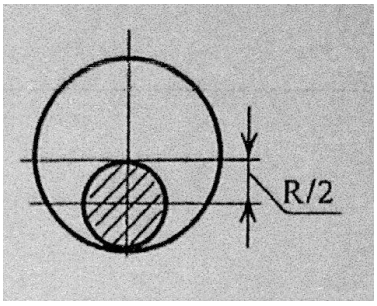
10 класс, вариант 1



1. В однородном цилиндре радиусом R и массой m на расстоянии $R/2$ от центра цилиндра параллельно его оси просверлено сквозное отверстие имеющее радиус $r = R/2$. Отверстие залито веществом, плотность которого в $n = 3$ раза больше плотности вещества. Цилиндр находится на горизонтальной поверхности в положении, показанном на рисунке. Определите, какую минимальную работу нужно совершить для перекатывания без скольжения этого цилиндра так, чтобы его центр переместился на расстояние $L = \pi R$.

Решение

В процессе перекатывания центр масс от его исходного положения поднимается на высоту, равную удвоенному расстоянию его от оси цилиндра.

Центр масс целого цилиндра находится на оси цилиндра. Центр масс залитой части находится на оси залитой части. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра. Определим положение центра масс оставшейся части цилиндра относительно оси цилиндра. Масса высверленной части относится к массе целого цилиндра, как площадь сечения высверленной части относится к площади сечения целого цилиндра. В задаче это отношение равно 0,25. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра.

$$\frac{1}{4}m\frac{R}{2} = \frac{3}{4}mx_c \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{R}{6}$$

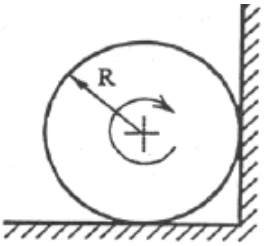
Масса залитой части в 3 раза больше массы высверленного вещества цилиндра. Оставшаяся масса цилиндра составляет 0,75 массы цилиндра. Положение центра масс полученного тела определим относительно центра масс залитой части:

$$x' = \frac{0{,}75m\left(\frac{R}{6} + \frac{R}{2}\right)}{1{,}5m} = \frac{R}{3}$$

Относительно оси цилиндра центр масс находится на расстоянии

Работа по перемещению цилиндра равна

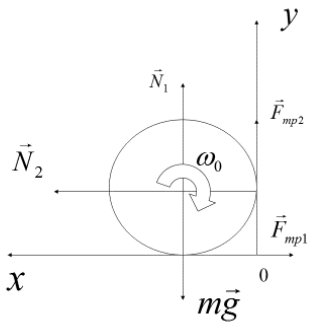
$$A = \frac{3}{2}mg\frac{R}{6} = \frac{mgR}{4}$$



2. Тонкостенный цилиндр массой m и радиусом R раскрутили вокруг оси до угловой скорости ω_0 и поместили в угол (смотри рисунок). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ.

Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

Решение



По теореме об изменении кинетической энергии

$$W_{кк} - W_{ко} = A_{вс} \qquad (1)$$

Начальная кинетическая энергия

$$W_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} \qquad (2)$$

Конечная кинетическая энергия

$$W_к = \frac{I\omega_к^2}{2} = 0 \qquad (3)$$

Момент инерции однородного шара

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \qquad (4)$$

$$A_{вс} = A_{тр} = -(F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn \qquad (5)$$

$$W_0 = \frac{mR^2\omega_0^2}{5} = (F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn \quad (6)$$

Запишем ОУД $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр1} + \vec{F}_{тр2} = 0$ (7)

В проекциях на оси

$ox: N_2 - F_{тр1} = 0$ (8)

$oy: N_1 + F_{тр2} - mg = 0$ (9)

$F_{тр1} = \mu_1 N_1$ (10)

$F_{тр2} = \mu_2 N_2$ (11)

Подставим (10) в (8), а (11) в (9)

$N_2 - \mu_1 N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \mu_1 N_1$ (12)

$N_1 + \mu_2 N_2 - mg = 0 \Rightarrow N_1 + \mu_2\mu_1 N_1 - mg = 0$ (13)

$$N_1(1+\mu_2\mu_1) = mg \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \Rightarrow F_{тр1} = \frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \Rightarrow F_{тр2} = \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} \quad (15)$$

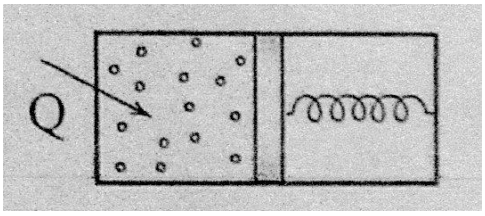
Подставим (14) и (15) в (6)

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{5} = \left(\frac{\mu_1 mg}{(1+\mu_2\mu_1)} + \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1+\mu_2\mu_1)}\right)\cdot 2\pi Rn$$

$$R = \frac{10\pi n}{\omega_0^2}\left(\frac{\mu_1 g}{(1+\mu_2\mu_1)} + \frac{\mu_1\mu_2 g}{(1+\mu_2\mu_1)}\right)$$

Получаем $R = \dfrac{10\pi ng\mu_1(1+\mu_2)}{\omega_0^2(1+\mu_2\mu_1)} = \dfrac{10\pi ng\mu(1+\mu)}{\omega_0^2(1+\mu^2)}$

$$n = \frac{\omega_0^2(1+\mu^2)}{10\pi g\mu(1+\mu)}$$



3. Два моля неона и три моля гелия находятся в левой половине цилиндра, показанного на рисунке. Цилиндр разделен на две части поршнем, соединенного пружиной с правым торцом цилиндра. Справа от поршня – вакуум. В отсутствие газов поршень располагается вплотную к левому торцу цилиндра, при этом пружина не деформирована. Боковая поверхность цилиндра и поршень теплонепроницаемы. Нагревание газа осуществляется через левый торец цилиндра. Пренебрегая трением поршня о стенки цилиндра, определите теплоемкость рассматриваемой системы.

Решение

Обозначим через x расстояние от левого торца цилиндра до поршня. Давление газа

$$p = \frac{kx}{S}$$

Из этого выражения видно, что давление прямо пропорционально объему газа. Работа газа в этом случае равна

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2)$$

При переходе из состояния 1 в состояние 2 при условии, что давление прямо пропорционально объему с коэффициентом пропорциональности k, работа газа будет определяться как

$$A = 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 0{,}5k(V_2^2 - V_1^2) = 0{,}5(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = 1{,}5(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Как следует из первого начала термодинамики, количество теплоты Q, подведенное к газу, равно сумме работы газа и изменения внутренней энергии. Разделив эту сумму на изменение температуры, получим искомое значение теплоемкости системы:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{A + \Delta U}{\Delta T} = 10R$$

4. Из одной точки одновременно бросают два тела с одинаковыми по модулю скоростями V_0: одно вертикально вверх, другое под углом α к горизонту. Найдите их относительную скорость в момент времени t.

Решение

Выразим относительную скорость через ее проекции

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

В свою очередь

$$V_x = -V_0 \cos\alpha$$
$$V_y = V_0(1 - \sin\alpha)$$

Подставив эти выражения в первое выражение, получим

$$V = \sqrt{1 - 2V_0^2 \sin\alpha + V_0^2}$$

5. Через невесомый блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой подвешены грузы массами m_1 и m_2. Пренебрегая трением в блоке и сопротивлением воздуха, найдите ускорение центра масс этой системы.

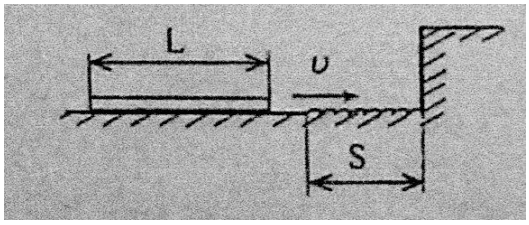
Решение

Поскольку ускорения грузов равны по модулю, линия соединяющая грузы будет вращаться вокруг точки, лежащей на одной вертикали с осью блока. Пусть для определенности $m_1 > m_2$ и пусть в некоторый момент времени грузы находятся на одной высоте на расстоянии L друг от друга. Тогда центр масс, находящийся на расстоянии

$$x = \frac{L}{2} - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} = L\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

от середины расстояния между грузами будет иметь ускорение

$$a_{\text{цм}} = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$



6. По гладкой горизонтальной плоскости скользит со скоростью $V = 1{,}0$ м/с тонкий однородный брусок длиной $L = 1{,}5$ м и массой $m = 1$ кг. Брусок наезжает на шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0{,}15$ и длиной $S = 0{,}5$ м и, пройдя этот участок, абсолютно неупруго ударяется о вертикальную стенку и останавливается. Определите потерю механической энергии при ударе. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Сила трения скольжения по шероховатому участку определяется как

$$F = \mu\frac{M}{L}xg$$

Работа силы трения

$$A = \frac{\mu M x g S}{2L}$$

Скорость тела в момент соударения со стенкой

$$V_1 = \sqrt{V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}}$$

Количество выделившейся теплоты

$$Q = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{m}{2}\left(V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}\right) \approx 0{,}375 \text{ Дж}$$