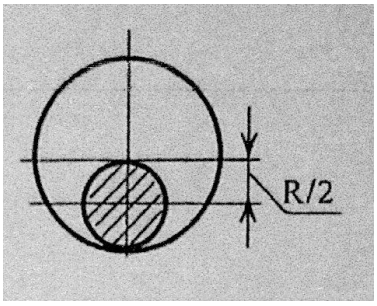
11 класс, вариант 1



1. В однородном цилиндре радиусом R и массой m на расстоянии $R/2$ от центра цилиндра параллельно его оси просверлено сквозное отверстие имеющее радиус $r = R/2$. Отверстие залито веществом, плотность которого в $n = 3$ раза больше плотности вещества. Цилиндр находится на горизонтальной поверхности в положении, показанном на рисунке. Определите, какую минимальную работу нужно совершить для перекатывания без скольжения этого цилиндра так, чтобы его центр переместился на расстояние $L = \pi R$.

Решение

В процессе перекатывания центр масс от его исходного положения поднимается на высоту, равную удвоенному расстоянию его от оси цилиндра.

Центр масс целого цилиндра находится на оси цилиндра. Центр масс залитой части находится на оси залитой части. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра. Определим положение центра масс оставшейся части цилиндра относительно оси цилиндра. Масса высверленной части относится к массе целого цилиндра, как площадь сечения высверленной части относится к площади сечения целого цилиндра. В задаче это отношение равно 0,25. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра.

$$\frac{1}{4}m\frac{R}{2} = \frac{3}{4}mx_c \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{R}{6}$$

Масса залитой части в 3 раза больше массы высверленного вещества цилиндра. Оставшаяся масса цилиндра составляет 0,75 массы цилиндра. Положение центра масс полученного тела определим относительно центра масс залитой части:

$$x' = \frac{0{,}75m\left(\frac{R}{6} + \frac{R}{2}\right)}{1{,}5m} = \frac{R}{3}$$

Относительно оси цилиндра центр масс находится на расстоянии

Работа по перемещению цилиндра равна

$$A = \frac{3}{2}mg\frac{R}{6} = \frac{mgR}{4}$$

2. В стенке открытого сверху бака с водой просверлены одно под другим два небольших отверстия. Одно отверстие расположено на глубине h от

поверхности воды, второе – на глубине $3h$. Уровень воды в баке поддерживается постоянным Найдите расстояние от поверхности воды в баке по вертикали до точки пересечения струй воды, вытекающих из отверстия.

Решение

По теореме Торричелли скорости вытекающих струй воды равны

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$
$$V_2 = \sqrt{6gh}$$

Условие пересечения струй по горизонтали

$$V_1 t_1 = V_2 t_2$$
$$t_1 = \sqrt{3} t_2$$

Условие пересечения струй по вертикали

$$h + \frac{g t_1^2}{2} = 3h + \frac{g t_2^2}{2}$$

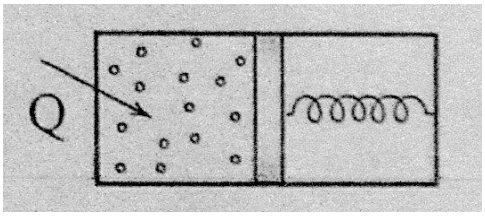
Отсюда получим

$$t_1 = \sqrt{\frac{6h}{g}}$$

И расстояние по горизонтали

$$y = h + \frac{g}{2} \cdot \frac{6h}{g} = 4h$$

3. Два моля неона и три моля гелия находятся в левой половине цилиндра, показанного на рисунке. Цилиндр разделен на две части поршнем, соединенного пружиной с правым торцом цилиндра. Справа от поршня – вакуум. В отсутствие газов поршень располагается вплотную к левому торцу цилиндра, при этом пружина не деформирована. Боковая поверхность цилиндра и поршень теплонепроницаемы. Нагревание газа осуществляется через левый торец цилиндра. Пренебрегая трением поршня о стенки цилиндра, определите теплоемкость рассматриваемой системы.



Решение

Обозначим через x расстояние от левого торца цилиндра до поршня. Давление газа

$$p = \frac{kx}{S}$$

Из этого выражения видно, что давление прямо пропорционально объему газа. Работа газа в этом случае равна

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2)$$

При переходе из состояния 1 в состояние 2 при условии, что давление прямо пропорционально объему с коэффициентом пропорциональности k, работа газа будет определяться как

$$A = 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 0{,}5k(V_2^2 - V_1^2) = 0{,}5(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = 1{,}5(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Как следует из первого начала термодинамики, количество теплоты Q, подведенное к газу, равно сумме работы газа и изменения внутренней энергии. Разделив эту сумму на изменение температуры, получим искомое значение теплоемкости системы:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{A + \Delta U}{\Delta T} = 10R$$

4. Жесткое тонкое однородное проводящее кольцо радиусом R и массой m лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в однородном магнитном поле, силовые линии которого горизонтальны. При пропускании по кольцу тока силой I кольцо начинает приподниматься. Найдите значение модуля вектора магнитной индукции.

Решение

Кольцо приподнимается, опираясь одной своей точкой на стол. Пусть кольцо поворачивается при этом на малый угол dφ. При этом совершается механическая работа

$$A = mgRd\varphi$$

Работа в магнитном поле при этом равна

$$A = \pi R^2 BId\varphi$$

Приравнивая эти работы, получим

$$B = \frac{Mg}{\pi RI}$$

5. Через невесомый блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой подвешены грузы массами m_1 и m_2. Пренебрегая трением в блоке и сопротивлением воздуха, найдите ускорение центра масс этой системы.

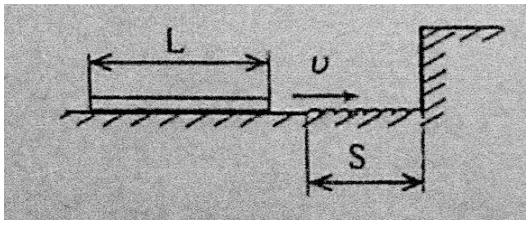
Решение

Поскольку ускорения грузов равны по модулю, линия соединяющая грузы будет вращаться вокруг точки, лежащей на одной вертикали с осью блока. Пусть для определенности $m_1 > m_2$ и пусть в некоторый момент времени грузы находятся на одной высоте на расстоянии L друг от друга. Тогда центр масс, находящийся на расстоянии

$$x = \frac{L}{2} - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} = L\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

от середины расстояния между грузами будет иметь ускорение

$$a_{\text{цм}} = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$



6. По гладкой горизонтальной плоскости скользит со скоростью $V = 1{,}0$ м/с тонкий однородный брусок длиной $L = 1{,}5$ м. Брусок наезжает на шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0{,}15$ и длиной $S = 0{,}5$ м и, пройдя этот участок, абсолютно неупруго ударяется о вертикальную стенку. Определите время движения бруска по шероховатому участку поверхности. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Решение

Сила трения скольжения по шероховатому участку определяется как

$$F = \mu\frac{M}{L}xg$$

Работа силы трения

$$A = \frac{\mu MxgS}{2L}$$

Скорость тела в момент соударения со стенкой

$$V_1 = \sqrt{V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}}$$

Уравнение движения тела

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu M g}{L}x = 0$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция, на участке от въезда на шероховатый участок до остановки тела.

$$\frac{\sqrt{V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}}}{V} = \cos\sqrt{\frac{\mu g}{L}}\tau$$

Окончательно получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}arccos\frac{\sqrt{V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}}}{V} \approx 0{,}52 \text{ с}$$