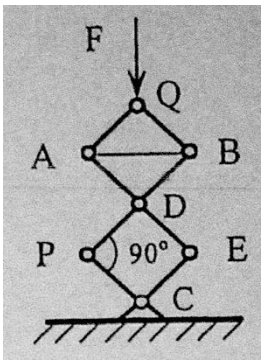
11 класс, вариант 4



1. С какой силой натянут трос AB, если на систему шарнирно скрепленных стержней действует вертикально направленная сила F? Сплошные недеформируемые стержни AE и BP соединены посередине так, что длины всех участков между шарнирами равны. Массами стержней и троса можно пренебречь.

Решение

При уменьшении длины троса на ΔL точка Q перемещается на $2\Delta L$. Работа силы натяжения троса должна, очевидно, быть равна работе силы F, то есть

$$T\Delta L = F \cdot 2\Delta L$$

а значит,

$$T = 2F$$

2. В дне открытого сверху цилиндрического сосуда площадью основания S_0, заполненного идеальной жидкостью, просверлено малое отверстие площадью $S << S_0$. Через время τ вся жидкость вытекла из сосуда. Определите высоту сосуда.

Решение

Условие $S << S_0$ позволяет использовать теорему Торричелли. По теореме Торричелли

$$V = \sqrt{2gH}$$

Из этого выражения следует, что поверхность жидкости движется как свободно падающее тело. Поэтому

$$H = \frac{g\tau^2}{2}$$

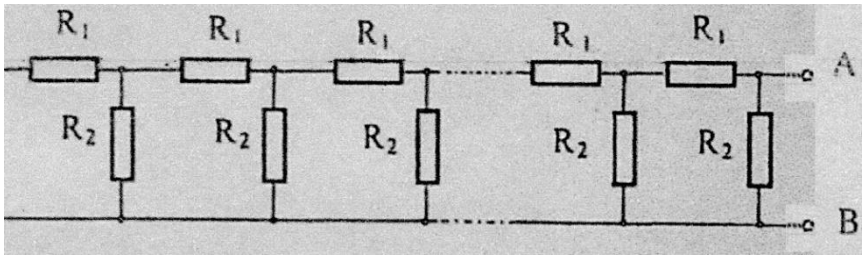
3. Закрытый сосуд содержит некоторое количество разреженного инертного газа ксенона при температуре T_0 = 100 К. Сосуд поступательно движется со скоростью V = 5 м/с. Какая температура установится в сосуде, если его резко остановить? Молярная масса ксенона равна 131 г/моль.

Решение

Процесс в газе – адиабатное сжатие, поскольку происходит быстро, и теплообменом можно пренебречь. Изменение внутренней энергии газа будет равно кинетической энергии газа как единого целого.

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{3m}{2\mu} R(T - T_0)$$

$$T = T_0 + \frac{\mu V^2}{3R} = 100{,}13\ K$$



4. Дана цепь, составленная из бесконечного числа повторяющихся секций резисторами, имеющими сопротивления R_1 = 4 Ом и R_2 = 8 Ом. Найдите сопротивление между точками А и В.

Решение

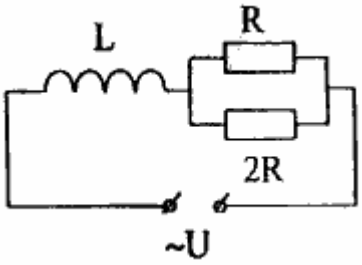
Цепь состоит из бесконечного количества звеньев R_1R_2. Удаление одного звена не изменяет полного сопротивления цепи. Поэтому можно записать для сопротивления всей цепи:

$$r = \frac{R_2(R_1 + r)}{R_2 + R_1 + r}$$

Решая это уравнение относительно r, получим

$$r = \frac{-R_1 + \sqrt{{R_1}^2 - R_1R_2}}{2} = 4\ \text{Ом}$$

5. Катушку индуктивности L = 1,0 мГн, соединенную последовательно с резистором, подключили к источнику переменного напряжения с циклической частотой ω = 400 рад/с. Найдите значение сопротивления R резистора, при котором в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность.



Решение

Полное сопротивление цепи и полная мощность цепи будет определяться как

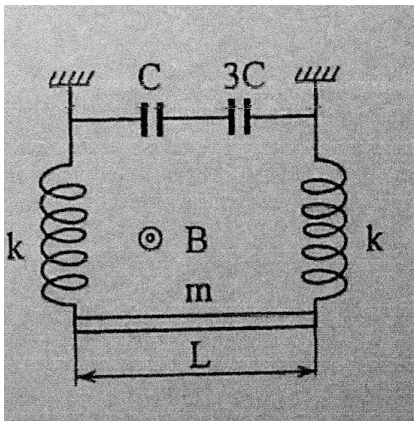
$$Z = \sqrt{R_\Sigma^2 + X_L^2} \Rightarrow P = \frac{U_\partial^2 R_\Sigma}{R_\Sigma^2 + X_L^2} = \frac{U_0^2 R_\Sigma}{2\left(R_\Sigma^2 + X_L^2\right)}$$

Максимум тепловой мощности будет наблюдаться при условии

$$\frac{dP}{dR}=\frac{U_0^2}{2}\left(\frac{R_\Sigma^2+X_L^2-R_\Sigma\cdot 2R_\Sigma}{\left(R_\Sigma^2+X_L^2\right)^2}\right)=0\Rightarrow X_L^2-R_\Sigma^2=0$$

Значит, $R_\Sigma=X_L\Rightarrow R_\Sigma=\omega L$ и

$$\frac{1}{R_\Sigma}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}\Rightarrow R_\Sigma=\frac{2}{3}R=\omega L\Rightarrow R=\frac{3}{2}\omega L \qquad R = 0{,}6 \text{ Ом}$$



6. Проводящий стержень массой m и длиной L подвешен к диэлектрическим подвесам с помощью двух одинаковых пружин жесткостью k каждая. К верхним концам пружин присоединена батарея их двух конденсаторов, емкости которых C и $3C$. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка. Система совершает колебания в вертикальной плоскости. Пренебрегая массой пружин, сопротивлением, собственными емкостями и индуктивностями проводников, определите период колебаний системы.

Решение

При движении стержня в нем возникает э.д.с. индукции и протекает индукционный ток. На стержень действуют силы тяжести, упругости пружин и Ампера. На период колебаний влияют только две последних силы. Суммарная емкость батареи конденсаторов равна $0{,}75C$. Уравнение колебательного движения стержня имеет вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+IBL+2kx=0$$

Учитывая, что

$$I=\frac{3}{4}C\frac{dU_c}{dt},$$

а по второму правилу Кирхгофа э.д.с. индукции равна напряжению на конденсаторе, получаем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = BL\frac{d^2y}{dt^2}$$

Уравнение движения приобретает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2ky}{m + 0{,}75CB^2L^2} = 0$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + 0{,}75CB^2L^2}{2k}}$$