Задача 1. (5 баллов) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $10x+y$.

По условию $x+y=12$. Также, по условию $10x+y+36=10y+x$, то есть $x-y+4=0$.

Решив полученную систему $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=-4; \end{cases}$

получим $x=4,\ y=8$.

Ответ. 48.

Задача 2. (10 баллов) Решить уравнение

$$\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}=0.$$

Решение.

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} 2x-3\neq 0, \\ x\neq 0, \\ \frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{3}{2}, \\ \frac{4x^2-12x+9}{x^2}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{3}{2}, \\ \frac{(2x-3)^2}{x^2}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{3}{2}, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Тогда имеем, $\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}=0,$

$$\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{(2x-3)^2}{x^2}}=0,$$

$$\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\left|\frac{2x-3}{x}\right|=0,$$

$$|2x-3|+6=0,$$

$$|2x-3|=-6.$$

Таким образом, $x\in\varnothing$.

Ответ. $x\in\varnothing$.

Задача 3. (15 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+...+\frac{1}{2018\cdot2019}\right).$$

Решение.

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+...+\frac{1}{2018\cdot2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{1920}+\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{2019}\right)=19{,}19\cdot\frac{2019-1919}{1919\cdot2019}=\frac{1919\cdot100}{100\cdot1919\cdot2019}=\frac{1}{2019}.$$

Ответ. $\frac{1}{2019}$.

Задача 4. (20 баллов) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить третье число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение.

По условию:

числа $a,\ aq,\ aq^2$ образуют геометрическую прогрессию;

числа $a,\ aq+2,\ aq^2$ образуют арифметическую прогрессию;

числа $a,\ aq+2,\ aq^2+9$ образуют геометрическую прогрессию.

Используя свойство $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для арифметической прогрессии и свойство $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ для геометрической прогрессии, составим систему уравнений

$$\begin{cases} aq+2=\dfrac{a+aq^2}{2}, \\ (aq+2)^2=a\cdot(aq^2+9); \end{cases} \begin{cases} \dfrac{4}{a}=q^2-2q+1, \\ \dfrac{4}{a}=9-4q; \end{cases} \begin{cases} q^2+2q-8=0, \\ \dfrac{4}{a}=9-4q; \end{cases} \begin{cases} q_1=2, q_2=-4, \\ a_1=4, a_2=0{,}16. \end{cases}$$

Полученная система имеет два решения, и два набора чисел являются решением задачи:

Если $q=-4$, то $a_1=0{,}16; a_2=-0{,}64; a_3=2{,}56$.

Если $q=2$, то $a_1=4, a_2=8, a_3=16$.

Ответ. $a_1=0{,}16; a_2=-0{,}64; a_3=2{,}56$;
$a_1=4, a_2=8, a_3=16$.

Задача 5. (20 баллов) В первую неделю отпуска Алена потратила чуть меньше, чем 0,6 взятых с собой денег; во вторую – 0,25 остатка и еще 3000 руб. В третью неделю она потратила 0,4 нового остатка и еще 1200 руб., после чего осталось $\frac{6}{35}$ от первоначального количества денег. Остатки денег к концу первой, второй и третьей недель образовали арифметическую прогрессию. Определить сколько денег израсходовала Алена в отпуске.

Решение.

Пусть x – общее количество денег, которое планировалось потратить, а y – разница между 0,6 взятых с собой денег и потраченными в первую неделю. Опишем суммы остатков денег к концу каждой недели по условиям задачи:

1 неделя: $0{,}4x + y$;

2 неделя: $0{,}75(0{,}4x + y) - 3000 = 0{,}3x + 0{,}75y - 3000$;

3 неделя: $0{,}6(0{,}3x + 0{,}75y - 3000) - 1200 = 0{,}18x + 0{,}45y - 3000$.

Учитывая, что последний остаток составил $\frac{6}{35}$ от первоначального количества денег, т.е.

$$0{,}18x + 0{,}45y - 3000 = \frac{6}{35}x,$$

а разница между остатками третьей и второй, второй и первой неделями одинакова (по свойству членов арифметической прогрессии), составим уравнение

$$(0{,}18x + 0{,}45y - 3000) - (0{,}3x + 0{,}75y - 3000) = (0{,}3x + 0{,}75y - 3000) - (0{,}4x + y).$$

Объединим уравнения в систему и решим ее.

$$\begin{cases} \frac{1}{350}x + \frac{3}{20}y = 1000, \\ \frac{1}{50}x + \frac{1}{20}y = 3000; \end{cases} \begin{cases} 2x + 105y = 700000, \\ 2x + 5y = 300000; \end{cases} . \begin{cases} x = 140000, \\ y = 3000. \end{cases}$$

Тогда количество израсходованных денег:

$$\left(1 - \frac{6}{35}\right)x = \frac{29}{35} \cdot 140000 = 116000 \text{ (руб.)}$$

Ответ. 116000 руб.

Задача 6. (30 баллов) Внутри прямого угла дана точка М, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку М, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

Решение.

Возможны два случая (рис.1 и рис.2)

Пусть $BC = x,\ AC = y$. Тогда $0{,}5xy = 100$, то есть $xy = 200$.

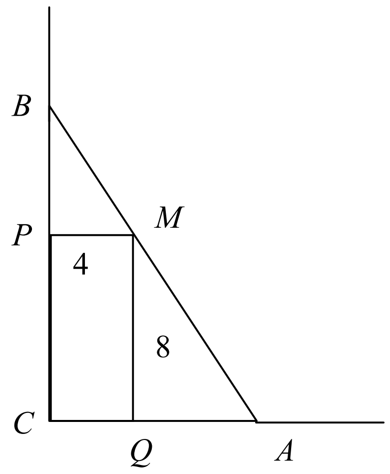


Рис.1.

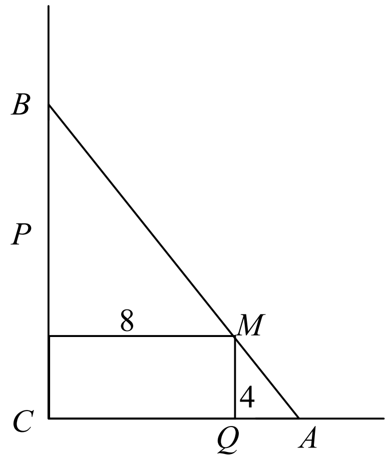


Рис. 2.

Так как $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, то $\dfrac{MP}{AQ} = \dfrac{BP}{MQ}$ или $\dfrac{4}{y-4} = \dfrac{x-8}{8}$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{4}{y-4} = \dfrac{x-8}{8}, \\ xy = 200; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 25y + 100 = 0, \\ x = \dfrac{200}{y}. \end{cases}$$

Решая уравнение $y^2 - 25y + 100 = 0$, получим $y_1 = 5$, $y_2 = 20$.

Тогда, $x_1 = 40$, $x_2 = 10$.

Получаем

1) $x_1 = 40\,см,\ y_1 = 5\,см$;

2) $x_2 = 10\,см,\ y_2 = 20\,см$.

Ответ. $x_1 = 40\,см,\ y_1 = 5\,см$;
$x_2 = 10\,см,\ y_2 = 20\,см$.

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\sqrt[3]{75}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{5})^2+\frac{13}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{42}+\sqrt[3]{36}}-\sqrt[6]{49}-\sqrt[6]{36}-\sqrt[6]{1}.$$

Решение.

$$A=\sqrt[3]{75}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{5})^2+\frac{13}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{42}+\sqrt[3]{36}}-\sqrt[6]{49}-\sqrt[6]{36}-\sqrt[6]{1}=$$

$$+\sqrt[3]{75}-\sqrt[3]{3\cdot 25}+\frac{13}{\sqrt[3]{7}^2-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{6}^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{6}}-\sqrt[6]{7^2}-\sqrt[6]{6^2}-1=$$

$$=\frac{13(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{6})}{7+6}-\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{6}-1=-1.$$

Ответ. -1.

Задача 2. (10 баллов) Доказать, что $A<B$, если

$$A=\frac{\sin 2018^0}{\sin 2019^0},\ B=\frac{\sin 2020^0}{\sin 2021^0}.$$

Решение.

Найдем разность A и B.

$$A-B=\frac{\sin 2018^0}{\sin 2019^0}-\frac{\sin 2020^0}{\sin 2021^0}=\frac{\sin 38^0}{\sin 39^0}-\frac{\sin 40^0}{\sin 41^0}=$$

$$=\frac{\sin 38^0\sin 41^0-\sin 40^0\sin 39^0}{\sin 39^0\sin 41^0}=$$

$$=\frac{\cos 3^0-\cos 79^0-\cos 1^0+\cos 79^0}{2\sin 39^0\sin 41^0}=\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\sin 39^0\sin 41^0}.$$

Так как $\cos 3^0<\cos 1^0$, то $\dfrac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\sin 39^0\sin 41^0}<0$.

Таким образом, $A-B<0$, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}+2+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{5}{2},\\ |x+y|=5.\end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы $\sqrt{\frac{y}{x}+2+\frac{x}{y}}=\frac{5}{2}$.

Так как справа стоит положительная величина, то просто возводим в квадрат обе части: $\frac{y}{x}+2+\frac{x}{y}=\frac{25}{4}$. Делаем замену, $\frac{y}{x}=t\neq 0$.

Тогда $t+2+\frac{1}{t}=\frac{25}{4}$.

Получим квадратное уравнение $4t^2-17t+4=0$.

Корни уравнения: $t_1=4, t_2=\frac{1}{4}$.

Возвращаемся к исходной системе, она равносильна совокупности двух систем:

1) $\begin{cases}\frac{y}{x}=4,\\ |x+y|=5;\end{cases}$ $\begin{cases}y=4x,\\ |5x|=5;\end{cases}$ $x_{1,2}=\pm 1, y_{1,2}=\pm 4$.

Таким образом, получим два решения $(1;4)$ и $(-1;-4)$.

2) $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{1}{4},\\ |x+y|=5;\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{x}{4},\\ \left|\frac{5x}{4}\right|=5;\end{cases}$ $x_{1,2}=\pm 4, y_{1,2}=\pm 1$.

Таким образом, получим еще два решения $(4;1)$ и $(-4;-1)$.

Ответ. $(1;4),(-1;-4),(4;1),(-4;-1)$.

Задача 4. (20 баллов) Две геометрические прогрессии состоят из одинакового числа членов. Первый член первой прогрессии равен 20, а знаменатель 0,75; во второй прогрессии первый член и знаменатель соответственно равны 4 и $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма таких произведений составит 158,75. Найти число членов этих прогрессий.

Решение.

Обозначим первый член и знаменатель первой прогрессии $b_1=20,\ \ q=0{,}75$, а первый член и знаменатель второй прогрессии $b'_1=4,\ \ q'=\frac{2}{3}$.

Найдем сумму произведений членов прогрессий с одинаковыми номерами и учтем, что она составит 158,75:

$b_1 b'_1+b_2 b'_2+\ldots+b_n b'_n=158{,}75$,

$b_1 b'_1+b\ \ qb'_1 q'+\ldots+b_1 q^{n-1} b'_1 q'^{n-1}=158{,}75$,

$$20\cdot 4+20\cdot\frac{3}{4}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}+...+20\cdot 4\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)^{n-1}=158{,}75.$$

Вычислим значение выражения в левой части тождества, рассматривая его как сумму геометрической прогрессии с первым членом $b''_1=80$ и знаменателем $q''=\frac{1}{2}$

$$\frac{80\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=160\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=158{,}75,\quad n=7.$$

Ответ. 7.

Задача 5. (20 баллов) Расстояние между точками A и B равно 270 м. Из точки A в точку B, а затем сразу обратно двигается тело с равномерной скоростью. Второе тело выходит из точки B на 11с позже первого с меньшей скоростью. Оно встречается с первым телом два раза: через 10с и 40с после своего выхода из точки B. Определить с какой скоростью двигается первое тело.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой правильный и обоснованный ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения тел в системе координат «путь-время» (рис.1).

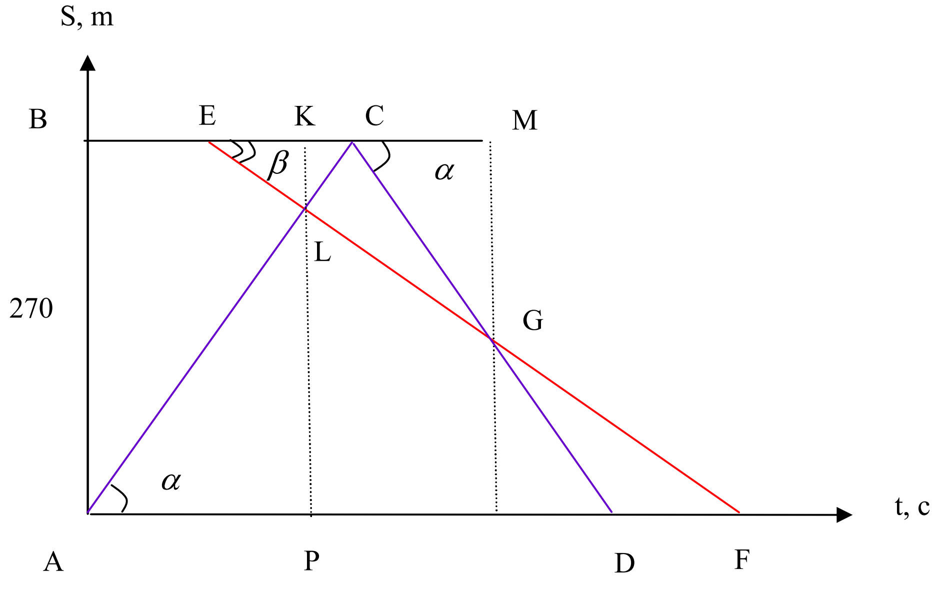


Рис.1.

Пусть AC и CD – графики движения первого тела из A в B и обратно со скоростью $V_1=tg\alpha$;

EF – график движения второго тела из B в A со скоростью $V_2 = tg\beta$.
По условию задачи, промежутки времени BE=11с, EK =10с, KM =30с, тогда AP=11+10=21с.
Путь определим:
из ΔALP: $PL = AP \cdot tg\alpha = 21 \cdot V_1$;
из ΔEKL: $KL = EK \cdot tg\beta = 10 \cdot V_2 MG$;
$PK = PL + LK = 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270$;
из ΔBMG: $MG = (EK + KM) \cdot tg\beta = 40 \cdot V_2$.
Промежутки времени определим:
из ΔLKC: $KC = \dfrac{LK}{tg\alpha} = \dfrac{10V_2}{V_1}$;
из ΔCMG: $CM = \dfrac{MG}{tg\alpha} = \dfrac{40V_2}{V_1}$;
$KM = KC + CM = \dfrac{10 \cdot V_2}{V_1} + \dfrac{40 \cdot V_2}{V_1} = 30$.
Объединим полученные уравнения в систему

$$\begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270, \\ \dfrac{50 \cdot V_2}{V_1} = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot 0{,}6 \cdot V_1 = 270, \\ V_2 = 0{,}6 \cdot V_1; \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = 10, \\ V_2 = 6. \end{cases}$$

Так как скорость первого тела больше, то оно имеет скорость $V = 10$ м/с.

Ответ. 10 м/с.

Задача 6. (30 баллов)

Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x) \cdot \cos 3x - \cos 6x - 7}.$$

Решение.
Преобразуем формулу функции.

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x) \cdot \cos 3x - \cos 6x - 7} =$$

$$= \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{4(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{2} \cos x) \cdot \cos 3x - (2\cos^2 3x - 1) - 7} =$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{4\sin(x-\frac{\pi}{6})\cdot\cos 3x-2\cos^2 3x-6}.$$

Обозначим $\sin(x-\frac{\pi}{6})=a,\quad b=\cos 3x,\quad |a|\le 1,\ |b|\le 1$, тогда имеем

$$f(a,b)=\frac{a}{4ab-2b^2-6}=\frac{a}{-2(b^2-2ab+a^2)-6+2a^2}=-\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}.$$

$$|f(a,b)|=\left|\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}\right|\le\left|\frac{a}{6-2a^2}\right|\le\frac{1}{6-2\cdot 1}=\frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{4}\le f(a,b)\le\frac{1}{4}.$$

$f(a,b)=-\frac{1}{4}$ при $(b-a)^2=0$ и $a=1$, отсюда

$$\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{6})=1,\\ \cos 3x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 3x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z;\end{cases}$$

$$x=\frac{2\pi}{3},\ f_{\min}=f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{4}.$$

Ответ. $-\frac{1}{4}$.

Математика. 11 класс

Вариант 21

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}\right).$$

Решение.

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{1920}+\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{2019}\right)=19{,}19\cdot\frac{2019-1919}{1919\cdot2019}=\frac{1919\cdot100}{100\cdot1919\cdot2019}=\frac{1}{2019}.$$

Ответ. $\frac{1}{2019}$.

Задача 2. (10 баллов)

Дана функция $f(x)=\frac{2020+2x}{2019+x}$. Найти $f(1)+2020f'(1)$.

Решение.

$$f'(x)=\left(\frac{2020+2x}{2019+x}\right)'=\frac{(2020+2x)'(2019+x)-(2020+2x)(2019+x)'}{(2019+x)^2}=$$

$$=\frac{2(2019+x)-(2020+2x)}{(2019+x)^2}=\frac{4038-2020}{(2019+x)^2}=\frac{2018}{(2019+x)^2};$$

$$f(1)=\frac{2020+2}{2019+1}=\frac{2022}{2020};$$

$$f'(1)=\frac{2018}{(2019+1)^2}=\frac{2018}{2020^2};$$

$$f(1)+2020f'(1)=\frac{2022}{2020}+\frac{2018}{2020}=\frac{1011+1009}{1010}=2.$$

Ответ. 2.

Задача 3. (15 баллов) Найти количество корней уравнения

$$3^{\frac{3\sin x-2}{2\sin x-1}}-2=3^{\frac{1-\sin x}{2\sin x-1}},$$ принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},13\pi\right]$.

Решение.

ОДЗ: $2\sin x - 1 \neq 0$, $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$.

Выполним преобразования:

$$3^{\frac{3\sin x - 2}{2\sin x - 1}} = 3^{\frac{(2\sin x - 1) + \sin x - 1}{2\sin x - 1}} = 3^{1 - \frac{1 - \sin x}{2\sin x - 1}} = 3 \cdot 3^{-\frac{1 - \sin x}{2\sin x - 1}}.$$

Пусть $t = 3^{\frac{1-\sin x}{2\sin x - 1}}$, $t > 0$.

Тогда уравнение примет вид $3t^{-1} - 2 = t$, $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3, t_2 = 1$.

Корень $t_1 = -3$ не подходит, так как $t > 0$.

Тогда, $1 = 3^{\frac{1-\sin x}{2\sin x - 1}}$, $\frac{1 - \sin x}{2\sin x - 1} = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Переведем радианы в градусы:

$-\frac{\pi}{2} = -90°$, $13\pi = 13 \cdot 180 = 2340°$

Тогда, промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}, 13\pi\right]$, учитывая ОДЗ, принадлежат корни:

$90°, 450°, 810°, 1170°, 1530°, 1850°, 2250°$, т.е. промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}, 13\pi\right]$ принадлежит 7 корней.

Ответ. 7.

Задача 4. (20 баллов) Газопровод разбит на несколько участков. На каждом участке работает одинаковое число работников. Известно, что число работников находящихся на одном участке, превышает число участков на 14. Когда 15 человек пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, число работников на первом участке стало равным числу работников, оставшихся на всех остальных участках. Определить число участков газопровода.

Решение.

Обозначим за n число участков, а за k – число работников, работающих первоначально на каждом участке. Исходя из условий задачи, получим систему:

$$\begin{cases} k - n = 14, \\ k + 15 = (n-1)(k-15), \\ k > 15, n, k \in N; \end{cases} \quad \begin{cases} n = k - 14, \\ k + 15 = (k - 14 - 1)(k - 15), \\ k > 15, n, k \in N. \end{cases}$$

Решим эту второе уравнение системы.

$k + 15 = (k-15)^2$,

$k + 15 = k^2 - 31k + 225$,

$k^2 - 31k + 210 = 0$,

$k_1 = 10$, $k_2 = 21$.

Так как по условию $k > 15$, то $k = 21$ и $n = 7$. Таким образом, газопровод разбит на 7 участков.

Ответ. 7.

Задача 5. (20 баллов) Расстояние между точками A и B равно 270 м. Из точки A в точку B, а затем сразу обратно двигается тело с равномерной скоростью. Второе тело выходит из точки B на 11с позже первого с меньшей скоростью. Оно встречается с первым телом два раза: через 10с и 40с после своего выхода из точки B. Определить с какой скоростью двигается первое тело.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой правильный и обоснованный ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения тел в системе координат «путь-время» (рис.1).

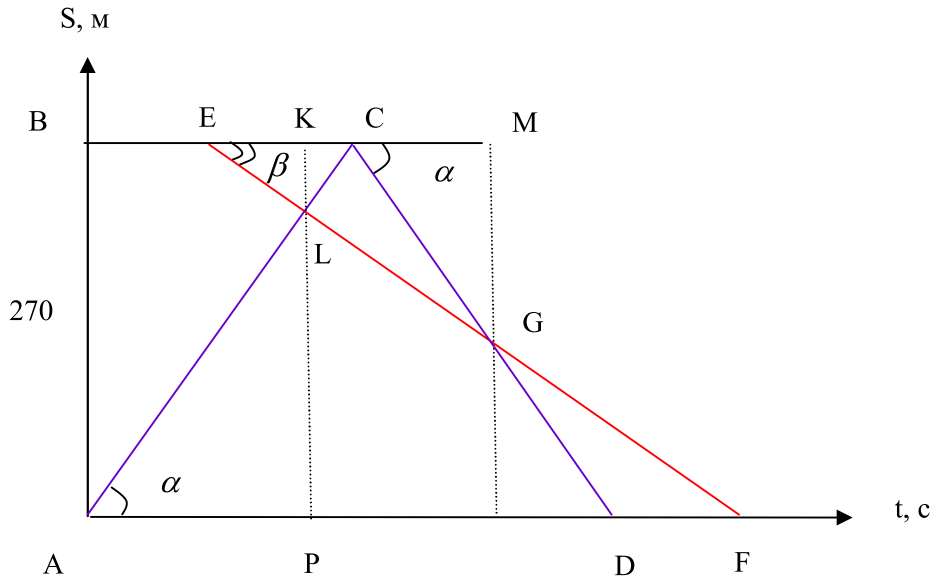


Рис.1.

Пусть AC и CD – графики движения первого тела из A в B и обратно со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

EF – график движения второго тела из B в A со скоростью $V_2 = tg\beta$.

По условию задачи, промежутки времени BE=11с, EK =10с, KM =30с, тогда AP=11+10=21с.

Путь определим:

из ΔALP: $PL = AP \cdot tg\alpha = 21 \cdot V_1$;

из ΔEKL: $KL = EK \cdot tg\beta = 10 \cdot V_2 MG$;

$PK = PL + LK = 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270$;

из ΔBMG: $MG = (EK + KM) \cdot tg\beta = 40 \cdot V_2$.

Промежутки времени определим:

из ΔLKC: $KC = \dfrac{LK}{tg\alpha} = \dfrac{10V_2}{V_1}$;

из ΔCMG: $CM = \dfrac{MG}{tg\alpha} = \dfrac{40V_2}{V_1}$;

$KM = KC + CM = \dfrac{10 \cdot V_2}{V_1} + \dfrac{40 \cdot V_2}{V_1} = 30$.

Объединим полученные уравнения в систему

$\begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270, \\ \dfrac{50 \cdot V_2}{V_1} = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot 0{,}6 \cdot V_1 = 270, \\ V_2 = 0{,}6 \cdot V_1; \end{cases}$ $\begin{cases} V_1 = 10, \\ V_2 = 6. \end{cases}$

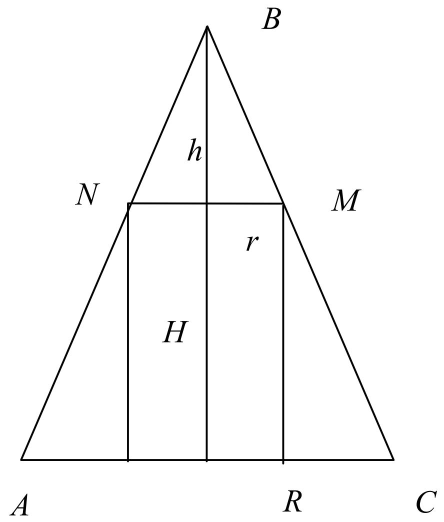
Так как скорость первого тела больше, то оно имеет скорость $V = 10$ м/с.

Ответ. 10 м/с.

Задача 6. (30 баллов) Найти радиус цилиндра с наибольшей полной поверхностью, вписанного в круговой конус высотой 20 см и радиусом основания 10 см.

Решение.

Площадь полной поверхности цилиндра выражается формулой $S = 2\pi r(r + h)$.



Изобразим осевое сечение цилиндра, вписанного в конус.

Обозначим высоту цилиндра h, а радиус основания цилиндра r.

Из подобия треугольников ABC и NBM по двум углам получим

$\dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{H - h}$, $h = H - \dfrac{rH}{R}$,

$S(r) = 2\pi r\left(H - \dfrac{rH}{R} + r\right) = 2\pi r\left(H + r\left(1 - \dfrac{H}{R}\right)\right)$

Необходимо подобрать такое значение r, чтобы S была максимальной. Продифференцируем это выражение

$S'(r) = 2\pi\left(H + 2r\left(1 - \dfrac{H}{R}\right)\right)$,

$H + 2r\left(1 - \dfrac{H}{R}\right) = 0 \Rightarrow r = \dfrac{HR}{2(H - R)} = \dfrac{20 \cdot 10}{2 \cdot (20 - 10)} = 10$.

Убедимся, что найден максимум функции проверкой знака производной

$r < 10$, $S'(r) > 0$, $S(r)$ возрастает;

$r > 10$, $S'(r) < 0$, $S(r)$ убывает, значит $S_{\max}(10) = 200\pi$.

Ответ. 200π.