Математика. 9 класс

Вариант 41

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения X при $a=-\frac{1}{2020}$, если

$$X=\left(\frac{1}{2-6a}+\frac{1}{27a^3-1}:\frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}.$$

Решение.

Упростим выражение X.

$$X=\left(\frac{1}{2-6a}+\frac{1}{27a^3-1}:\frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(1-3a)}+\frac{1}{(3a-1)(1+3a+9a^2)}\cdot\frac{1+3a+9a^2}{1+3a}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(1-3a)}-\frac{1}{(1-3a)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=\left(\frac{1+3a-2}{2(1-3a)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=$$

$$=\left(\frac{3a-1}{-2(3a-1)(1+3a)}\right)\cdot\frac{2(1+3a)}{a}=-\frac{1}{a}.$$

Если $a=-\frac{1}{2020}$, то $X=2020$.

Ответ. 2020.

Задача 2. (10 баллов) Решить уравнение

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3},\quad \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=2+\sqrt{3}-4,$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=\sqrt{3}-2,\quad \frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=\frac{1}{\sqrt{3}-2},\quad \frac{1}{\frac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=-2-\sqrt{3}.$$

Тогда, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}=2-\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=2+\sqrt{3}$,

$\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$, $2x-\sqrt{3}=-2-\sqrt{3}$, $2x=-2$, $x=-1$.

Ответ. $x=-1$.

Задача 3. (15 баллов) Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b в n раз меньше их среднего арифметического. Доказать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$$

Решение. Очевидно, что $a > b$. По условию задачи имеем:

$\dfrac{a+b}{2}=n\cdot\sqrt{ab}$, $\dfrac{a}{b}+1=2n\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. Примем $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=t>1$. Тогда $t^2-2nt+1=0$, $t_{1,2}=n\pm\sqrt{n^2-1}$.

При условии $t>1$, $t=n+\sqrt{n^2-1}$.

$$\frac{a}{b}=t^2=\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{1}=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{n^2-\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2}=\frac{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}=\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 4. (20 баллов)

В доме 320 квартир. Однокомнатные квартиры составляют более 12%, но менее 13% от общего числа квартир. 60% от оставшихся были двухкомнатные квартиры, остальные – трехкомнатные. Определить какое количество процентов от общего числа квартир этого дома составили трехкомнатные квартиры.

Решение.

Пусть x – суммарное количество двухкомнатных и трехкомнатных квартир, тогда количество однокомнатных квартир $(320-x)$.

По условию задачи: количество двухкомнатных квартир – $0{,}6x$, количество трехкомнатных квартир – $0{,}4x$, количество однокомнатных квартир заключено в интервале от $0{,}12\cdot 320$ до $0{,}13\cdot 320$, т.е.

$$0{,}12\cdot 320<320-x<0{,}13\cdot 320,$$

$$38{,}4<320-x<41{,}6,$$

$$278{,}4<x<281{,}6.$$

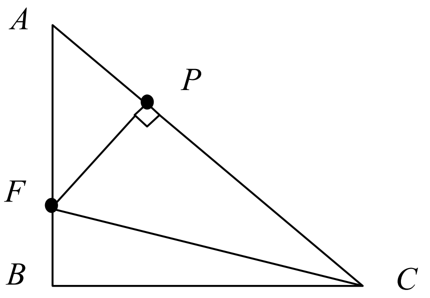
Число $0{,}6x$ – число двухкомнатных квартир – целое. Следовательно, оно должно делиться на 5. Но в интервале $278{,}4<x<281{,}6$ одно целое число, которое делится на 5 – это 280 т.е. $x = 280$. Тогда количество трехкомнатных квартир $0{,}4 \cdot 280 = 112$, что составляет 35% от общего числа квартир.

Ответ. 35%

Задача 5. (20 баллов)

Точка P лежит на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка F принадлежит катету AB, причем угол FPC прямой. Площадь треугольника FPC составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника ABC. Определить, в какой пропорции точка P делит сторону AC.

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC = 45^0$.

Тогда ΔAPF тоже равнобедренный и $AP = PF = x$.

Обозначим $PC = y$, $AB = a$. По теореме Пифагора из ΔABC:

$(x+y)^2 = 2a^2$, $x + y = \sqrt{2}a$.

По условию $S_{\Delta FPC} = \frac{3}{8} S_{\Delta ABC}$, $\frac{1}{2}xy = \frac{3}{8}\frac{a^2}{2}$, $y = \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{x}$.

Тогда, $x + \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{x} = \sqrt{2}a$, $8x^2 - 8\sqrt{2}ax + 3a^2 = 0$, $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и $x_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Корень $x_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ не подходит, т.к. $F \in AB$ и $x < AB$.

Таким образом, $\frac{AP}{PC} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}a - \frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

Ответ. 1:3.

Задача 6. (30 баллов)

Наудачу выбирают число a из промежутка $[-6; 6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня.

Решение.

Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2 - 4(a^2-9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 2(a+1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 40 > 0, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a + 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -5, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a > -1; \end{cases} \quad a \in [3;+\infty).$$

Так как по условию число a выбирают из промежутка $[-6;6]$, то $a \in [3;6]$.
Вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня, равна отношению длины промежутка $[3;6]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Математика. 10 класс

Вариант 41

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения A при $x=998,\underbrace{222...23}_{2019}$,

$y=1021,\underbrace{777...77}_{2020}$, если

$$A=\frac{y^2+xy-\sqrt[4]{x^5y^3}-\sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{x^2y^3}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Решение.

Выполним преобразования выражения A.

$$\frac{y^2+xy-x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{3}{4}}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=\frac{y(y+x)-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}(y+x)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{2}{4}}-x^{\frac{2}{4}}\right)}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=$$

$$=\frac{(y+x)\left(y-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{(y+x)y^{\frac{3}{4}}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}=x+y.$$

При $x=998,\underbrace{222...23}_{2019}$, $y=1021,\underbrace{777...77}_{2020}$, получим:

$x+y=998,\underbrace{222...23}_{2019}+1021,\underbrace{777...77}_{2020}=2020$.

Ответ. 2020.

Задача 2.(10 баллов)

Доказать, что $A<B$, если

$$A=\frac{\cos 2018^0}{\cos 2019^0},\ B=\frac{\cos 2020^0}{\cos 2021^0}.$$

Решение.

Найдем разность A и B.

$$A-B=\frac{\cos 2018^0}{\cos 2019^0}-\frac{\cos 2020^0}{\cos 2021^0}=\frac{\cos 38^0}{\cos 39^0}-\frac{\cos 40^0}{\cos 41^0}=$$
$$=\frac{\cos 38^0\cos 41^0-\cos 40^0\cos 39^0}{\cos 39^0\cos 41^0}=$$
$$=\frac{\cos 3^0+\cos 79^0-\cos 1^0-\cos 79^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}=\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}.$$

Так как $\cos 3^0<\cos 1^0$, то $\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}<0$.

Таким образом, $A-B<0$, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3.(15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2+5x-9y+4=0,\\ x^2-y^2-5=0.\end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$x^2-3xy+2y^2+5x-9y+4=0,$$
$$x^2-x(3y-5)+2y^2-9y+4=0,$$
$$D=(3y-5)^2-8y^2+36y-16=y^2+6y+9=(y+3)^2,$$
$$x_1=2y-1, x_2=y-4.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}(x-2y+1)(x-y+4)=0,\\ x^2-y^2-5=0=0.\end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y-1,\\ (2y-1)^2-y^2-5=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y-4,\\ (y-4)^2-y^2-5=0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y-1,\\ 3y^2-4y-4=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y-4,\\ -8y+11=0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=3, y_1=2,\\ x_2=-\frac{7}{3}, y_2=-\frac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=-\frac{21}{8},\\ y_3=\frac{11}{8}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. (3;2), $(-\frac{7}{3};-\frac{2}{3})$, $(\frac{21}{8};\frac{11}{8})$.

Задача 4.(20 баллов)

Доказать, что $A<B$, если $A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}$, $B=2019^{2\cdot 2019}$.

Решение.

Преобразуем выражение $A = 2018^{2020} \cdot 2020^{2018}$.

$A = 2018^{2020} \cdot 2020^{2018} = 2018^2 \cdot 2018^{2018} \cdot 2020^{2018} =$

$= 2018^2 \cdot (2019-1)^{2018}(2019+1)^{2018} = 2018^2 \cdot (2019^2 - 1)^{2018}$.

Тогда, $2018^2 \cdot (2019^2 - 1)^{2018} < 2019^2 \cdot 2019^{2\cdot 2018}$, где

$2019^2 \cdot 2019^{2\cdot 2018} = 2019^{2+2\cdot 2018} = 2019^{2\cdot 2019} = B$.

Следовательно, $A < B$.

Что требовалось доказать.

Задача 5.(20 баллов) Числа, равные произведениям первого члена арифметической прогрессии на второй, второго на третий и третьего на первый в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Решение.

Обозначим члены арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ее разность d; члены геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, ее знаменатель q. Запишем условия задачи, используя введенные обозначения

$b_1 = a_1 \cdot a_2 = a_1(a_1 + d)$,

$b_2 = a_2 \cdot a_3 = (a_1 + d)(a_1 + 2d)$,

$b_3 = a_1 \cdot a_3 = a_1(a_1 + 2d)$.

Тогда,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{(a_1 + d)(a_1 + 2d)}{a_1(a_1 + d)} = \frac{a_1 + 2d}{a_1} = 1 + \frac{2d}{a_1},$$

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_1(a_1 + 2d)}{(a_1 + d)(a_1 + 2d)} = \frac{a_1}{a_1 + d} = 1 - \frac{d}{a_1 + d}.$$

Сравним полученные тождества:

$$1 + \frac{2d}{a_1} = 1 - \frac{d}{a_1 + d},\ \frac{2}{a_1} = -\frac{1}{a_1 + d},\ a_1 = -\frac{2}{3}d.$$

Найдем q:

$$q = 1 + \frac{2d}{a_1} = 1 + \frac{2d}{-\frac{2}{3}d} = -2.$$

Ответ: -2.

Задача 6.(30 баллов)

Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 4см с центром в точке O в точках A, B и С. Площадь треугольника ABC больше 16см^2, площадь треугольника OBC равна 4см^2. Найти угол BAC.

Решение.

Так как радиусы *OA*, *OB* и *OC* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка -*OA*, *OB* и *OC*- лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью.

По условию задачи $S_{\Delta OBC} = 4$, т.е.

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC = 4 \Rightarrow \sin \angle BOC = \frac{1}{2}.$$

Возможные значения $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$ или $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$. Рассмотрим возможные варианты.

1. Если $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$, то $\angle BAC = \frac{\pi}{12}$(рис.1) или $\angle BAC = \frac{11\pi}{12}$(рис.2)

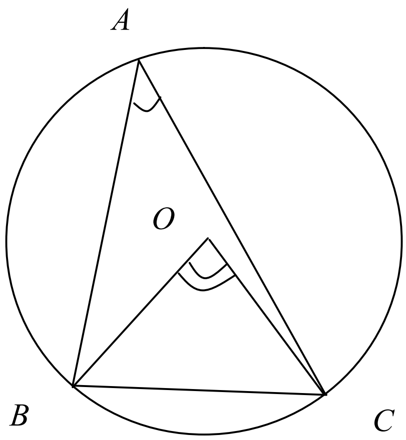


Рис.1

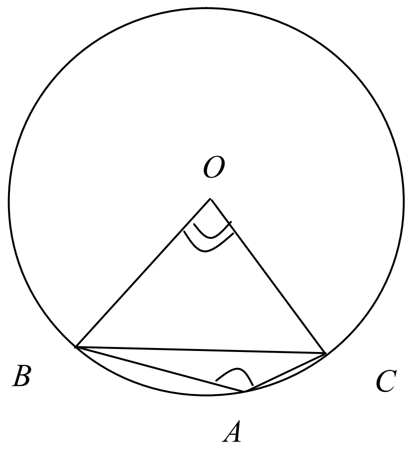


Рис.2

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16,$$

что противоречит условию.

2. Если $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$, то $\angle BAC = \frac{7\pi}{12}$(рис.3) или $\angle BAC = \frac{5\pi}{12}$(рис.4)

На рисунке 3

$S_{\Delta ABC} < \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором $S_{\Delta ABC} < 16$ представлен на рис.4.

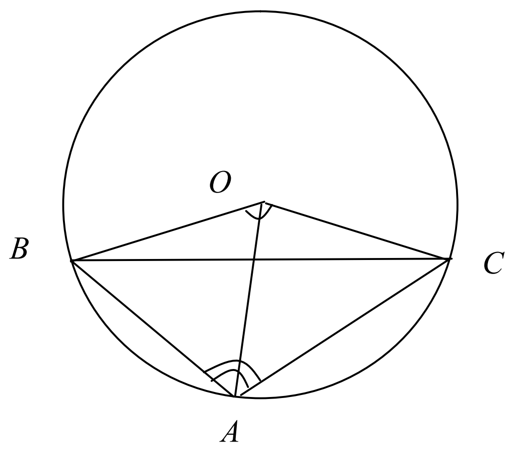


Рис.3

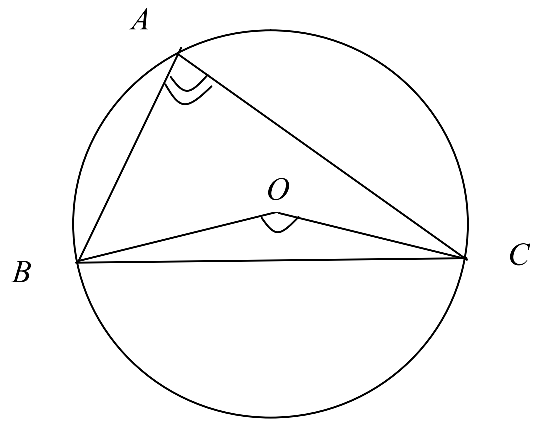


Рис.4

Ответ. $\angle BAC = \dfrac{5\pi}{12}$.

Математика. 11 класс

Вариант 41

Задача 1. (5 баллов)
Найти значение выражения A, если
$$A=\left(\frac{1}{1919\cdot 1920}+\frac{1}{1920\cdot 1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)\cdot 19{,}20.$$

Решение.
Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то
$$A=\left(\frac{1}{1920\cdot 1921}+.\frac{1}{1921\cdot 1922}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)\cdot 19{,}20=$$
$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}+\frac{1}{1921}-\frac{1}{1922}\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=$$
$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=\frac{2020-1920}{1920\cdot 2020}\cdot 19{,}20=\frac{100\cdot 1920}{1920\cdot 2020\cdot 100}=\frac{1}{2020}.$$

Ответ. $\frac{1}{2020}$.

Задача 2. (10 баллов)
В первый год разработки месторождения было добыто 600 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 250тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.
Решение.
Пусть n – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто
$$600+\frac{3}{2}\cdot 600+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 600+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 600+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 600 \text{ тыс. т нефти.}$$
И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение:
$$600\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=35250,\ \ 600\cdot\left(12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2\right)=35250,\ \left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{81}{16},\ n=4.$$
Тогда общее количество лет будет равно 14.

Ответ. 14

Задача 3. (15 баллов)
Наудачу выбирают число a из $[-6;6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня.

Решение.
Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases}4(a+1)^2-4(a^2-9)>0,\\ a^2-9>0,\\ 2(a+1)>0;\end{cases}\quad \begin{cases}8a+40>0,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a+1>0;\end{cases}\quad \begin{cases}a>-5,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a>-1;\end{cases}\ a\in[3;+\infty).$$

Так как по условию число a выбирают из промежутка $[-6;6]$, то $a\in[3;6]$.
Вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два положительных корня, равна отношению длины промежутка $[3;6]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Задача 4. (20 баллов) Найти все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^x=3^y+4^y,\\ \sqrt{-x^2-3xy-y^2}=2y+\dfrac{x}{2}.\end{cases}$$

Решение.
ОДЗ: $y\ge-\frac{x}{4}$.

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^x=3^y+4^y,\\ \sqrt{-x^2-3xy-y^2}=2y+\dfrac{x}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}(2-\sqrt{3})^x=3^y+4^y,\\ -x^2-3xy-y^2=4y^2+2xy+\dfrac{x^2}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^x=3^y+4^y,\\ \left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}(2-\sqrt{3})^x=3^y+4^y,\\ y=-\dfrac{x}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}(2+\sqrt{3})^{-x}=(\sqrt{3})^{-x}+2^{-x},\\ y=-\dfrac{x}{2}.\end{cases}$$

Поделив левую и правую части первого уравнения системы на $(2+\sqrt{3})^{-x}\ne0$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}=1.$$

Выражение слева есть сумма двух монотонно убывающих функций, значит данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень легко угадывается: $x=-1$. Тогда $y=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Задача 5. (20 баллов)
Газопровод разбит на несколько участков. На каждом участке работает одинаковое число работников. Известно, что число работников находящихся на одном участке, превышает число участков на 12. Когда 15 человек пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, число работников на первом участке стало равным числу работников, оставшихся на всех остальных участках. Определить число участков газопровода.

Решение.
Обозначим за n число участков, а за k – число работников, работающих первоначально на каждом участке. Исходя из условий задачи, получим систему:

$$\begin{cases} k-n=12, \\ k+15=(n-1)(k-15), \\ k>15, n,k\in N; \end{cases} \quad \begin{cases} n=k-12, \\ k+15=(k-12-1)(k-15), \\ k>15, n,k\in N. \end{cases}$$

Решим эту второе уравнение системы.

$k+15=(k-13)(k-15)$,

$k+15=k^2-28k+195$,

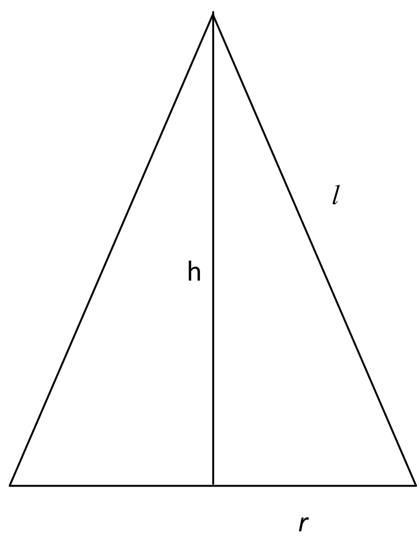
$k^2-29k+180=0$,

$k_1=9$, $k_2=20$.

Так как по условию $k>15$, то $k=20$ и $n=8$. Таким образом, газопровод разбит на 8 участков.

Ответ. 8.

Задача 6. (30 баллов) Найти радиус кругового конуса наибольшего объема, если площадь его боковой поверхности равна $S=\pi\sqrt{3}$ см^2.



Решение.
Изобразим осевое сечение конуса. Обозначим его высоту h, образующую l, а радиус основания r.
Теорема Пифагора связывает между собой эти три величины: $l^2=h^2+r^2$.
Площадь боковой поверхности конуса известна: $S=\pi rl=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$.
Отсюда

$$h=\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2\cdot r^2}-r^2}.$$

Объем конуса выражается формулой:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} r\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}\,.$$

Необходимо подобрать такое значение r, объем $V\,(r)$ был наибольший. Продифференцируем это выражение

$$V'(r) = \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4} + \frac{r(-4\pi^2 r^3)}{2\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}}\right) = \frac{S^2 - 3\pi^2 r^4}{3\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}}\,.$$

$V'(r) = 0$, т.е. $S^2 - 3\pi^2 r^4 = 0,\ \ r = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\pi}} = 1$.

Убедимся, что найден максимум функции проверкой знака производной.
Если $r < 1$, то $V\,'(r) > 0$, $V(r)$ возрастает;

Если $r > 1$, то $V\,'(r) < 0$, $V(r)$ убывает, значит $V_{\max}(1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$**.**