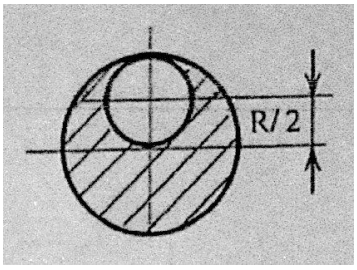
10 класс, вариант 2



1. В однородном цилиндре радиусом R и массой m на расстоянии $R/2$ от центра цилиндра параллельно его оси просверлено сквозное отверстие имеющее радиус $r = R/2$. Цилиндр находится на горизонтальной поверхности в положении, показанном на рисунке. Определите, какую минимальную работу нужно совершить для перекатывания без скольжения этого цилиндра так, чтобы его центр переместился на расстояние $L = 1{,}5\pi R$.

Решение

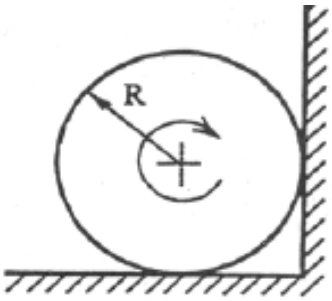
В процессе перекатывания центр масс от его исходного положения поднимается на высоту, равную расстоянию его от оси цилиндра.

Центр масс целого цилиндра находится на оси цилиндра. Центр масс высверленной части находится на оси высверленной части. Масса высверленной части относится к массе целого цилиндра, как площадь сечения высверленной части относится к площади сечения целого цилиндра. В задаче это отношение равно 0,25. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра. Определим положение центра масс оставшейся части цилиндра относительно оси цилиндра:

$$\frac{1}{4}m\frac{R}{2} = \frac{3}{4}mx_c \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{R}{6}$$

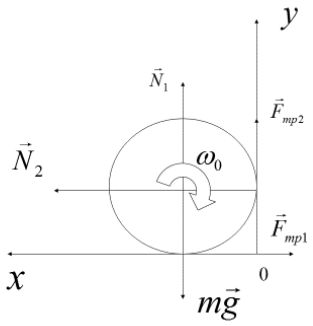
Работа по перемещению цилиндра равна

$$A = \frac{3}{4}mg\frac{R}{6} = \frac{mgR}{8}$$



2. Тонкостенный цилиндр массы m раскрутили вокруг оси до угловой скорости ω_0 и поместили в угол (смотри рисунок). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ. Найдите радиус цилиндра R, если известно, что до остановки цилиндр сделал n оборотов.

Решение



По теореме об изменении кинетической энергии

$W_{кк} - W_{ко} = A_{вс}$ (1)

Начальная кинетическая энергия

$$W_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} \qquad (2)$$

Конечная кинетическая энергия

$$W_к = \frac{I\omega_к^2}{2} = 0 \qquad (3)$$

Момент инерции однородного шара

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \qquad (4)$$

$$A_{вс} = A_{тр} = -(F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn \qquad (5)$$

$$W_0 = \frac{mR^2\omega_0^2}{5} = (F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn \qquad (6)$$

Запишем ОУД $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр1} + \vec{F}_{тр2} = 0$ (7)

В проекциях на оси

$ox: N_2 - F_{тр1} = 0$ (8)

$oy: N_1 + F_{тр2} - mg = 0$ (9)

$F_{тр1} = \mu_1 N_1$ (10)

$F_{тр2} = \mu_2 N_2$ (11)

Подставим (10) в (8), а (11) в (9)

$N_2 - \mu_1 N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \mu_1 N_1$ (12)

$N_1 + \mu_2 N_2 - mg = 0 \Rightarrow N_1 + \mu_2\mu_1 N_1 - mg = 0$ (13)

$$N_1(1+\mu_2\mu_1) = mg \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \Rightarrow F_{тр1} = \frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \qquad (14)$$

$$N_2 = \frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \Rightarrow F_{тр2} = \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \qquad (15)$$

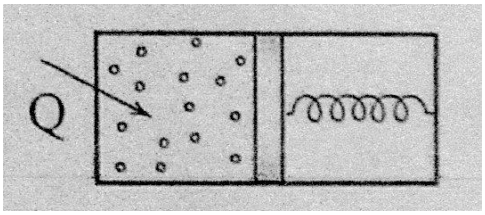
Подставим (14) и (15) в (6)

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{5} = \left(\frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} + \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1+\mu_2\mu_1)}\right)\cdot 2\pi Rn$$

$$R = \frac{10\pi n}{\omega_0^2}\left(\frac{\mu_1 g}{(1+\mu_2\mu_1)} + \frac{\mu_1\mu_2 g}{(1+\mu_2\mu_1)}\right)$$

Получаем $R = \dfrac{10\pi ng\mu_1(1+\mu_2)}{\omega_0^2(1+\mu_2\mu_1)} = \dfrac{10\pi ng\mu(1+\mu)}{\omega_0^2(1+\mu^2)}$

3. Одноатомный идеальный газ находится в левой половине цилиндра, показанного на рисунке. Объем, занимаемый газом, равен $V = 4$ л при давлении $p = 10^6$ Па. Цилиндр разделен на две части поршнем, соединенного пружиной с правым торцом цилиндра. Справа от поршня – вакуум. В отсутствие газа поршень располагается вплотную к левому торцу цилиндра, при этом пружина не деформирована. Пренебрегая трением поршня о стенки цилиндра, определите, какую работу совершает газ при увеличении его объема в $n = 3$ раза.



Решение

Обозначим через x расстояние от левого торца цилиндра до поршня. Давление газа

$$p = \frac{kx}{S}$$

Из этого выражения видно, что давление прямо пропорционально объему газа. Работа газа в этом случае равна

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2)$$

Учтем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n}$$

Тогда

$$A = p_1 V_1 (n^2 - 1) = 16 \text{ кДж}$$

4. Тело массой $m = 1$ кг брошено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите скорость тела при бросании, если в наивысшей точке траектории модуль импульса тела равен p = 5 кг м/с.

Решение

Скорость тела в высшей точке траектории

$$V = V_0 \cos\alpha = \frac{p}{m}$$

Начальная скорость

$$V_0 = \frac{p}{m\cos\alpha} = 10 \text{ м/с}$$

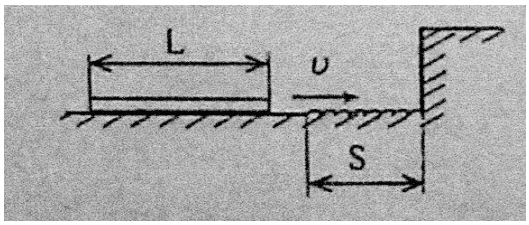
5. Через невесомый блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута нерастяжимая нить, масса которой m_0. На концах веревки подвешены грузы массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Пренебрегая трением в блоке и сопротивлением

воздуха, найдите ускорение веревки в тот момент времени, когда она расположена симметрично по обе стороны блока.

Решение

При симметричном расположении веревки относительно блока массы, находящиеся по разные стороны блока будут равны m_1 + 0,5 m_0 и m_2 + 0,5 m_0. Ускорение веревки будет равно

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_0}$$



6. По гладкой горизонтальной плоскости скользит тонкий однородный брусок длиной L = 1,5 м и массой m = 1 кг. Брусок наезжает на шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения μ = 0,15 и длиной S = 0,5 м и, пройдя этот участок абсолютно неупруго ударяется о вертикальную стенку, при ударе потеря механической энергии составила Q = 0,875 Дж. Определите скорость движения бруска по гладкому участку поверхности. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Решение

Сила трения скольжения по шероховатому участку определяется как

$$F = \mu\frac{M}{L}xg$$

Работа силы трения

$$A = \frac{\mu MxgS}{2L}$$

Скорость тела в момент соударения со стенкой

$$V_1 = \sqrt{V^2 - \frac{\mu gS^2}{L}}$$

Количество выделившейся теплоты

$$Q = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{m}{2}\left(V^2 - \frac{\mu gS^2}{L}\right)$$

Начальная скорость

$$V = \sqrt{\frac{2Q}{m} + \frac{\mu gS^2}{L}} \approx 1{,}41 \text{ м/с}$$