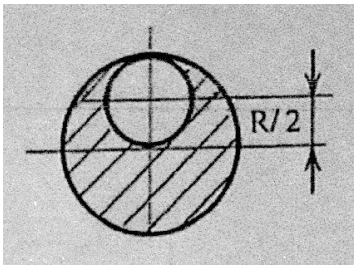
11 класс, вариант 2



1. В однородном цилиндре радиусом R и массой m на расстоянии $R/2$ от центра цилиндра параллельно его оси просверлено сквозное отверстие имеющее радиус $r = R/2$. Цилиндр находится на горизонтальной поверхности в положении, показанном на рисунке. Определите, какую минимальную работу нужно совершить для перекатывания без скольжения этого цилиндра так, чтобы его центр переместился на расстояние $L = 1{,}5\pi R$.

Решение

В процессе перекатывания центр масс от его исходного положения поднимается на высоту, равную расстоянию его от оси цилиндра.

Центр масс целого цилиндра находится на оси цилиндра. Центр масс высверленной части находится на оси высверленной части. Масса высверленной части относится к массе целого цилиндра, как площадь сечения высверленной части относится к площади сечения целого цилиндра. В задаче это отношение равно 0,25. Выберем начало отсчета на оси целого цилиндра. Определим положение центра масс оставшейся части цилиндра относительно оси цилиндра:

$$\frac{1}{4}m\frac{R}{2} = \frac{3}{4}mx_c \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{R}{6}$$

Работа по перемещению цилиндра равна

$$A = \frac{3}{4}mg\frac{R}{6} = \frac{mgR}{8}$$

2. В стенке открытого сверху бака с водой просверлены одно под другим два небольших отверстия. Одно отверстие расположено на глубине h от поверхности воды, второе – на глубине $3h$. Уровень воды в баке поддерживается постоянным Найдите расстояние от стенки бака до точки пересечения струй воды, вытекающих из отверстия.

Решение

По теореме Торричелли скорости вытекающих струй воды равны

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$
$$V_2 = \sqrt{6gh}$$

Условие пересечения струй по горизонтали

$$V_1 t_1 = V_2 t_2$$

$$t_1 = \sqrt{3}t_2$$

Условие пересечения струй по вертикали

$$h + \frac{gt_1^2}{2} = 3h + \frac{gt_2^2}{2}$$

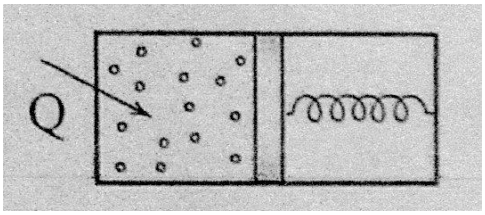
Отсюда получим

$$t_1 = \sqrt{\frac{6h}{g}}$$

И расстояние по горизонтали

$$x = V_1 t_1 = \sqrt{\frac{2gh \cdot 6h}{g}} = 2h\sqrt{3}$$

3. Одноатомный идеальный газ находится в левой половине цилиндра, показанного на рисунке. Объем, занимаемый газом, равен $V = 4$ л при давлении $p = 10^6$ Па. Цилиндр разделен на две части поршнем, соединенного пружиной с правым торцом цилиндра. Справа от поршня – вакуум. В отсутствие газа поршень располагается вплотную к левому торцу цилиндра, при этом пружина не деформирована. Пренебрегая трением поршня о стенки цилиндра, определите, какую работу совершает газ при увеличении его объема в $n = 3$ раза.



Решение

Обозначим через x расстояние от левого торца цилиндра до поршня. Давление газа

$$p = \frac{kx}{S}$$

Из этого выражения видно, что давление прямо пропорционально объему газа. Работа газа в этом случае равна

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2)$$

Учтем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n}$$

Тогда

$$A = p_1 V_1 (n^2 - 1) = 16 \text{ кДж}$$

4. Жесткое тонкое однородное проводящее кольцо радиусом R лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в однородном магнитном поле, силовые линии которого горизонтальны. Модуль вектора магнитной индукции равен B. При пропускании по кольцу тока силой I кольцо начинает приподниматься. Найдите массу кольца.

Решение

Кольцо приподнимается, опираясь одной своей точкой на стол. Пусть кольцо поворачивается при этом на малый угол dφ. При этом совершается механическая работа

$$A = mgRd\varphi$$

Работа в магнитном поле при этом равна

$$A = \pi R^2 BId\varphi$$

Приравнивая эти работы, получим

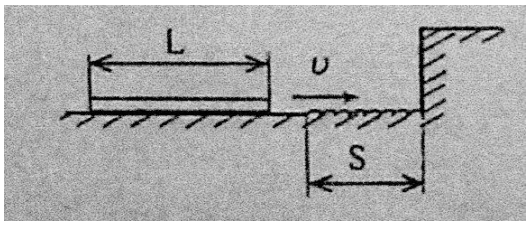
$$m = \frac{\pi IRB}{g}$$

5. Через невесомый блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута нерастяжимая нить, масса которой m_0. На концах веревки подвешены грузы массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Пренебрегая трением в блоке и сопротивлением воздуха, найдите ускорение веревки в тот момент времени, когда она расположена симметрично по обе стороны блока.

Решение

При симметричном расположении веревки относительно блока массы, находящиеся по разные стороны блока будут равны $m_1 + 0{,}5\ m_0$ и $m_2 + 0{,}5\ m_0$. Ускорение веревки будет равно

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_0}$$



6. По гладкой горизонтальной плоскости скользит тонкий однородный брусок длиной L = 1,5 м. Брусок наезжает на шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения μ = 0,15 и длиной S = 0,5 м и, пройдя этот участок за время τ = 0,74 с, абсолютно неупруго ударяется о вертикальную стенку. Определите скорость движения бруска по гладкому участку поверхности. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Решение

Сила трения скольжения по шероховатому участку определяется как

$$F = \mu \frac{M}{L} xg$$

Работа силы трения

$$A = \frac{\mu MxgS}{2L}$$

Скорость тела в момент соударения со стенкой

$$V_1 = \sqrt{V^2 - \frac{\mu g S^2}{L}}$$

Уравнение движения тела

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu Mg}{L} x = 0$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция, на участке от въезда на шероховатый участок до остановки тела.

$$\frac{V_1}{V} = \cos \sqrt{\frac{\mu g}{L}} \tau$$

Окончательно получаем

$$V = \frac{\mu g S^2}{1 - cos^2 \sqrt{\frac{\mu g}{L}} \tau} \approx 0{,}825 \text{ м/с}$$