Математика. 9 класс

Вариант 42

Задача 1. (5 баллов)

Найти значение выражения A при $n=1-\sqrt{505}$, если

$$A=\frac{8-n^3}{2+n}:\left(2+\frac{n^2}{2+n}\right)+\frac{n^2}{n-2}\cdot\frac{4-n^2}{n^2+2n}.$$

Решение.

Упростим выражение A.

$$A=\frac{8-n^3}{2+n}:\left(2+\frac{n^2}{2+n}\right)+\frac{n^2}{n-2}\cdot\frac{4-n^2}{n^2+2n}=$$

$$=\frac{(2-n)(4+2n+n^2)}{2+n}:\left(\frac{4+2n+n^2}{2+n}\right)-\frac{n^2}{2-n}\cdot\frac{(2-n)(2+n)}{n(n+2)}=$$

$$=2-n-n=2-2n.$$

Если $n=1-\sqrt{505}$, то $A=2-2\left(1-\sqrt{505}\right)=2\sqrt{505}=\sqrt{2020}$.

Ответ. $2\sqrt{505}=\sqrt{2020}$.

Задача 2. (10 баллов) Решить уравнение

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}.$$

Решение.

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3},\quad \cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=-\left(2-\sqrt{3}-4\right),$$

$$\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}}=2+\sqrt{3},\quad 4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}},\quad 4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2x-\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$$

Тогда, $4-\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},\ 2x-\sqrt{3}=2-\sqrt{3},\ 2x=2,\ x=1$.

Ответ. $x=1$.

Задача 3. (15 баллов) Среднее арифметическое двух положительных чисел p и q в m раз больше их среднего гармонического. Доказать, что

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{2m-1+2\sqrt{m^2-m}}{2m-1-2\sqrt{m^2-m}}$$

Решение. Пусть $p > q$. По условию задачи имеем:

$$\frac{p+q}{2}=m\cdot\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},\ \frac{p+q}{2}=\frac{2mpq}{p+q},\ p^2+q^2+2pq(1-2m)=0,\ \left(\frac{p}{q}\right)^2+2\frac{p}{q}(1-2m)+1=0.$$

Очевидно, что $\frac{p}{q}=t>1$.

Тогда $t^2+2(1-2m)t+1=0$, $t_{1,2}=(2m-1)\pm\sqrt{(2m-1)^2-1}=(2m-1)\pm2\sqrt{m^2-m}$.

При условии $t>1$, $t=(2m-1)+2\sqrt{m^2-m}$.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\left(2m-1+2\sqrt{m^2-m}\right)^2=\frac{\left(2m-1+2\sqrt{m^2-m}\right)^2}{1}=\frac{\left(2m-1+2\sqrt{m^2-m}\right)^2}{\left(2m-1\right)^2-\left(2\sqrt{m^2-m}\right)^2}=$$

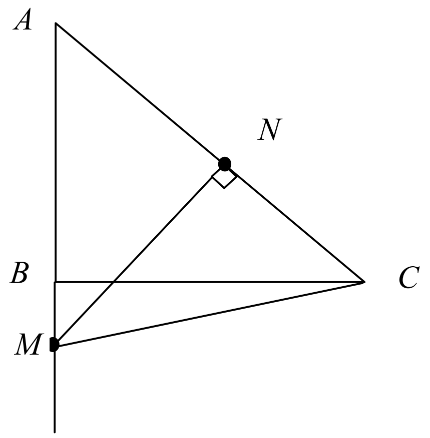
$$=\frac{\left(2m-1+2\sqrt{m^2-m}\right)^2}{\left(\left(2m-1\right)-2\sqrt{m^2-m}\right)\left(\left(2m-1\right)+2\sqrt{m^2-m}\right)}=\frac{2m-1+2\sqrt{m^2-m}}{\left(2m-1\right)-2\sqrt{m^2-m}}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 4. (20 баллов)

Точка N лежит на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка M принадлежит продолжению катета AB, причем угол MNC прямой. Площадь треугольника MNC составляет $\frac{5}{18}$ площади треугольника ABC. Определить, в какой пропорции точка N делит сторону AC.

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC=45^0$.

Тогда ΔMAN тоже равнобедренный и $AN=MN=x$.

Обозначим $NC=y$, $AB=a$. По теореме Пифагора из ΔABC:

$(x+y)^2=2a^2$, $x+y=\sqrt{2}a$.

По условию $S_{\Delta MNC}=\dfrac{5}{18}S_{\Delta ABC}$,

$\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{5}{18}\dfrac{a^2}{2}$, $y=\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{a^2}{x}$.

Тогда, $x+\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{a^2}{x}=\sqrt{2}a$, $18x^2-18\sqrt{2}ax+5a^2=0$, $x_1=\dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$ и $x_2=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Корень $x_2=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ не подходит, т.к. $M\notin AB$ и $x>AB$.

$y=\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{a^2}{\frac{5a\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{a}{3\sqrt{2}}$. Таким образом, $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{1}$.

Ответ. 5:1.

Задача 5. (20 баллов) В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 650 тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.

Решение.

Пусть n – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто

$$400+\frac{3}{2}\cdot 400+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 400+...+\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 400+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 400 \text{ тыс. т нефти.}$$

И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение:

$$400\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=35650,\ 400\cdot\left(12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2\right)=35650,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{243}{32},\ n=5.$$

Тогда общее количество лет будет равно 15.

Ответ. 15.

Задача 6. (30 баллов)

Наудачу выбирают число a из $[-6;6]$. Определите вероятность того, что уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет два отрицательных корня.

Решение.
Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 2(a+1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 40 > 0, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a + 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -5, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a < -1; \end{cases} \quad a \in [-5;-3].$$

Вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня, равна отношению длины промежутка $[-5;-3]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Математика. 10 класс

Вариант 42

Задача 1. (5 баллов)
Найти значение выражения A при $x=1111,\underbrace{111\ldots1}_{2019}2$, $y=907,\underbrace{888\ldots88}_{2020}$, если

$$A=\frac{y^2+xy-\sqrt[4]{x^5y^3}-\sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{x^2y^3}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Решение.
Выполним преобразования выражения A.

$$\frac{y^2+xy-x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{3}{4}}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=\frac{y(y+x)-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}(y+x)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{2}{4}}-x^{\frac{2}{4}}\right)}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)=$$

$$=\frac{(y+x)\left(y-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{(y+x)y^{\frac{3}{4}}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{y^{\frac{3}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}=x+y.$$

При $x=1111,\underbrace{111\ldots1}_{2019}2$, $y=907,\underbrace{888\ldots88}_{2020}$, получим:

$x+y=1111,\underbrace{111\ldots1}_{2019}2+907,\underbrace{888\ldots888}_{2020}=2019$.

Ответ. 2019.

Задача 2.(10баллов)
Доказать, что $A<B$, если

$$A=\frac{\sin 2018^0}{\sin 2019^0},\ B=\frac{\sin 2020^0}{\sin 2021^0}.$$

Решение.
Найдем разность A и B.

$$A-B=\frac{\sin 2018^0}{\sin 2019^0}-\frac{\sin 2020^0}{\sin 2021^0}=\frac{\sin 38^0}{\sin 39^0}-\frac{\sin 40^0}{\sin 41^0}=$$

$$=\frac{\sin 38^0 \sin 41^0-\sin 40^0 \sin 39^0}{\sin 39^0 \sin 41^0}=$$

$$=\frac{\cos 3^0-\cos 79^0-\cos 1^0+\cos 79^0}{2\sin 39^0 \sin 41^0}=\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\sin 39^0 \sin 41^0}.$$

Так как $\cos 3^0<\cos 1^0$, то $\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\sin 39^0 \sin 41^0}<0$.

Таким образом, $A-B<0$, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0, \\ x^2+y^2+13(x-y)=0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$3x^2-8xy+4y^2=0,$$

$$D=64y^2-48y^2=16y^2,$$

$$x_1=2y, x_2=\frac{2y}{3}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (x-2y)(3x-2y)=0, \\ x^2+y^2+13(x-y)=0. \end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y, \\ 4y^2+y^2+13y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2y}{3}, \\ \frac{4y^2}{9}+y^2-\frac{13}{3}y=0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y, \\ 5y^2+13y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2y}{3}, \\ y^2-3y=0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0, y_1=0, \\ x_2=-\frac{26}{5}, y_1=-\frac{13}{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=0, y_3=0, \\ x_4=2, y_4=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. (0;0), $(-\frac{26}{5};-\frac{13}{5})$, (2,3).

Задача 4.(20баллов)

В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 650 тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.

Решение.
Пусть n – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто

$$400+\frac{3}{2}\cdot 400+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 400+...+\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 400+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 400 \text{ тыс. т нефти.}$$

И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение:

$$400\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=35650,\ 400\cdot\left(12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2\right)=35650,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{243}{32},\ n=5.$$

Тогда общее количество лет будет равно 15.

Ответ. 15.

Задача 5.(20баллов)
Две геометрические прогрессии состоят из одинакового числа членов. Первый член первой прогрессии равен 20, а знаменатель 0,75; во второй прогрессии первый член и знаменатель соответственно равны 4 и $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма таких произведений составит 158,75. Найти число членов этих прогрессий.
Решение.
Обозначим первый член и знаменатель первой прогрессии $b_1=20,\ q=0{,}75$, а первый член и знаменатель второй прогрессии $b'_1=4,\ q'=\frac{2}{3}$.

Найдем сумму произведений членов прогрессий с одинаковыми номерами и учтем, что она составит 158,75:

$$b_1\,b'_1+b_2b'_2+...+b_nb'_n=158{,}75,$$

$$b_1\,b'_1+b\ \ qb'_1\,q'+...+b_1\,q^{n-1}b'_1\,q'^{n-1}=158{,}75,$$

$$20\cdot 4+20\cdot\frac{3}{4}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}+...+20\cdot 4\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)^{n-1}=158{,}75.$$

Вычислим значение выражения в левой части тождества, рассматривая его как сумму геометрической прогрессии с первым членом $b''_1=80$ и знаменателем $q''=\frac{1}{2}$

$$\frac{80\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=160\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=158{,}75, \quad n=7.$$

Ответ. 7.

Задача 6.(30баллов) Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 6см и центром в точке *Q* в точках *M, N* и Р. Площадь треугольника *MNP* больше 36см^2, площадь треугольника ΔQNP равна 9см^2. Найти угол *NMP*.

Решение.

Так как радиусы *QM*, *QN* и *QP* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка – *QM*, *QN* и *QP* – лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью (рис.1).

По условию задачи $S_{\Delta QNP} = 9$, т.е.

$S_{\Delta QNP} = \frac{1}{2}\cdot QN\cdot QP\cdot \sin\angle NQP = 9 \Rightarrow \sin\angle NQP = \frac{1}{2}$.

Возможные значения $\angle NQP = \frac{\pi}{6}$ или $\angle NQP = \frac{5\pi}{6}$. Рассмотрим возможные варианты.

1. Если $\angle NQP = \frac{\pi}{6}$, то $\angle NMP = \frac{\pi}{12}$ (рис.1) или $\angle NMP = \frac{11\pi}{12}$ (рис.2), тогда

$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}\cdot MN\cdot MP\cdot \sin\angle NMP < \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot \frac{1}{2} = 36$, что противоречит условию.

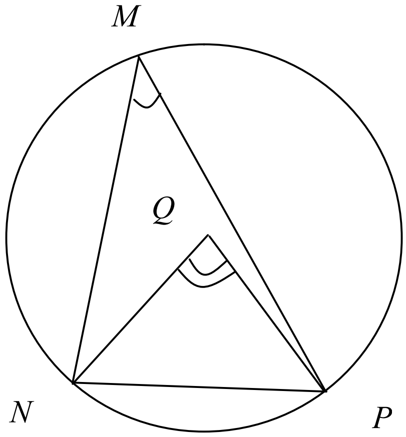


Рис.1

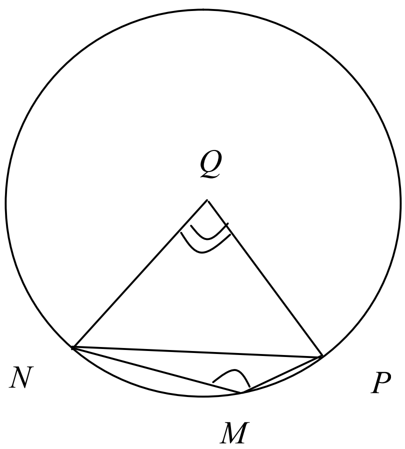


Рис.2

2. Если $\angle NQP = \frac{5\pi}{6}$, то $\angle NMP = \frac{7\pi}{12}$ (рис.3) или $\angle NMP = \frac{5\pi}{12}$ (рис.4).

На рисунке 3 $S_{\Delta MNP} < \frac{1}{2}\cdot NP\cdot QM < \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6 = 36$, что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором $S_{\Delta MNP} < 16$ представлен на рис.4.

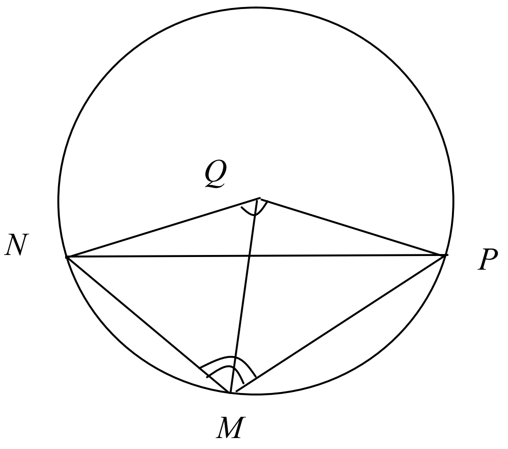


Рис.3

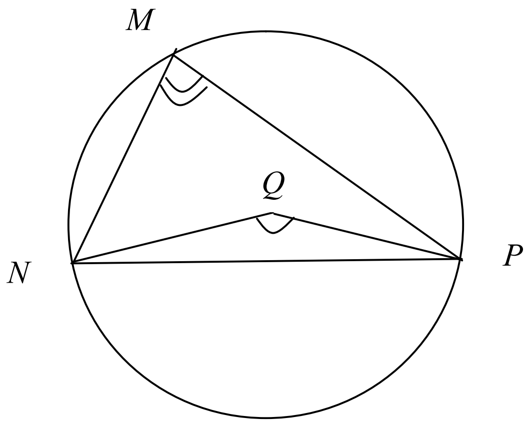


Рис.4

Ответ: $\angle NMP = \dfrac{5\pi}{12}$.

Задача 1. (5 баллов)
Найти значение выражения A, если

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}\right).$$

Решение.

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$A=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919\cdot1920}+\frac{1}{1920\cdot1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{1920}+\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=$$

$$=19{,}19\cdot\left(\frac{1}{1919}-\frac{1}{2019}\right)=19{,}19\cdot\frac{2019-1919}{1919\cdot2019}=\frac{1919\cdot100}{100\cdot1919\cdot2019}=\frac{1}{2019}.$$

Ответ. $\frac{1}{2019}$.

Задача 2. (10 баллов)
В доме 720 квартир. Однокомнатные квартиры составляют более 12%, но менее 13% от общего числа квартир. 60% от оставшихся были двухкомнатные квартиры, остальные – трехкомнатные. Определить какое количество процентов от общего числа квартир этого дома составили двухкомнатные квартиры.

Решение.

Пусть x – суммарное количество двухкомнатных и трехкомнатных квартир, тогда количество однокомнатных квартир $(720-x)$.

По условию задачи: количество двухкомнатных квартир – $0{,}6x$, количество трехкомнатных квартир – $0{,}4x$, количество однокомнатных квартир заключено в интервале от $0{,}12\cdot720$ до $0{,}13\cdot720$, т.е.

$$0{,}12\cdot720<720-x<0{,}13\cdot720,$$

$$86{,}4<720-x<93{,}6,$$

$$626{,}4<x<633{,}6.$$

Число $0{,}6x$ – число двухкомнатных квартир – целое. Следовательно, оно должно делиться на 5. Но в интервале $626{,}4<x<633{,}6$ одно целое число, которое делится на 5 – это 630 т.е. $x = 630$. Тогда количество двухкомнатных квартир $0{,}6 \cdot 630 = 378$, что составляет 52,5% от общего числа квартир.

Ответ. 52,5%.

Задача 3. (15 баллов)
Наудачу выбирают число a из промежутка $[-6;6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня.

Решение.
Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2 - 4(a^2-9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 2(a+1) < 0; \end{cases} \begin{cases} 8a + 40 > 0, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a + 1 < 0; \end{cases} \begin{cases} a > -5, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a < -1; \end{cases} \; a \in [-5;-3].$$

Вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня, равна отношению длины промежутка $[-5;-3]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Задача 4. (20 баллов)
Найти все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $y \ge -\frac{x}{4}$.

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \dfrac{x}{2}; \end{cases} \begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ -x^2 - 3xy - y^2 = 4y^2 + 2xy + \dfrac{x^2}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 = 0, \end{cases} \begin{cases} (3-\sqrt{8})^x = 8^y + 9^y, \\ y = -\dfrac{x}{2}; \end{cases} \begin{cases} (3+\sqrt{8})^{-x} = (\sqrt{8})^{-x} + 3^{-x}, \\ y = -\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Поделив левую и правую части первого уравнения системы на $(3+\sqrt{8})^{-x} \ne 0$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right)^{-x}+\left(\frac{3}{3+\sqrt{8}}\right)^{-x}=1.$$

Выражение слева есть сумма двух монотонно убывающих функций, значит данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень легко угадывается: $x=-1$. Тогда $y=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$**.**

Задача 5. (20 баллов)

Газопровод разбит на несколько участков. На каждом участке работает одинаковое число работников. Известно, что число работников находящихся на одном участке, превышает число участков на 14. Когда 15 человек пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, число работников на первом участке стало равным числу работников, оставшихся на всех остальных участках. Определить число участков газопровода.

Решение.

Обозначим за n число участков, а за k – число работников, работающих первоначально на каждом участке. Исходя из условий задачи, получим систему:

$$\begin{cases} k-n=14, \\ k+15=(n-1)(k-15), \\ k>15,\ n,k\in N; \end{cases} \quad \begin{cases} n=k-14, \\ k+15=(k-14-1)(k-15), \\ k>15,\ n,k\in N. \end{cases}$$

Решим эту второе уравнение системы.

$k+15=(k-15)^2$,

$k+15=k^2-31k+225,$

$k^2-31k+210=0,$

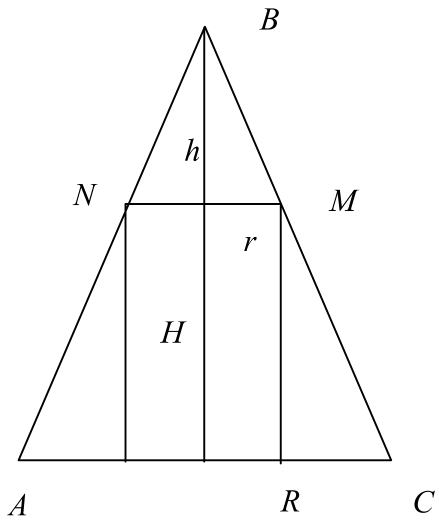
$k_1=10$, $k_2=21$.

Так как по условию $k>15$, то $k=21$ и $n=7$. Таким образом, газопровод разбит на 7 участков.

Ответ. 7.

Задача 6. (30 баллов) Найти радиус цилиндра с наибольшей полной поверхностью, вписанного в круговой конус высотой 20 см и радиусом основания 10 см.

Решение.



Площадь полной поверхности цилиндра выражается формулой $S = 2\pi r(r+h)$.
Изобразим осевое сечение цилиндра, вписанного в конус.
Обозначим высоту цилиндра h, а радиус основания цилиндра r.
Из подобия треугольников ABC и NBM по двум углам получим

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h},\ h = H - \frac{rH}{R},$$

$$S(r) = 2\pi r\left(H - \frac{rH}{R} + r\right) = 2\pi r\left(H + r\left(1 - \frac{H}{R}\right)\right)$$

Необходимо подобрать такое значение r, чтобы S была максимальной. Продифференцируем это выражение

$$S'(r) = 2\pi\left(H + 2r\left(1 - \frac{H}{R}\right)\right),$$

$$H + 2r\left(1 - \frac{H}{R}\right) = 0 \Rightarrow r = \frac{HR}{2(H-R)} = \frac{20\cdot 10}{2\cdot(20-10)} = 10.$$

Убедимся, что найден максимум функции проверкой знака производной
$r < 10$, $S\,'(r) > 0$, $S(r)$ возрастает;
$r > 10$, $S'(r) < 0$, $S(r)$ убывает, значит $S_{\max}(10) = 200\pi$.
Ответ. 200π.