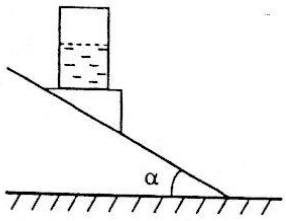
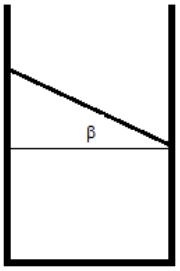
10 класс, вариант 6



1. Сосуд, имеющий в основании квадрат со стороной 1 м и высотой 2 м, заполненный водой наполовину, поставлен на клин, скользящий вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α = 45° с горизонтом. Дно сосуда расположено горизонтально. Коэффициент трения клина о наклонную плоскость равен 0,278. Найдите силу давления воды на переднюю по ходу движения стенку сосуда.

Решение



При движении сосуда с ускорением, имеющим горизонтальную проекцию, поверхность воды отклонится от горизонтальной на угол, определяемый как

$$tg\beta = \frac{\sqrt{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2}$$

Обозначим высоты воды у передней стенки через y, а у задней стенки – через $x + y$. Тогда объем воды в покое и при движении может быть записан как

$$\frac{Hl^2}{2} = l^2\frac{x+2y}{2}$$

Учитывая, что

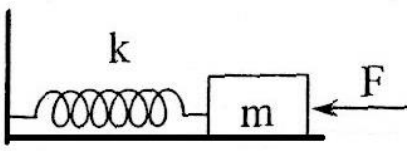
$$\frac{x}{l} = tg\beta,$$

получим

$$H = ltg\beta + 2y$$

Тогда

$$F = \frac{\rho gly}{2} = \frac{\rho gl}{4}\left[H - \frac{\sqrt{2}}{2}l(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right] \approx 4100 \text{ Н}$$



2. На неподвижный груз, лежащий на гладком горизонтальном столе и прикрепленный к пружине жесткостью k = 9·10^2 Н/м начинает действовать постоянная сила F = 1 Н. Через некоторое время действие силы прекращается. Определите, какое расстояние должно пройти тело, чтобы скорость тела в момент прекращения действия силы была максимальна.

Решение

Максимальное значение скорости будет достигнуто при равенстве силы упругости внешней силе. Это будет выполнено при условии

$$x = \frac{F}{k} \approx 1{,}1 \text{ мм}$$

3. В идеальном газе совершается процесс, в котором давление прямо пропорционально объему. Определите изменение внутренней энергии газа в этом процессе, если известно количество теплоты Q, подведенное к газу.

Решение

Как следует из первого начала термодинамики, количество теплоты Q, подведенное к газу, равно сумме работы газа и изменения внутренней энергии. При переходе из состояния 1 в состояние 2 при условии, что давление прямо пропорционально объему с коэффициентом пропорциональности k, работа газа будет определяться как

$$A = 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 0{,}5k(V_2^2 - V_1^2) = 0{,}5\nu R\Delta T$$

Учитывая, что

$$\Delta U = 1{,}5\nu R\Delta T,$$

Получаем

$$A = \frac{Q}{4}$$

4. Тонкое кольцо радиуса R и массой m вращается вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. При каком числе оборотов в секунду n_m кольцо разорвётся, если разрыв происходит, когда упругая сила в поперечном сечении кольца достигает значения, равного F_m. Изменением размеров кольца при вращении можно пренебречь.

Решение

Вырежем из кольца малый участок, опирающийся на малый угол α такой, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

На концах участка приложим силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, масса сегмента $\Delta m = m\frac{2\alpha}{2\pi} \Rightarrow \Delta m = m\frac{\alpha}{\pi}$. (1)

Рассмотрим вращение данного участка жгута относительно оси вращения.

$\Delta m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ (ОУД)

ox: $\Delta m a_\tau = T_2\cos\alpha - T_1\cos\alpha = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 = T$

$oy: \Delta m a_n = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha \Rightarrow \Delta m a_n = 2T\alpha$ (2)

$a_n = \omega^2 R$ (3)

Подставим (1),(3) в (2) $\Rightarrow m\frac{\alpha}{\pi}\omega^2 R = 2T\alpha$

Сила разрывающая кольцо $T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi} = F_{max}$ (4)

$\omega = 2\pi n_m \Rightarrow 2\pi m n_m{}^2 R = F_{max} \Rightarrow n_m = \sqrt{\frac{F_{max}}{2\pi R m}}$

5. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о его стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени при движении шарика слева направо равен T_1, а при движении справа налево T_2. Определите радиус лунки.

Решение

Модуль скорости при отражениях от стенок лунки не изменяется, значит происходит движение с одинаковой начальной скоростью по двум отрезкам параболы с общими началом и концом. Следовательно, углы вылета α для нижней параболы и β для верхней параболы, отсчитанные от горизонтали в сумме дают прямой угол. Радиус, проведенный в точку падения шарика на лунку, является биссектрисой угла β - α, образуя с горизонталью угол 45°. Значит, расстояние между точками падения равно $R\sqrt{2}$.

При полете по нижней и верхней параболам

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}$$

$$R\sqrt{2} = VT_1\cos\beta$$

и

$$R = \frac{\sqrt{2}T_1T_2g}{4}$$

6. Космический корабль движется вокруг Луны по круговой орбите радиусом $3{,}4\cdot10^6$ м. С какой скоростью относительно корабля нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны? Считать противоположной стороной Луны точку, расположенную на одном диаметре с кораблем в момент выброса вымпела. Ускорение свободного падения на поверхности Луны в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли, радиус Луны $1{,}7\cdot10^6$ м.

Решение

Космический корабль движется вокруг Луны по круговой орбите. Для того, чтобы вымпел попал на противоположную сторону Луны, он должен двигаться по эллиптической траектории, находящейся внутри круговой, т.е он должен иметь скорость, меньшую, чем у корабля. Используя второй закон Кеплера, получим для скоростей вымпела на орбите корабля и у поверхности Луны:

$$VR = V_Л R_Л$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mV_{Л}^2}{2} - \frac{GMm}{R_{Л}} = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

Учтем, что ускорение свободного падения на Луне (в 6 раз меньшее, чем на Земле) равно

$$g_{Л} = \frac{GM}{R_{Л}^2}$$

Решая полученную систему уравнений, получим скорость вымпела после его выброса из корабля:

$$V = \sqrt{\frac{g_{З}R_{Л}^3}{3R(R + R_{Л})}}$$

Скорость самого корабля

$$V_{к} = \sqrt{\frac{g_{З}R_{Л}^2}{6R}}$$

Разность этих скоростей равна приблизительно 220 м/с, именно с этой относительной скоростью нужно выбросить вымпел назад по ходу полета корабля.