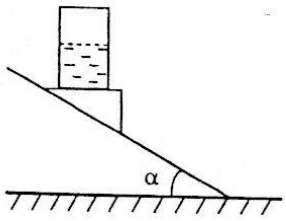
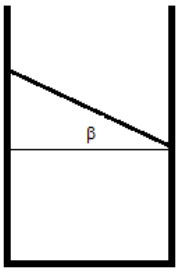
10 класс, вариант 5



1. Сосуд, имеющий в основании квадрат со стороной 1 м и высотой 2 м, заполненный водой наполовину, поставлен на клин, скользящий вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α = 45° с горизонтом. Дно сосуда расположено горизонтально. Коэффициент трения клина о наклонную плоскость равен 0,278. Найдите силу давления воды на заднюю по ходу движения стенку сосуда.



Решение

При движении сосуда с ускорением, имеющим горизонтальную проекцию, поверхность воды отклонится от горизонтальной на угол, определяемый как

$$tg\beta = \frac{\sqrt{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2}$$

Обозначим высоты воды у передней стенки через y, а у задней стенки – через $x + y$. Тогда объем воды в покое и при движении может быть записан как

$$\frac{Hl^2}{2} = l^2\frac{x+2y}{2}$$

Учитывая, что

$$\frac{x}{l} = tg\beta,$$

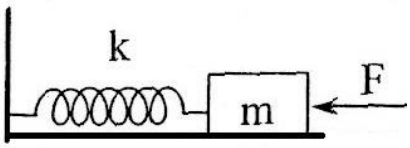
$$H = ltg\beta + 2y$$

и

$$x + y = \frac{H}{2} + \frac{\sqrt{2}l}{4g}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Тогда

$$F = \frac{\rho gl(x+y)}{2} = \frac{\rho gl}{4}\left[H + \frac{\sqrt{2}}{2g}l(sin\,\alpha - \mu\,cos\,\alpha)\right] \approx 5090\text{ Н}$$



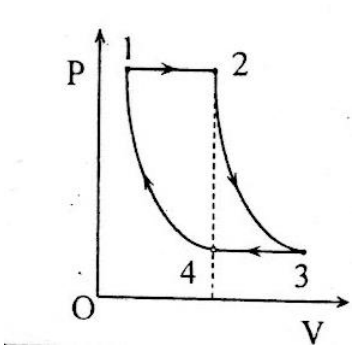
2. На неподвижный груз, лежащий на гладком горизонтальном столе и прикрепленный к пружине жесткостью $k = 9\cdot10^2$ Н/м начинает действовать постоянная сила $F = 1$ Н. Через некоторое время действие силы прекращается. Определите, какое расстояние должно пройти тело, чтобы скорость тела в момент прекращения действия силы равнялась нулю.

Решение

Нулевое значение скорости будет достигнуто при максимальном сжатии пружины. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии это будет при следующих условиях:

$$FL = \frac{kL^2}{2}$$

Из приведенного выражения видно, что сила упругости должна быть в 2 раза больше постоянно действующей силы. Выполняя расчеты, получим перемещение, равное приблизительно 2,2 мм.



3. На диаграмме зависимости давления от объема для некоторой массы идеального газа изображен цикл, состоящий из двух изотерм и двух изобар. Найдите отношение температур в точках 3 и 1, если отношение объемов в этих точках равно n = 2. Объемы газа в точках 2 и 4 одинаковые.

Решение

Запишем уравнения состояния для всех четырех состояний:

$$p_1V_1 = \nu RT_1$$
$$p_1V_2 = \nu RT_3$$
$$p_3V_3 = \nu RT_3$$
$$p_3V_2 = \nu RT_1$$

Разделим первое уравнение на третье, а второе на четвертое, получим:

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{T_3}{T_1} \cdot \frac{1}{n}$$

Окончательно имеем

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{n} = \sqrt{2}$$

4. Из резинового жгута, масса которого m, а коэффициент жёсткости равен k, изготовлено кольцо. При вращении этого кольца с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, радиус кольца равен R. Определите исходную длину жгута L.

Решение

Вырежем из жгута малый участок, опирающийся на малый угол α такой, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

На концах участка приложим силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, масса сегмента $\Delta m = m\dfrac{2\alpha}{2\pi} \Rightarrow \Delta m = m\dfrac{\alpha}{\pi}$. (1)

Рассмотрим вращение данного участка жгута относительно оси вращения.

$\Delta m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ (ОУД)

ox: $\Delta m a_\tau = T_2\cos\alpha - T_1\cos\alpha = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 = T$

$oy: \Delta m a_n = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha \Rightarrow \Delta m a_n = 2T\alpha$ (2)

$a_n = \omega^2 R$ (3)

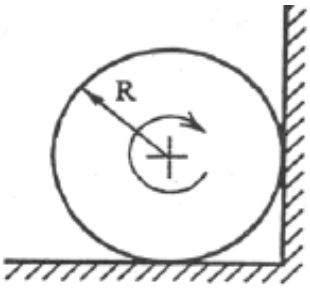
Подставим (1),(3) в (2) $\Rightarrow m\dfrac{\alpha}{\pi}\omega^2 R = 2T\alpha$

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi} = F_y;$$

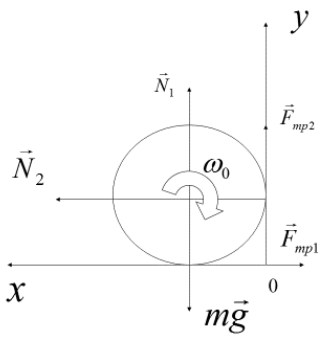
$$F_y = k\Delta l = k\left(2\pi R - L\right) \Rightarrow k\left(2\pi R - L\right) = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}$$

$$2\pi R - \frac{m\omega^2 R}{2k\pi} = L \Rightarrow L = R\left(\frac{4\pi^2 k - m\omega^2}{2k\pi}\right)$$

5. Тонкостенный цилиндр массы m и радиуса R раскрутили вокруг оси и поместили в угол (смотри рисунок). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ. Определите, до какой угловой скорости ω_0 был раскручен цилиндр, если до остановки он сделал *n* оборотов.



Решение



По теореме об изменении кинетической энергии

$W_{кк} - W_{ко} = A_{вс}$ (1)

Начальная кинетическая энергия

$$W_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} \qquad (2)$$

Конечная кинетическая энергия

$$W_к = \frac{I\omega_к^2}{2} = 0 \qquad (3)$$

Момент инерции тонкого цилиндра

$I = mR^2$ (4)

$A_{вс} = A_{тр} = -(F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn$ (5)

$$W_0 = \frac{mR^2\omega_0^2}{2} = (F_{тр1} + F_{тр2})2\pi Rn \quad (6)$$

Запишем ОУД $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр1} + \vec{F}_{тр2} = 0$ (7)

В проекциях на оси

$ox: N_2 - F_{тр1} = 0 \quad (8)$

$oy: N_1 + F_{тр2} - mg = 0 \quad (9)$

$F_{тр1} = \mu_1 N_1 \quad (10)$

$F_{тр2} = \mu_2 N_2 \quad (11)$

Подставим (10) в (8), а (11) в (9)

$N_2 - \mu_1 N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \mu_1 N_1 \quad (12)$

$N_1 + \mu_2 N_2 - mg = 0 \quad \Rightarrow N_1 + \mu_2\mu_1 N_1 - mg = 0 \quad (13)$

$$N_1(1 + \mu_2\mu_1) = mg \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{(1 + \mu_2\mu_1)} \Rightarrow F_{тр1} = \frac{\mu_1 mg}{(1 + \mu_2\mu_1)} \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{\mu_1 mg}{(1 + \mu_2\mu_1)} \quad \Rightarrow F_{тр2} = \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1 + \mu_2\mu_1)} \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в (6)

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{2} = \left(\frac{\mu_1 mg}{(1 + \mu_2\mu_1)} + \frac{\mu_1\mu_2 mg}{(1 + \mu_2\mu_1)}\right) \cdot 2\pi Rn$$

$$\frac{R^2\omega_0^2}{2} = \frac{2\pi Rn\mu_1 g(1 + \mu_2)}{(1 + \mu_2\mu_1)} = \frac{R\omega_0^2}{2} = \frac{2\pi n\mu_1 g(1 + \mu_2)}{(1 + \mu_2\mu_1)}$$

Получаем $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n\mu_1 g(1 + \mu_2)}{R(1 + \mu_2\mu_1)}} = \sqrt{\frac{4\pi n\mu g(1 + \mu)}{R(1 + \mu^2)}}$

6. С полюса Земли запускают ракету с начальной скоростью V_0, направленной по касательной к поверхности Земли, причем модуль скорости больше первой космической, но меньше второй космической. Найдите максимальное расстояние, на которое ракета удалится от центра Земли.

При указанных условиях ракета полетит по эллипсу, малой осью которого будет земная ось. По второму закону Кеплера

$$R_3 V_0 = LV$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{GMm}{R_3} = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{L}$$

Заменяя

$$GM = gR_3^2$$

и решая систему уравнений, получим

$$L = \frac{g_0 R_3^2 + R_3\sqrt{(g_0 R_3)^2 - V_0^2(2g_0 R_3 - V_0^2)}}{2g_0 R_3 - V_0^2}$$