end{cases}\quad \begin{cases}8a+40>0,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a+1>0;\end{cases}\quad \begin{cases}a>-5,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a>-1;\end{cases}\quad a\in[3;+\infty).$$

Так как по условию число a выбирают из промежутка $[-6;6]$, то $a\in[3;6]$. Вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня, равна отношению длины промежутка $[3;6]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 177. У охотника есть две собаки. Однажды, заблудившись в лесу, он вышел на развилку. Охотник знает, что каждая из собак с вероятностью p выберет дорогу домой. Он решил выпустить собак по очереди. Если обе выберут одну и ту же дорогу, он пойдет за ними; если же они разделятся, охотник выберет дорогу, кинув монетку. Увеличит ли таким способом охотник свои шансы выбрать дорогу домой, по сравнению с тем, как если бы у него была одна собака?

Решение:

Вероятность выбрать верный путь, имея одну собаку, равна p. Вероятность выбрать верную дорогу, если действовать указанным способом, имея двух собак, равна

$$p \cdot p + p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} = p \cdot p + 2 \cdot \frac{p}{2}(1-p) = p,$$

где $p \cdot p$ – вероятность того, что обе собаки выберут правильную дорогу, а $p(1-p)$ и $(1-p)p$ – вероятности того, что только одна из собак выбрала верную дорогу. Получаем, что вероятности в двух случаях равны.

Ответ: Не увеличит.

Задача 178. Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что ни разу не выпадут 2 «орла» подряд.

Решение:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Первый способ.

Общее число исходов при десяти бросаниях монеты равно 2^{10}.

Найдем число комбинаций, где нет двух «орлов» подряд. Если «орлов» нет вовсе, то такая последовательность состоит из десяти «решек» и всего одна. Если «орел» один, то таких комбинаций $C_{10}^1 = 10$ («орел» стоит на любом из 10 мест). Если «орлов» два, то комбинаций $C_9^2 = 36$ (считаем количество вариантов расставить 2 «орла» по одному между 8 «решками» или по краям). И так далее. Если «орлов» k, то комбинаций C_{11-k}^k (число вариантов расставить k «орлов» в $11-k$ мест между «решками» и по краям).

Значит, общее число комбинаций равно $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$. Значит, вероятность равна $\frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$.

Второй способ.

Пусть монету бросают n раз, и $f(n)$ – число вариантов бросания без двух «орлов» подряд. Число допустимых комбинаций, в которых на последнем n-ом месте стоит «решка», равно $f(n-1)$. Число допустимых комбинаций, в которых на последнем месте стоит «орел», равно $f(n-2)$, так как перед «орлом» на предпоследнем месте обязательно должна стоять «решка». Таким образом $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. При этом, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, …, $f(10) = 144$. Всего же вариантов выпадения 10 монет 2^{10}. Следовательно, искомая вероятность есть $\frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$.

Ответ: $\frac{9}{64}$.

Задача 179. Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Решение:

Пусть вероятность исправной работы скважины равна p, а вероятность выхода из строя – q.

По условию задачи необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины, то есть исправно работают или 3, или 4, или 5 скважин.

Найдем вероятность исправной работы любых 3-х скважин – $p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q$ (работают первая, вторая и третья скважины, не работают четвертая и пятая скважины) или $p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q$ (работают первая, вторая и четвертая скважины, не работают – третья и пятая) или т.д. Всего таких комбинаций 10. Следовательно, вероятность работы любых трех скважин равна $10p^3q^2$.

Аналогично находим, что вероятность исправной работы 4-х скважин равна $5p^4q$.

Вероятность исправной работы 5-ти скважин равна p^5.

Тогда вероятность исправной работы по крайней мере 3-х скважин равна

$$P = 10p^3q^2 + 5p^4q + p^5.$$

По условию известно, что вероятность выхода из строя скважины равна $q = 0{,}1$, тогда вероятность исправной работы скважины равна $p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Получим $P = 10 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 + 5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^5 = 0{,}99144 \approx 0{,}99$.

Ответ: $0{,}99$.

Задача 180. Наудачу выбирают число a из $[-6; 6]$. Определить вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня *(решить задачу самостоятельно)*.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Рекомендации участникам олимпиады

1. Прочитать условия всех задач и наметить, в каком порядке их решать (обычно задачи упорядочены по возрастанию их сложности).
2. Внимательно прочитать условие задачи. Проверить условие задачи на правдоподобность. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирать самый удобный способ для себя, а рассмотреть все возможные варианты постановки задачи.
3. Если задача решилась слишком легко – это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.
4. Если задача не решается – попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или решать ее «от противного», или заменить числа буквами и т.д.
5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, пытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать (совет академика А.Н. Колмогорова).
6. Не зацикливаться на решении одной задачи: иногда полезно отключиться от нее и оценить положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжить решение, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).
7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут.
8. Решив задачу, проверить правдоподобность полученных результатов, а затем сразу оформлять Решение: Это поможет проверить правильность решения и освободит время и внимание для других задач.
9. Каждый шаг решения задачи надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений. Это поможет при проверке работы.
10. Перед тем как сдать работу, перечитать её «глазами проверяющих» – смогут ли они в ней разобраться?

Некоторые варианты заданий заключительного этапа
Отраслевой олимпиады школьников «ГАЗПРОМ»
2020 – 2021 учебный год
(*с ответами и указаниями*)

9 – 11 классы

Задание 1. *(5 баллов)* Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<2$.

Указание. Оценить левую часть неравенства суммой $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2020\cdot 2021}$.

Задание 2. *(10 баллов)* Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 10 мешков (в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Ответ: Да.

Задание 3. *(15 баллов*) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Задание 4. *(20 баллов)* Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c. Диагональ длины l делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти основания трапеции.

Ответ: $CD=\sqrt{\frac{3}{5}\left(l^2-c^2\right)}$, $AB=\sqrt{\frac{5}{3}\left(l^2-c^2\right)}$.

Задание 5. *(20 баллов)* Решить уравнение $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x=-2$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$, $x_4=2$, $x_5=\frac{1}{2}$.

Задание 6. *(30 баллов)* На полевых работах геологу необходимо набрать образцы пород типов *A* и *B*. Вес одного образца типа *A* равен 3 кг, типа *B* – 4 кг. По каждому из образцов типа *A* требуется провести 5 видов анализов, по каждому образцу типа *B* – 7 видов. Известно, что вес всех образцов не должен превышать 150 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 250. Найти минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов, которое можно собрать при заданных условиях.

Ответ: 36; 50.

Составитель: доц. *Л.В. Бакеева*
Научный редактор проф. *А.П. Господариков*