Математика. 9 класс

Вариант 11

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения X при $a=-\frac{1}{2020}$, если

$$X=\left(\frac{1}{2-6a}+\frac{1}{27a^3-1}:\frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}.$$

Решение.

Упростим выражение X.

$$X=\left(\frac{1}{2-6a}+\frac{1}{27a^3-1}:\frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(1-3a)}+\frac{1}{(3a-1)(1+3a+9a^2)}\cdot\frac{1+3a+9a^2}{1+3a}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(1-3a)}-\frac{1}{(1-3a)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=\left(\frac{1+3a-2}{2(1-3a)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=$$

$$=\left(\frac{3a-1}{-2(3a-1)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=-\frac{1}{a}.$$

Если $a=-\frac{1}{2020}$, то $X=2020$.

Ответ. 2020.

Задача 2. (10 баллов) Найти два различных корня x_1, x_2 уравнения $x^2-6bx+c=0$, если числа b, x_1, x_2, c образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=c, \\ x_1+x_2=6b; \end{cases}$

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии, тогда $x_1=bq,\ x_2=bq^2,\ c=bq^3$.

Система примет вид $\begin{cases} bq\cdot bq^2=bq^3, \\ bq+bq^2=6b; \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-b=0, \\ q+q^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1=0, b_2=1, \\ q+q^2-6=0; \end{cases}$

Так как b первый член геометрической прогрессии, то $b_1=0$ не подходит по смыслу

Если $b=1$, то $q^2+q-6=0$, $q_1=-3,\ q_2=2$.

Если $q=-3$, то $x_1=-3, x_2=9$.

Если $q=2$, то $x_1=2, x_2=4$.

Ответ. $x_1 = -3, x_2 = 9$ или $x_1 = 2, x_2 = 4$.

Задача 3. (15 баллов) Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b в n раз меньше их среднего арифметического. Доказать, что

$$\frac{a}{b} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 - 1}}$$

Решение. Очевидно, что $a > b$. По условию задачи имеем:

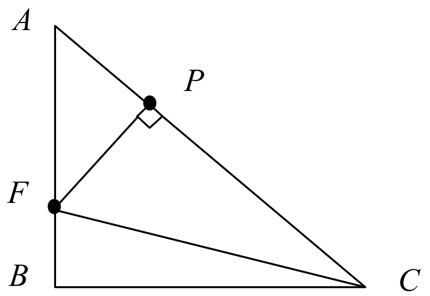
$\frac{a+b}{2} = n \cdot \sqrt{ab}$, $\frac{a}{b} + 1 = 2n \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$. Примем $\sqrt{\frac{a}{b}} = t > 1$. Тогда $t^2 - 2nt + 1 = 0$, $t_{1,2} = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$. При условии $t > 1$, $t = n + \sqrt{n^2 - 1}$.

$$\frac{a}{b} = t^2 = \left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2 = \frac{\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2}{1} = \frac{\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2}{n^2 - \left(\sqrt{n^2 - 1}\right)^2} = \frac{\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2}{\left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right)\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 - 1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 4. (20 баллов) Точка P лежит на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника ABC . Точка F принадлежит катету AB , причем угол FPC прямой. Площадь треугольника FPC составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника ABC. Определить, в какой пропорции точка P делит сторону AC.

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC = 45^0$.
Тогда ΔAPF тоже равнобедренный и $AP = PF = x$.
Обозначим $PC = y$, $AB = a$. По теореме Пифагора из ΔABC:

$(x + y)^2 = 2a^2$, $x + y = \sqrt{2}a$.

По условию $S_{\Delta FPC} = \frac{3}{8} S_{\Delta ABC}$, $\frac{1}{2} xy = \frac{3}{8} \frac{a^2}{2}$, $y = \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{x}$.

Тогда, $x + \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{x} = \sqrt{2}a$, $8x^2 - 8\sqrt{2}ax + 3a^2 = 0$, $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и $x_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Корень $x_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ не подходит, т.к. $F \in AB$ и $x < AB$.

Таким образом, $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}a-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ. 1:3.

Задача 5. (20 баллов) Найти все целые значения переменной x, при которых значение $b=2$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{b^2}{x^2-x+b+1}+\frac{b}{b+x-5}\le\frac{bx^2-bx-b^3-5}{(x^2-x+2b-1)(1-b^2+x)}.$$

Решение.

Подставим в неравенство значение $b=2$, получим неравенство

$$\frac{4}{x^2-x+3}+\frac{2}{x-3}\le\frac{2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}.$$

$$\frac{4}{x^2-x+3}+\frac{2}{x-3}-\frac{2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0,$$

$$\frac{4(x-3)+2(x^2-x+3)-2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0,$$

$$\frac{4x+7}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0.$$

Решим методом интервалов (рис.1)

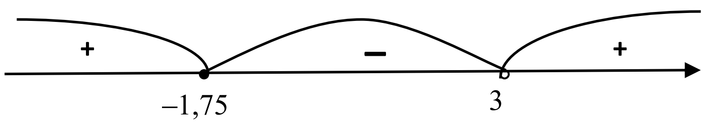


Рис.1.

Таким образом, $x\in[-1{,}75;3)$ и принимает целые значения: –1, 0, 1, 2.

Ответ. –1, 0, 1, 2.

Задача 6. (30 баллов) В детский сад привезли мороженое четырех видов. Каждый ребенок должен был получить одну порцию мороженого. Ребята сами выбирали мороженое. Оказалось, что число выбранных порций каждого вида равно цене в копейках одной порции этого же вида. Число выбранных порций второго вида больше числа выбранных порций первого вида на столько, на сколько число выбранных порций четвертого вида больше числа выбранных порций третьего вида. Порций первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем порций второго и четвертого видов. За выбранное детьми мороженое уплатили 4 руб 20 коп. Сколько ребят в детском саду?

Решение.

Пусть x шт. – количество первого вида мороженого, y шт. – второго вида, z шт. – третьего вида и u шт. – четвертого вида. По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} y - x = u - z, \\ x + z = y + u - 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 420. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y - x = u - z, \\ x + z = y + u - 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 420, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 420, \\ x = -u + z + y, \\ -u + z + y + z = y + u - 4, \\ 2z = 2u - 4, \\ z = u - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 420, \\ z = u - 2, \\ x = -u + u - 2 + y, \\ x = y - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 420, \\ z = u - 2, \\ x = y - 2. \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнения в первое уравнение и преобразуем:

$$(y-2)^2 + y^2 + (u-2)^2 + u^2 = 420,$$

$$2y^2 - 4y + 4 + 2u^2 - 4u + 4 = 420,$$

$$y^2 - 2y + 2 + u^2 - 2u + 2 = 210,$$

$$(y-1)^2 + 1 + (u-1)^2 + 1 = 210,$$

$$(y-1)^2 + (u-1)^2 = 208.$$

Число 208 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел единственным образом: $208 = 8^2 + 12^2$. Тогда $y = 9$ и $u = 13$. Следовательно, $z = 11$ и $x = 7$.Тогда общее число детей равно общему числу порций мороженого, т.е. $x + y + z + u = 7 + 9 + 11 + 13 = 40$.

Ответ: 40.

Математика. 10 класс

Вариант 11

Задача 1. (5 баллов)

Найти значение выражения A при $x=998,\underbrace{222...23}_{2019}$, $y=1021,\underbrace{777...77}_{2020}$, если

$$A=\frac{y^2+xy-\sqrt[4]{x^5y^3}-\sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{x^2y^3}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Решение.

Выполним преобразования выражения A.

$$\frac{y^2+xy-x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{3}{4}}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=\frac{y(y+x)-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}(y+x)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{2}{4}}-x^{\frac{2}{4}}\right)}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=$$

$$=\frac{(y+x)\left(y-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{(y+x)y^{\frac{3}{4}}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}=x+y.$$

При $x=998,\underbrace{222...23}_{2019}$, $y=1021,\underbrace{777...77}_{2020}$, получим:

$$x+y=998,\underbrace{222...23}_{2019}+1021,\underbrace{777...77}_{2020}=2020.$$

Ответ. 2020.

Задача 2. (10 баллов) В первый год разработки месторождения было добыто 600 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 250тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.

Решение.

Пусть n – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто

$$600+\frac{3}{2}\cdot600+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot600+...+\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot600+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot600 \text{ тыс. т нефти.}$$

И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение:

$$600\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)=35250,\ \ 600\cdot\left(12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-2\right)=35250,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n}=\frac{81}{16},$$

$n=4$.

Тогда общее количество лет будет равно 14.

Ответ: 14.

Задача 3 (15 баллов) Найти все целые значения переменной x, при которых значение $b=2$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{b^2}{x^2-x+b+1}+\frac{b}{b+x-5}\le\frac{bx^2-bx-b^3-5}{(x^2-x+2b-1)(1-b^2+x)}.$$

Решение.

Подставим в неравенство значение $b=2$, получим неравенство

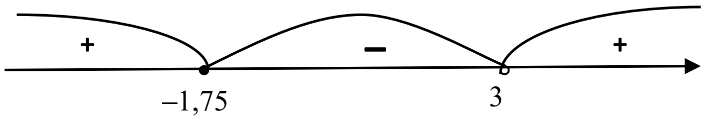
$$\frac{4}{x^2-x+3}+\frac{2}{x-3}\le\frac{2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}.$$

$$\frac{4}{x^2-x+3}+\frac{2}{x-3}-\frac{2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0,$$

$$\frac{4(x-3)+2(x^2-x+3)-2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0,$$

$$\frac{4x+7}{(x^2-x+3)(x-3)}\le 0.$$

Решим методом интервалов.



Таким образом, $x\in[-1{,}75;3)$ и принимает целые значения: –1, 0, 1, 2.

Ответ. –1, 0, 1, 2.

Задача 4. (20 баллов) Определить при каком значении n область определения функции $f(x)=\sqrt{x-7}-\sqrt{n-4x-x^2}$ состоит из одной точки.

Решение.

Функция определена на множестве:

$$\begin{cases}n-4x-x^2\ge 0,\\ x-7\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-n\le 0,\\ x\ge 7.\end{cases}.$$

Для того, чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы парабола $y=x^2+4x-n$ либо имела единственный корень, не меньший 7, либо имела 2 корня, больший из которых был бы равен 7. Эти условия выполнимы, если

$$\begin{cases} D=0, \\ x_b \geq 7, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y(7)=0, \\ x_b < 7. \end{cases}$$

Здесь $D=16+4n$ – дискриминант квадратного выражения, а $x_b=-2$ – абсцисса вершины параболы.

1. $\begin{cases} 16+4n=0, \\ -2 \geq 7, \end{cases}$ – система не имеет решений;

2. $\begin{cases} 49+28-n=0, \\ -2 < 7, \end{cases} \Leftrightarrow n=77$.

Решение совокупности этих систем – число $n=77$.

Ответ. 77.

Задача 5. (20 баллов) В детский сад привезли мороженое четырех видов. Каждый ребенок должен был получить одну порцию мороженого. Ребята сами выбирали мороженое. Оказалось, что число выбранных порций каждого вида равно цене в копейках одной порции этого же вида. Число выбранных порций второго вида больше числа выбранных порций первого вида на столько, на сколько число выбранных порций четвертого вида больше числа выбранных порций третьего вида. Порций первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем порций второго и четвертого видов. За выбранное детьми мороженое уплатили 4 руб 20 коп. Сколько ребят в детском саду?

Решение.

Пусть x шт. – количество первого вида мороженого, y шт. – второго вида, z шт. – третьего вида и u шт. – четвертого вида. По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} y-x=u-z, \\ x+z=y+u-4, \\ x^2+y^2+z^2+u^2=420. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y-x=u-z, \\ x+z=y+u-4, \\ x^2+y^2+z^2+u^2=420, \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2+z^2+u^2=420, \\ x=-u+z+y, \\ -u+z+y+z=y+u-4, \\ 2z=2u-4, \\ z=u-2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+u^2=420, \\ z=u-2, \\ x=-u+u-2+y, \\ x=y-2, \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2+z^2+u^2=420, \\ z=u-2, \\ x=y-2. \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнения в первое уравнение и преобразуем:

$$\left(y-2\right)^2+y^2+\left(u-2\right)^2+u^2=420,$$
$$2y^2-4y+4+2u^2-4u+4=420,$$
$$y^2-2y+2+u^2-2u+2=210,$$
$$\left(y-1\right)^2+1+\left(u-1\right)^2+1=210,$$
$$\left(y-1\right)^2+\left(u-1\right)^2=208.$$

Число 208 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел единственным образом: $208=8^2+12^2$. Тогда $y=9$ и $u=13$. Следовательно, $z=11$ и $x=7$.Тогда общее число детей равно общему числу порций мороженого, т.е. $x+y+z+u=7+9+11+13=40$.

Ответ: 40.

Задача 6. (30 баллов) Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 4см с центром в точке *O* в точках *A, B* и С. Площадь треугольника *ABC* больше 16см^2, площадь треугольника *OBC* равна 4см^2. Найти угол *BAC*.

Решение.

Так как радиусы *OA*, *OB* и *OC* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка -*OA*, *OB* и *OC*- лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью.

По условию задачи $S_{\Delta OBC}=4$, т.е.

$$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=4\Rightarrow\sin\angle BOC=\frac{1}{2}.$$

Возможные значения $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$ или $\angle BOC=\frac{5\pi}{6}$. Рассмотрим возможные варианты.

1. Если $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$, то $\angle BAC=\frac{\pi}{12}$(рис.1) или $\angle BAC=\frac{11\pi}{12}$(рис.2)

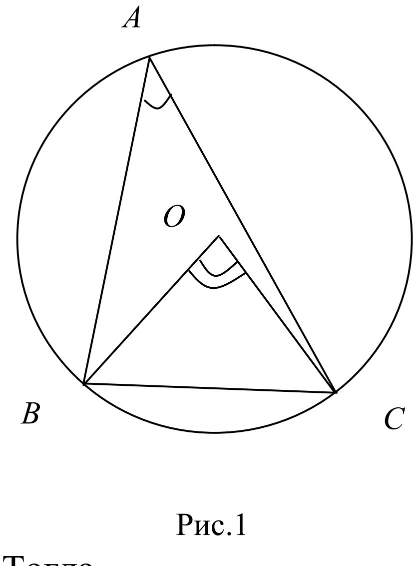


Рис.1

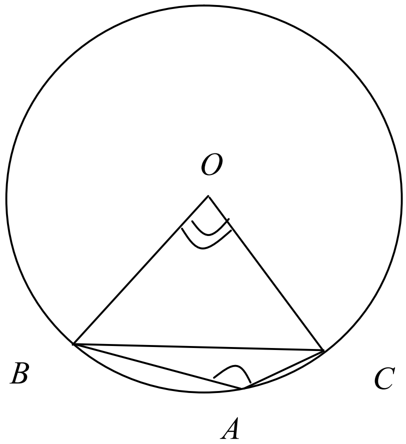


Рис.2

Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC<\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=16,$$

что противоречит условию.

2. Если $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$, то $\angle BAC = \frac{7\pi}{12}$ (рис.3) или $\angle BAC = \frac{5\pi}{12}$ (рис.4)

На рисунке 3

$S_{\Delta ABC} < \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором $S_{\Delta ABC} < 16$ представлен на рис.4.

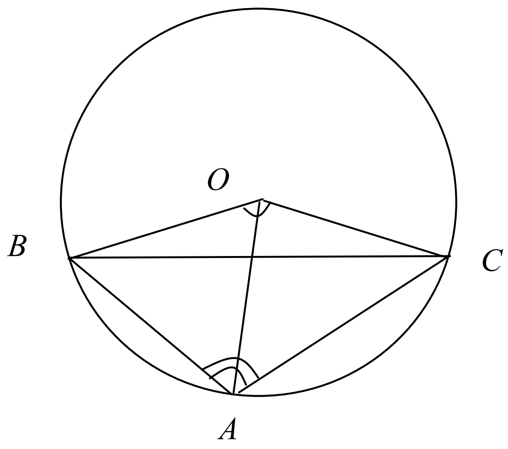


Рис.3

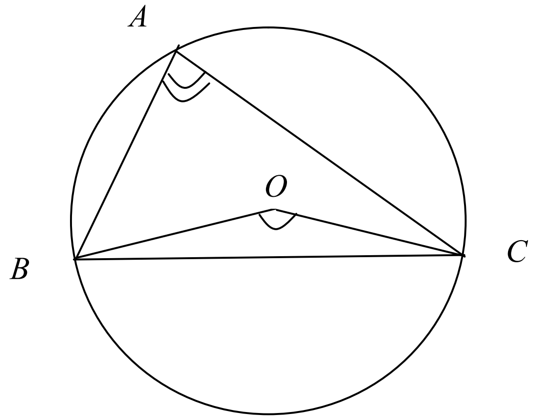


Рис.4

Ответ. $\angle BAC = \frac{5\pi}{12}$.

Математика. 11 класс

Вариант 11

Задача 1. (5 баллов)
Найти значение выражения A при $x = 1722,\underbrace{222...2}_{2019}3$, $y = 297,\underbrace{777...77}_{2020}$, если

$$A = \frac{y^2 + xy - \sqrt[4]{x^5 y^3} - \sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5} - \sqrt[4]{x^2 y^3}} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right).$$

Решение.
Выполним преобразования выражения A.

$$\frac{y^2 + xy - x^{\frac{5}{4}} y^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{2}{4}} y^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) = \frac{y(y+x) - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}(y+x)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{2}{4}}\right)} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) =$$

$$= \frac{(y+x)\left(y - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{(y+x) y^{\frac{3}{4}} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)} = x + y.$$

При $x = 1722,\underbrace{222...2}_{2019}3$, $y = 297,\underbrace{777...77}_{2020}$, получим:

$$x + y = 1722,\underbrace{222...2}_{2019}3 + 297,\underbrace{777...77}_{2020} = 2020.$$

Ответ. 2020.

Задача 2. (10 баллов) Определите число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получила оценку «удовлетворительно», 56% получили оценку «хорошо», а 14 студентов получили оценку «отлично». Отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

Решение.

Если 14 человек – 4 %, то всего студентов $x = \dfrac{14 \cdot 100}{4} = 350$.

Если 14 человек – 5 %, то всего студентов $x = \dfrac{14 \cdot 100}{5} = 280$.

Значит, всего студентов было от 280 до 350 человек.

Это число должно делиться на 6, так как известно, что каждая 6 часть получила оценку «удовлетворительно» (282, 288, 294, 300, 306, 312, 318, 324, 330, 336, 342, 348).

Также 56% от общего числа студентов есть целое число, т.к. такие студенты получили оценку «хорошо» – $x = \frac{56 \cdot 300}{100} = 168$.

Такое число одно – 300.

Ответ. 300.

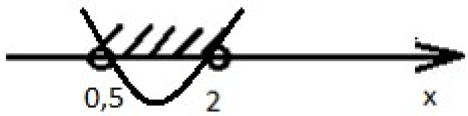
Задача 3. (15 баллов) Найдите сумму корней уравнения

$$(\cos 2\pi x - 5\cos \pi x - 2) \cdot \log_3 (5x - 2 - 2x^2) = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $5x - 2 - 2x^2 > 0$, $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 0{,}5, \\ 2. \end{array}\right.$$



Тогда $x \in (0{,}5;2)$.

Далее решение сводится к решению двух уравнений:

$\cos 2\pi x - 5\cos \pi x - 2 = 0$ и $\log_3 (5x - 2 - 2x^2) = 0$.

1) $\cos 2\pi x - 5\cos \pi x - 2 = 0$, $2\cos^2 \pi x - 1 - 5\cos \pi x - 2 = 0$,

$$2\cos^2 \pi x - 5\cos \pi x - 3 = 0, \ \cos \pi x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \left[\begin{array}{l} 3, \\ -0{,}5. \end{array}\right.$$

$\cos \pi x = 3$ – не имеет решений, т. к. $\cos \pi x \in [-1;1]$

$\cos \pi x = -0{,}5$, $\pi x = \pm \arccos(-0{,}5) + 2\pi n, \ n \in Z$,

$\pi x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$, $x = \pm \frac{2}{3} + 2n, \ n \in Z$.

Далее ищем решения, входящие в промежуток $x \in (0{,}5;2)$.

$n = 0: x = \frac{2}{3} \in (0{,}5;2), \ x = -\frac{2}{3} \notin (0{,}5;2),$

$n = 1: x = \frac{2}{3} + 2 \notin (0{,}5;2), \ x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \in (0{,}5;2),$

$n = 2: x = \frac{2}{3} + 4 \notin (0{,}5;2), \ x = -\frac{2}{3} + 4 = \frac{10}{3} \notin (0{,}5;2).$

2) Решим второе уравнение

$\log_3 (5x - 2 - 2x^2) = 0$, $5x - 2 - 2x^2 = 1$, $2x^2 - 5x + 3 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left[\begin{array}{l} 1{,}5 \in (0{,}5;2), \\ 1 \in (0{,}5;2). \end{array}\right.$$

Таким образом, получим 4 решения: $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1; 1{,}5$.

Их сумма $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 + 1{,}5 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Задача 4. (20 баллов) Три фермера продавали на рынке поштучно цыплят. Первый привез 12 цыплят, второй – 18, третий – 32 цыпленка. Каждый продал часть товара утром, часть – вечером. Утренняя цена одного цыпленка у всех фермеров была одинаковая, вечерняя тоже, но более низкая. К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка у всех оказалась одинаковой: 1700 условных единиц (за утро и вечер). Найти суммарную вечернюю выручку всех фермеров в условных единицах.

Решение.

Пусть первый, второй и третий фермеры продали утром $x,\ y,\ z$ $(x,\ y,\ z > 0)$ цыплят соответственно. Пусть также $a,\ b$ $(a > b > 0)$ утренняя и вечерняя цены соответственно.

Так как дневная выручка у всех одинакова и равна 1700 у.е., то получим:

$ax + b(12 - x) = ay + b(18 - y) = az + b(32 - z) = 1700$ (*).

Вычитая из предыдущего уравнения следующее, получим:

$(a - b)(x - y) = 6b,\ (a - b)(y - z) = 14b$.

Поделив уравнения, имеем $\dfrac{x - y}{y - z} = \dfrac{3}{7}$.

Таким образом, $x - y = 3k,\ \ y - z = 7k,\ \Rightarrow x - z = 10k,\ \ k \in N$.

Так как $x < 12$, то из последнего выражения получим $x = 11,\ z = 1$.

Поэтому $y = 8$. Подстав полученное значение в (*), имеем

$11a + b = 1700,\ \ 8a + 10b = 1700$.

Решая совместно эти уравнения, найдем: $a = 150,\ \ b = 50$.

Окончательно находим общую вечернюю выручку

$b(12 - x) + b(18 - y) + b(32 - z) = 42b = 2100$ у.е.

Ответ. 2100.

Задача 5. (20 баллов) Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 4см с центром в точке *O* в точках *A, B* и С. Площадь треугольника *ABC* больше 16см^2, площадь треугольника *OBC* равна 4 см^2. Найти угол *BAC*.

Решение.

Так как радиусы *OA*, *OB* и *OC* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка -*OA*, *OB* и *OC*- лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью (рис.1).

По условию задачи $S_{\Delta OBC} = 4$, т.е.

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC = 4 \Rightarrow \sin \angle BOC = \frac{1}{2}.$$

Возможные значения $\angle BOC = \dfrac{\pi}{6}$ или $\angle BOC = \dfrac{5\pi}{6}$. Рассмотрим варианты.

1. Если $\angle BOC = \dfrac{\pi}{6}$, то $\angle BAC = \dfrac{\pi}{12}$ (рис.1) или $\angle BAC = \dfrac{11\pi}{12}$ (рис.2)

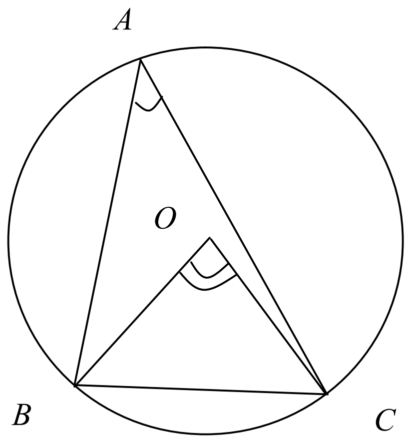


Рис.1

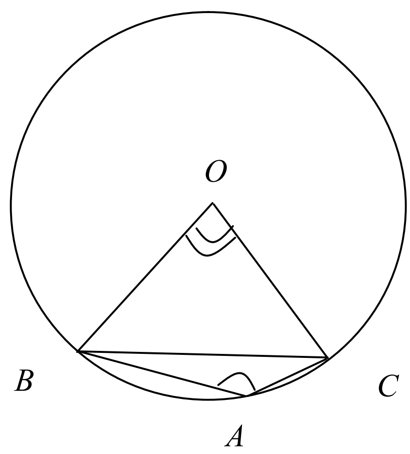


Рис.2

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16,$$

что противоречит условию.

2. Если $\angle BOC = \dfrac{5\pi}{6}$, то $\angle BAC = \dfrac{7\pi}{12}$ (рис.3) или $\angle BAC = \dfrac{5\pi}{12}$ (рис.4)

На рисунке 3

$S_{\Delta ABC} < \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором $S_{\Delta ABC} < 16$ представлен на рис.4.

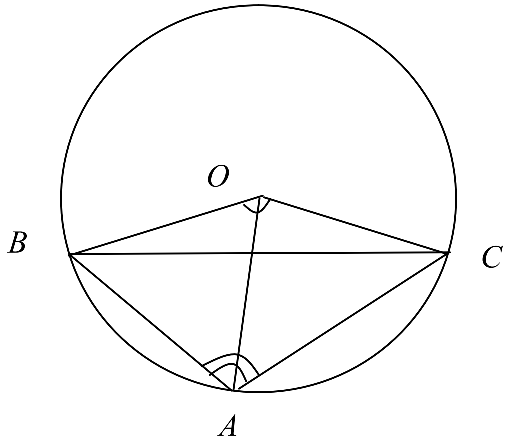


Рис.3

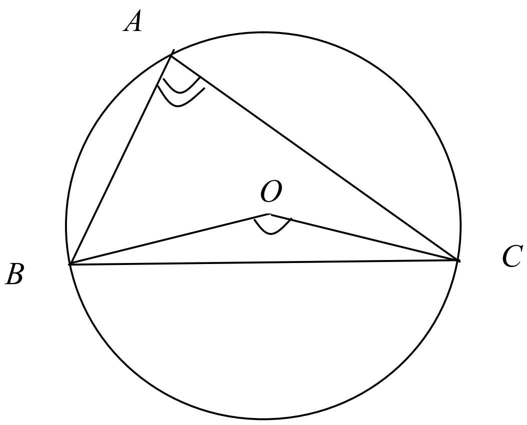


Рис.4

Ответ: $\angle BAC = \dfrac{5\pi}{12}$.

Задача 6. (30 баллов)

Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-4)^2 + 4}$.

Решение.

Введем векторы $\vec{a} = \{1 - x; 1\}$ и $\vec{b} = \{x - 4; 2\}$. В соответствии с неравенством $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \geq \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ найдем длины векторов:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(1 - x)^2 + 1} = \sqrt{(x - 1)^2 + 1}, \ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(x - 4)^2 + 4}.$$

Найдем координаты суммы векторов и ее длину:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 - x + x - 4; 1 + 2\} = \{-3; 3\}, \ \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Подставляем в неравенство и получим: $y = \sqrt{(x - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x - 4)^2 + 4} \geq 3\sqrt{2}$, т.е. $y \geq 3\sqrt{2}$. Наименьшее значение функции будет тогда, когда достигается знак равенства. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т.е. когда

$$\frac{1 - x}{x - 4} = \frac{1}{2}, \ 2(1 - x) = x - 4, \ x = 2.$$

Ответ. Наименьшее значение функции равно $3\sqrt{2}$ достигается при $x = 2$.