10 класс, вариант 8

1. Тело массой 1 кг бросили под углом 30° к горизонту. Кинетическая энергия тела в начальный момент времени равна 10 Дж. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость тела в наивысшей точке траектории.

Решение

Кинетическая энергия тела в начальный момент времени равна

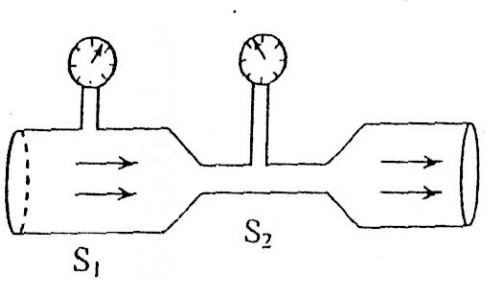
$$K = \frac{mV^2}{2}$$

Скорость тела в наивысшей точке траектории равна

$$V' = V\cos\alpha$$

Выразим начальную скорость через кинетическую энергию и подставим в выражение для искомой скорости

$$V' = \sqrt{\frac{2K}{m}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}87\ \text{м/с}$$



2. Объем невязкого жидкого топлива плотностью ρ, поступающего к потребителю через горизонтальный трубопровод за время τ, равен Q. Определите разность давлений, установленных в местах, где площади поперечных сечений трубопроводов равны S_1 и S_2. Поток жидкости считать стационарным.

Решение

Поскольку жидкость невязкая, воспользуемся уравнением Бернулли

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

или

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

По уравнению неразрывности течения жидкости

$$S_1V_1 = S_2V_2$$

или

$$V_2 = \frac{S_1 V_1}{S_2}$$

Скорость течения в широкой части трубы можно вычислить как

$$V_1 = \frac{Q}{\tau S_1}$$

Тогда

$$\Delta p = \frac{\rho Q^2}{2\tau^2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)$$

3. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой *M*, находится газ. Газ нагревают, при этом поршень двигаясь равноускоренно, приобретает скорость *V*. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Внутренняя энергия одного моля газа равна $U = cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Решение

Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c \Delta T$$

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{MV^2}{2}$$

Значит,

$$\nu \Delta T = \frac{MV^2}{2R}$$

В окончательной форме получаем

$$Q = \frac{MV^2}{2} + \frac{cMV^2}{2R} = \frac{MV^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right)$$

4. Четыре одинаковых малых частицы несут одинаковые заряды q. Сначала частицы находились на одной прямой, расстояние между соседними частицами было равно a. Какую работу нужно совершить, чтобы расположить частицы в вершинах квадрата со стороной a?

Решение

Работа внешней силы по изменению взаимного расположения заряженных частиц равна разности потенциальных энергий системы частиц. Для расположения в вершинах квадрата

$$\Pi = \frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

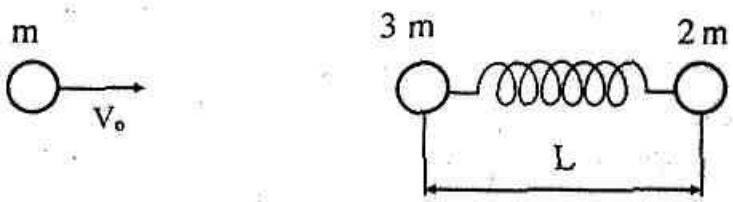
Для линейного расположения

$$\Pi = \frac{8q^2}{9\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Работа по перемещению частиц

$$A = \frac{q^2}{9\pi\varepsilon_0 a^2}$$

5. Два шарика массой $3m$ и $2m$ соединены невесомой пружиной жесткостью k и длиной L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массой m движется со скоростью V_0 по линии, соединяющей центры первых двух, и абсолютно упруго соударяется с шариком массы $3m$. Пренебрегая временем соударения шариков по сравнению с временем деформации пружины, определите максимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Размеры всех шариков одинаковые.



Решение

При максимальном растяжении пружины скорости шариков одинаковы и равны скорости центра масс системы "два шарика – пружина".

При соударении левого шарика со средним последний приобретает скорость, определяемую из следующих соображений:

$$mV_0 = -mV' + 3mV_1$$
$$mV_0^2 = mV'^2 + 3mV_1^2$$

Решая систему уравнений, получим

$$V_1 = \frac{V_0}{2}$$

Используя законы сохранения импульса и энергии, получим

$$3mV_1 = 5mV_c$$
$$3mV_1^2 = 5mV_c^2 + k\Delta L$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\Delta L = V_0\sqrt{\frac{3m}{10k}}$$

и

$$L_m = L + V_0\sqrt{\frac{3m}{10k}}$$

6. Какую минимальную дополнительную скорость в направлении движения нужно сообщить за малое время космическому кораблю, движущемуся по круговой орбите, радиус которой в 5 раз больше радиуса Земли, чтобы он смог преодолеть действие поля тяготения Земли? Значение первой космической скорости вблизи поверхности Земли принять равным 7,9 км/с.

Решение

Корабль массой m движется по круговой траектории радиусом $5R_з$, т.е. его скорость равна первой космической скорости V_1 для данной орбиты.

Чтобы преодолеть действие поля тяготения Земли, корабль должен иметь в данной точке траектории вторую космическую скорость, т.е. такую, при которой кинетическая энергия корабля равна его потенциальной энергии в поле тяготения

$$\frac{m(V_1 + \Delta V)^2}{2} = G\frac{Mm}{5R_з}$$

Первая космическая скорость у поверхности Земли

$$V_{1з} = \sqrt{\frac{GM}{R_з}}$$

Тогда

$$\frac{(V_1 + \Delta V)^2}{2} = \frac{V_{1з}^2}{5}$$

В свою очередь,

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{5R_з}} = \frac{V_{1з}}{\sqrt{5}}$$

Получаем уравнение относительно ΔV:

$$\Delta V^2 + 2\sqrt{5}\Delta V V_{1з} - {V_{1з}}^2 = 0,$$

решением которого является

$$\Delta V = V_{1з}\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right) \approx 1{,}7 \text{ км/с}$$