Математика. 9 класс

Вариант 32

Задача 1. (5 баллов)

Доказать, что A делится на 31, если $A = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2019}$.

Решение.

Выполним преобразования A:

$$A = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2019} = 5(1 + 5 + 5^2) + 5^4(1 + 5 + 5^2) + ... + 5^{2017}(1 + 5 + 5^2) =$$

$$= (1 + 5 + 5^2)(5 + 5^4 + ... + 5^{2017}) = 31(5 + 5^4 + ... + 5^{2017}).$$

Так как один из множителей делится на 31, то A делится на 31.

Что требовалось доказать.

Задача 2. (10 баллов) Решить уравнение

$$4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Решение.

$$4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}}} = 2 - \sqrt{3}, \quad \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}}} = -\left(2 - \sqrt{3} - 4\right),$$

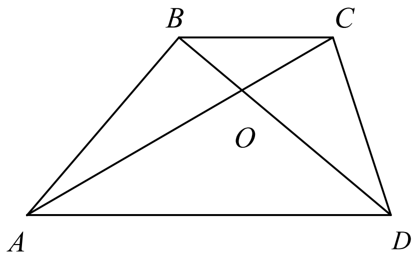
$$\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}}} = 2 + \sqrt{3}, \quad 4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}, \quad 4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2x - \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Тогда, $4 - \dfrac{1}{2x - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, $2x - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$, $2x = 2$, $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

Задача 3. (15 баллов) Диагонали AC и BD трапеции $ACBD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 25 см^2 и 16 см^2. Найти площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\Delta AOD} \neq S_{\Delta BOC}$, поэтому AD и BD не боковые стороны, а основания трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{5}{4} = \frac{AO}{OC}$.

Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{4}$. Значит, $S_{\Delta ABO} = \frac{5}{4} S_{\Delta CBO} = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20.$

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно,

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Поэтому и $S_{\Delta COD} = 20$, $S_{ABCD} = 25 + 16 + 20 + 20 = 81$. $S_{ABCD} = 81\text{см}^2$.

Ответ. 81 см^2.

Задача 4. (20 баллов) В доме 720 квартир. Однокомнатные квартиры составляют более 12%, но менее 13% от общего числа квартир. 60% от оставшихся были двухкомнатные квартиры, остальные – трехкомнатные. Определить какое количество процентов от общего числа квартир этого дома составили двухкомнатные квартиры.

Решение.

Пусть x – суммарное количество двухкомнатных и трехкомнатных квартир, тогда количество однокомнатных квартир $(720 - x)$.

По условию задачи: количество двухкомнатных квартир – $0{,}6x$, количество трехкомнатных квартир – $0{,}4x$, количество однокомнатных квартир заключено в интервале от $0{,}12 \cdot 720$ до $0{,}13 \cdot 720$, т.е.

$$0{,}12 \cdot 720 < 720 - x < 0{,}13 \cdot 720,$$

$$86{,}4 < 720 - x < 93{,}6,$$

$$626{,}4 < x < 633{,}6.$$

Число $0{,}6x$ – число двухкомнатных квартир – целое. Следовательно, оно должно делиться на 5. Но в интервале $626{,}4 < x < 633{,}6$ одно целое число, которое делится на 5 – это 630 т.е. $x = 630$. Тогда количество двухкомнатных квартир $0{,}6 \cdot 630 = 378$, что составляет 52,5% от общего числа квартир.

Ответ. 52,5%.

Задание 5. (20 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 13(x - y) = 0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0,$$

$$D = 64y^2 - 48y^2 = 16y^2,$$

$$x_1 = 2y, x_2 = \frac{2y}{3}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (x - 2y)(3x - 2y) = 0, \\ x^2 + y^2 + 13(x - y) = 0. \end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + y^2 + 13y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2y}{3}, \\ \dfrac{4y^2}{9} + y^2 - \dfrac{13}{3}y = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ 5y^2 + 13y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2y}{3}, \\ y^2 - 3y = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = -\dfrac{26}{5}, y_1 = -\dfrac{13}{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 0, y_3 = 0, \\ x_4 = 2, y_4 = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. (0;0), $(-\frac{26}{5};-\frac{13}{5})$, (2,3).

Задача 6. (30 баллов) Наудачу выбирают число a из $[-6;6]$. Определите вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два отрицательных корня.

Решение.

Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два отрицательных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases}4(a+1)^2-4(a^2-9)>0,\\ a^2-9>0,\\ 2(a+1)<0;\end{cases}\quad \begin{cases}8a+40>0,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a+1<0;\end{cases}\quad \begin{cases}a>-5,\\ (a-3)(a+3)>0,\\ a<-1;\end{cases}\quad a\in[-5;-3].$$

Вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два отрицательных корня, равна отношению длины промежутка $[-5;-3]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Задача 1. (5 баллов) Решить уравнение

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}.$$

Решение.

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3},\quad \cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=-\left(2-\sqrt{3}-4\right),$$

$$\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2+\sqrt{3},\; 4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}},\; 4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$$

Тогда, $4-\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},\; 2x-\sqrt{3}=2-\sqrt{3},\; 2x=2,\, x=1$.

Ответ. $x=1$.

Задача 2.(10баллов)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2-8xy+4y^2=0,\\ x^2+y^2+13(x-y)=0.\end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$3x^2-8xy+4y^2=0,$$
$$D=64y^2-48y^2=16y^2,$$
$$x_1=2y, x_2=\frac{2y}{3}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}(x-2y)(3x-2y)=0,\\ x^2+y^2+13(x-y)=0.\end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\ 4y^2+y^2+13y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2y}{3},\\ \dfrac{4y^2}{9}+y^2-\dfrac{13}{3}y=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\ 5y^2+13y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2y}{3},\\ y^2-3y=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0, y_1=0,\\ x_2=-\dfrac{26}{5}, y_1=-\dfrac{13}{5};\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=0, y_3=0,\\ x_4=2, y_4=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. $(0;0)$, $(-\frac{26}{5};-\frac{13}{5})$, $(2,3)$.

Задача 3. (15 баллов)

Доказать, что $A<B$, если $A=2017^{2019}\cdot 2019^{2017}$, $B=2018^{2\cdot 2018}$.

Решение.

Преобразуем выражение $A=2017^{2019}\cdot 2019^{2017}$.

$$A=2017^{2019}\cdot 2019^{2017}=2017^2\cdot 2017^{2017}\cdot 2019^{2017}=$$

$$=2017^2\cdot(2018-1)^{2017}(2018+1)^{2017}=2017^2\cdot(2018^2-1)^{2017}.$$

Тогда, $2017^2\cdot(2018^2-1)^{2017}<2018^2\cdot 2018^{2\cdot 2017}$, где

$$2018^2\cdot 2018^{2\cdot 2017}=2018^{2+2\cdot 2017}=2018^{2\cdot 2018}=B.$$

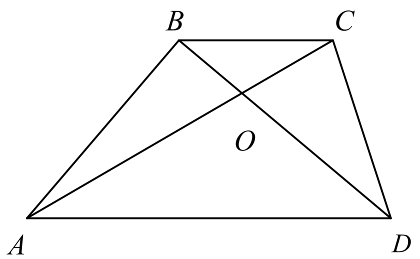
Следовательно, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 4.(20баллов)

Диагонали AC и BD трапеции $ACBD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 25 см^2 и 16 см^2. Найти площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\Delta AOD}\neq S_{\Delta BOC}$, поэтому AD и BD не боковые стороны, а основания трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k=\frac{5}{4}=\frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}}=\frac{AO}{OC}=\frac{5}{4}$. Значит, $S_{\Delta ABO}=\frac{5}{4}S_{\Delta CBO}=\frac{5}{4}\cdot 16=20.$

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно,

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Поэтому и $S_{\Delta COD} = 20$, $S_{ABCD} = 25 + 16 + 20 + 20 = 81$. $S_{ABCD} = 81\text{см}^2$.

Ответ. 81 см^2.

Задача 5.(20баллов)

Из города A в город B выехал автобус. Через 20 минут ему вдогонку выехал автомобиль. Автомобиль двигался со скоростью 45 км/ч. После встречи с автобусом автомобиль немедленно повернул обратно. К моменту прибытия автобуса в город B, автомобиль достиг лишь середины пути от места встречи до города A. Определить с какой скоростью двигался автобус, если расстояние между городами составляет 40 км.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения автобуса и автомобиля в системе координат «путь-время» (рис. 2).

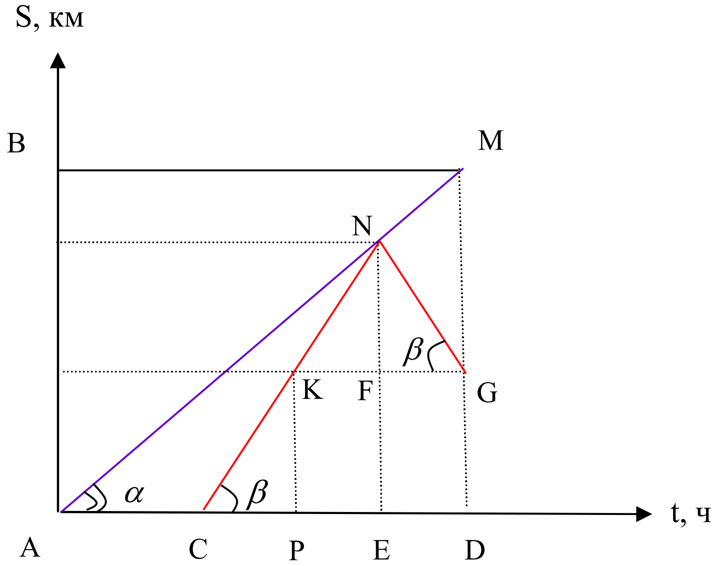


Рис. 2.

Пусть AM – график движения автобуса из города A в город B со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

CN и NG – графики движения второго автомобиля из A до встречи и обратно со скоростью $V_2 = tg\beta = 45$ км/ч.

По условию задачи, промежуток времени $AC = 20\,\text{мин} = \frac{1}{3}$ ч. Промежуток времени CP определим из ΔCKP: $CP = \frac{KP}{tg\beta} = \frac{KP}{45}$. Так как движение автобуса и автомобиля равномерное, а $PK = FN$, то $CP = PE = ED$.

Тогда время движения автобуса $AD{=}AC{+}3CP = \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}$, а его путь

$$AB = \left(\frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}\right)V_1 = 40.$$

Из ΔANE: $AE = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}$; $EN = 2 \cdot KP = AE \cdot tg\alpha = \left(\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}\right)V_1$.

Объединим полученные соотношения в систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{KP}{15}\right)V_1 = 40, \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}\right)V_1 = 2 \cdot KP; \end{cases} \quad \begin{cases} (5 + KP)V_1 = 600, \\ (15 + 2 \cdot KP)V_1 = 90 \cdot KP; \end{cases}$$

$$\begin{cases} KP{=}\frac{600}{V_1} - 5, \\ \left(15 + 2 \cdot \left(\frac{600}{V_1} - 5\right)\right)V_1 = 90 \cdot \left(\frac{600}{V_1} - 5\right); \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$15V_1 + 2(600 - V_1) = 90 \cdot \frac{600 - 5V_1}{V_1},$$

$$15V_1^2 + 2V_1(600 - 5V_1) = 90(600 - 5V_1),$$

$$5V_1^2 + 1650 \cdot V_1 - 54000 = 0,$$

$$V_1^2 + 330 \cdot V_1 - 10800 = 0,$$

$$D = 330^2 + 4 \cdot 10800 = 100(33^2 + 4 \cdot 108) = 390^2,$$

$V_1 = \frac{-330 + 390}{2} = 30$, второй корень уравнения отрицательный и не удовлетворяет условию задачи. Т.о. $V = 30$ км/ч.

Ответ. 30 км/ч.

Задача 6.(30баллов) Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x) \cdot \cos 3x - \cos 6x - 7}.$$

Решение.

Преобразуем формулу функции.

$$f(x)=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x)\cdot\cos 3x-\cos 6x-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x-\frac{1}{2}\cos x)\cdot\cos 3x-(2\cos^2 3x-1)-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{4\sin(x-\frac{\pi}{6})\cdot\cos 3x-2\cos^2 3x-6}.$$

Обозначим $\sin(x-\frac{\pi}{6})=a,\ \ b=\cos 3x,\ \ |a|\le 1,\ \ |b|\le 1$, тогда имеем

$$f(a,b)=\frac{a}{4ab-2b^2-6}=\frac{a}{-2(b^2-2ab+a^2)-6+2a^2}=-\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}.$$

$$|f(a,b)|=\left|\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}\right|\le\left|\frac{a}{6-2a^2}\right|\le\frac{1}{6-2\cdot 1}=\frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{4}\le f(a,b)\le\frac{1}{4}.$$

$f(a,b)=-\frac{1}{4}$ при $(b-a)^2=0$ и $a=1$, отсюда

$$\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{6})=1,\\ \cos 3x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 3x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z;\end{cases}$$

$$x=\frac{2\pi}{3},\ \ f_{\min}=f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{4}.$$

Ответ. $-\frac{1}{4}$.

Задача 1. (5 баллов)

Упростить выражение A, если $A = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{n}$.

Решение.

Выполним преобразование выражения A:

$$A = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{n} = 7(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n}) =$$

$$= 7\left(\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{100}{9} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{10^n}{9} - \frac{1}{9}\right)\right) = 7\left(\frac{10}{9} + \frac{100}{9} + \ldots \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9}n\right) =$$

$$= 7\left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{1}{9}n\right) = \frac{7}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Ответ. $A = \frac{7}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n)$.

Задача 2. (10 баллов)

Доказать, что $A < B$, если $A = 2017^{2019} \cdot 2019^{2017}$, $B = 2018^{2\cdot2018}$.

Решение.

Преобразуем выражение $A = 2017^{2019} \cdot 2019^{2017}$.

$A = 2017^{2019} \cdot 2019^{2017} = 2017^2 \cdot 2017^{2017} \cdot 2019^{2017} =$

$= 2017^2 \cdot (2018 - 1)^{2017}(2018 + 1)^{2017} = 2017^2 \cdot (2018^2 - 1)^{2017}$.

Тогда, $2017^2 \cdot (2018^2 - 1)^{2017} < 2018^2 \cdot 2018^{2\cdot2017}$, где

$2018^2 \cdot 2018^{2\cdot2017} = 2018^{2+2\cdot2017} = 2018^{2\cdot2018} = B$.

Следовательно, $A < B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3. (15 баллов)

Наудачу выбирают число a из промежутка $[-6;6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня.

Решение.

Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2-4(a^2-9)>0, \\ a^2-9>0, \\ 2(a+1)<0; \end{cases} \begin{cases} 8a+40>0, \\ (a-3)(a+3)>0, \\ a+1<0; \end{cases} \begin{cases} a>-5, \\ (a-3)(a+3)>0, \\ a<-1; \end{cases} a\in\left[-5;-3\right].$$

Вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два отрицательных корня, равна отношению длины промежутка $\left[-5;-3\right]$ к длине промежутка $\left[-6;6\right]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Задача 4. (20 баллов)
Найти все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x=8^y+9^y, \\ \sqrt{-x^2-3xy-y^2}=2y+\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $y\geq-\frac{x}{4}$.

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x=8^y+9^y, \\ \sqrt{-x^2-3xy-y^2}=2y+\frac{x}{2}; \end{cases} \begin{cases} (3-\sqrt{8})^x=8^y+9^y, \\ -x^2-3xy-y^2=4y^2+2xy+\frac{x^2}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x=8^y+9^y, \\ \left(y+\frac{x}{2}\right)^2=0, \end{cases} \begin{cases} (3-\sqrt{8})^x=8^y+9^y, \\ y=-\frac{x}{2}; \end{cases} \begin{cases} (3+\sqrt{8})^{-x}=(\sqrt{8})^{-x}+3^{-x}, \\ y=-\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Поделив левую и правую части первого уравнения системы на $(3+\sqrt{8})^{-x}\neq0$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right)^{-x}+\left(\frac{3}{3+\sqrt{8}}\right)^{-x}=1.$$

Выражение слева есть сумма двух монотонно убывающих функций, значит данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень легко угадывается: $x=-1$. Тогда $y=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Задача 5. (20 баллов)

Из города A в город B выехал автобус. Через 20 минут ему вдогонку выехал автомобиль. Автомобиль двигался со скоростью 45 км/ч. После встречи с автобусом автомобиль немедленно повернул обратно. К моменту прибытия автобуса в город B, автомобиль достиг лишь середины пути от места встречи до города A. Определить, с какой скоростью двигался автобус, если расстояние между городами составляет 40 км.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения автобуса и автомобиля в системе координат «путь-время» (рис. 1).

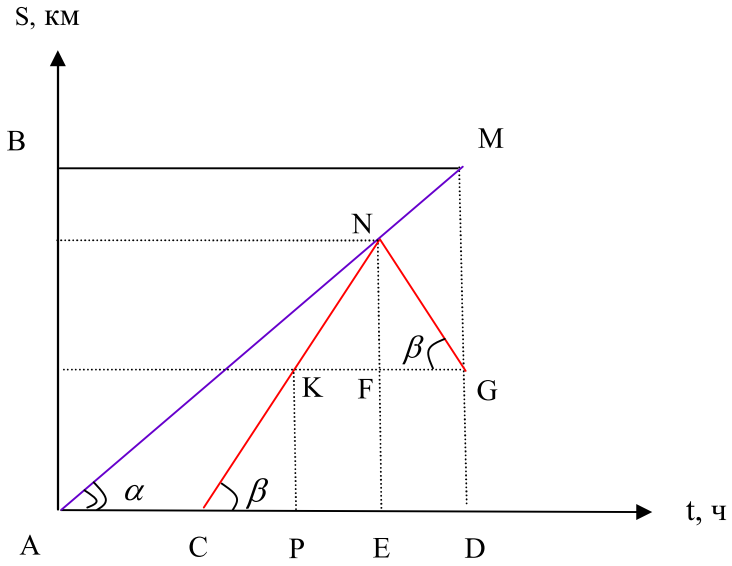


Рис. 1.

Пусть AM – график движения автобуса из города A в город B со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

CN и NG – графики движения второго автомобиля из A до встречи и обратно со скоростью $V_2 = tg\beta = 45$ км/ч.

По условию задачи, промежуток времени $AC = 20\,\text{мин} = \dfrac{1}{3}$ ч. Промежуток времени CP определим из ΔCKP: $CP = \dfrac{KP}{tg\beta} = \dfrac{KP}{45}$. Так как движение автобуса и автомобиля равномерное, а $PK = FN$, то $CP = PE = ED$.

Тогда время движения автобуса $AD = AC + 3CP = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3 \cdot KP}{45}$, а его путь

$$AB = \left(\frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}\right) V_1 = 40.$$

Из ΔANE: $AE=\frac{1}{3}+\frac{2\cdot KP}{45}$; $EN=2\cdot KP=AE\cdot tg\alpha=\left(\frac{1}{3}+\frac{2\cdot KP}{45}\right)V_1$.

Объединим полученные соотношения в систему:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}+\frac{KP}{15}\right)V_1=40,\\ \left(\frac{1}{3}+\frac{2\cdot KP}{45}\right)V_1=2\cdot KP;\end{cases}\quad \begin{cases}(5+KP)V_1=600,\\ (15+2\cdot KP)V_1=90\cdot KP;\end{cases}$$

$$\begin{cases}KP=\frac{600}{V_1}-5,\\ \left(15+2\cdot\left(\frac{600}{V_1}-5\right)\right)V_1=90\cdot\left(\frac{600}{V_1}-5\right);\end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$15V_1+2(600-V_1)=90\cdot\frac{600-5V_1}{V_1},$$

$$15V_1^2+2V_1(600-5V_1)=90(600-5V_1),$$

$$5V_1^2+1650\cdot V_1-54000=0,$$

$$V_1^2+330\cdot V_1-10800=0,$$

$$D=330^2+4\cdot 10800=100(33^2+4\cdot 108)=390^2,$$

$V_1=\frac{-330+390}{2}=30$, второй корень уравнения отрицательный и не удовлетворяет условию задачи. Т.о. $V=30$ км/ч.

Ответ. 30 км/ч.

Задача 6. (30 баллов)

Определить, какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy, расположенная между прямыми $x=-3{,}5$ и $x=1{,}5$, ограниченная снизу осью Ox, сверху касательной к графику функции $y=156-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания из промежутка $[-3{,}5;1{,}5]$.

Решение.

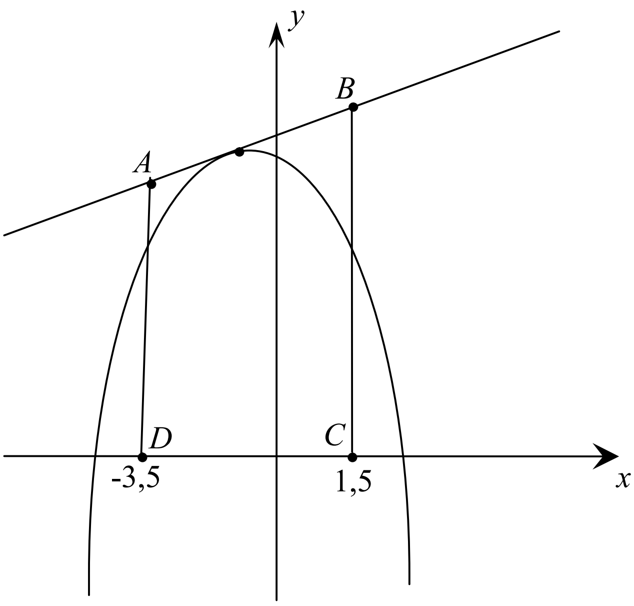


Рис. 2.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = 156 - x^4$ в точке с абсциссой x_0: $y_{кас} = -4x_0^3(x - x_0) + 156 - x_0^4$.

Точка $A(-3{,}5; a)$ – точка пересечения касательной и прямой $x = -3{,}5$ и $B(1{,}5; b)$ – точка пересечения касательной и прямой $x = 1{,}5$.

Подставим координаты этих точек в уравнение касательной и выразим a и b через x_0:

$a = -4x_0^3(-3{,}5 - x_0) + 156 - x_0^4 = 3x_0^4 + 14x_0^3 + 156$,

$b = -4x_0^3(1{,}5 - x_0) + 156 - x_0^4 = 3x_0^4 - 6x_0^3 + 156$

Площадь трапеции $ABCD$ (рис.2): $S = \dfrac{5(a+b)}{2} = \dfrac{5}{2}(6x_0^4 + 8x_0^3 + 312)$.

Найдем экстремумы полученной функции в промежутке $[-3{,}5; 1{,}5]$: $S' = \dfrac{5}{2}(24x_0^3 + 24x_0^2)$. Определим нули ее производной: $\dfrac{5}{2}(24x_0^3 + 24x_0^2) = 0$, $x_0^2(x_0 + 1) = 0$, $x_0 = -1$.

Так как на интервале $(-3{,}5; -1)$ верно неравенство $S'(x_0) < 0$, а в интервале $(-1; 0)$ верно неравенство $S'(x_0) > 0$, то $x_0 = -1$ единственная точка минимума в интервале $(-3{,}5; 1{,}5)$. Следовательно, $S_{\min} = S(-1) = 750$.

Ответ. 750.