Математика. 9 класс

Вариант 31

Задача 1. (5 баллов)
Доказать, что A делится на 13, если $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2019}$

Решение.

Выполним преобразования A:

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2019} = 3(1 + 3 + 3^2) + 3^4(1 + 3 + 3^2) + \ldots + 3^{2017}(1 + 3 + 3^2) =$$

$$= (1 + 3 + 3^2)(3 + 3^4 + \ldots + 3^{2017}) = 13(3 + 3^4 + \ldots + 3^{2017}).$$

Так как один из множителей делится на 13, то A делится на 13.

Что требовалось доказать.

Задача 2. (10 баллов) Решить уравнение

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4 = 2+\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4 = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4} = 2+\sqrt{3}-4,$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4} = \sqrt{3}-2, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4 = \frac{1}{\sqrt{3}-2}, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4 = -2-\sqrt{3}.$$

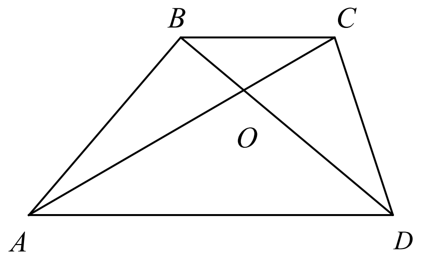
Тогда, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4} = 2-\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4 = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4 = 2+\sqrt{3}$,

$$\frac{1}{2x-\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2, \quad 2x-\sqrt{3} = -2-\sqrt{3}, \quad 2x = -2, \quad x = -1.$$

Ответ. $x = -1$.

Задача 3. (15 баллов) Диагонали AC и BD трапеции $ACBD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2. Найти площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\Delta AOD} \neq S_{\Delta BOC}$, поэтому AD и BD не боковые стороны, а основания трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому

$k = \dfrac{4}{3} = \dfrac{AO}{OC}$.

Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е. $\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{4}{3}$. Значит, $S_{\Delta ABO} = \dfrac{4}{3} S_{\Delta CBO} = \dfrac{4}{3} \cdot 9 = 12$.

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно,

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Поэтому и $S_{\Delta COD} = 12$, $S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49$ см^2.

Ответ. 49 см^2.

Задача 4. (20 баллов)

В доме 320 квартир. Однокомнатные квартиры составляют более 12%, но менее 13% от общего числа квартир. 60% от оставшихся были двухкомнатные квартиры, остальные – трехкомнатные. Определить какое количество процентов от общего числа квартир этого дома составили трехкомнатные квартиры.

Решение.

Пусть x – суммарное количество двухкомнатных и трехкомнатных квартир, тогда количество однокомнатных квартир $(320 - x)$.

По условию задачи: количество двухкомнатных квартир – $0{,}6x$, количество трехкомнатных квартир – $0{,}4x$, количество однокомнатных квартир заключено в интервале от $0{,}12 \cdot 320$ до $0{,}13 \cdot 320$, т.е.

$$0{,}12 \cdot 320 < 320 - x < 0{,}13 \cdot 320,$$

$$38{,}4 < 320 - x < 41{,}6,$$

$$278{,}4 < x < 281{,}6.$$

Число $0{,}6x$ – число двухкомнатных квартир – целое. Следовательно, оно должно делиться на 5. Но в интервале $278{,}4 < x < 281{,}6$ одно целое число, которое делится на 5 – это 280 т.е. $x = 280$. Тогда количество трехкомнатных квартир $0{,}4 \cdot 280 = 112$, что составляет 35% от общего числа квартир.

Ответ. 35%

Задача 5. (20 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0,$$

$$x^2 - x(3y - 5) + 2y^2 - 9y + 4 = 0,$$

$$D = (3y-5)^2 - 8y^2 + 36y - 16 = y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2,$$

$$x_1 = 2y - 1, x_2 = y - 4.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (x - 2y + 1)(x - y + 4) = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0 = 0. \end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y - 1, \\ (2y-1)^2 - y^2 - 5 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y - 4, \\ (y-4)^2 - y^2 - 5 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 3y^2 - 4y - 4 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y - 4, \\ -8y + 11 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 2, \\ x_2 = -\dfrac{7}{3}, y_2 = -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = -\dfrac{21}{8}, \\ y_3 = \dfrac{11}{8}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. (3;2), $(-\frac{7}{3};-\frac{2}{3})$, $(\frac{21}{8};\frac{11}{8})$.

Задача 6. (30 баллов) Наудачу выбирают число a из промежутка $[-6; 6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня.

Решение.

Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2 - 4(a^2-9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 2(a+1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 40 > 0, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a + 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -5, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a > -1; \end{cases} \quad a \in [3;+\infty).$$

Так как по условию число a выбирают из промежутка $[-6;6]$, то $a \in [3;6]$. Вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня, равна отношению длины промежутка $[3;6]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Математика. 10 класс

Вариант 31

Задача 1. (5 баллов) Решить уравнение

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}+4=2+\sqrt{3},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=2+\sqrt{3}-4,$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4}=\sqrt{3}-2,\quad \frac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=\frac{1}{\sqrt{3}-2},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}-4=-2-\sqrt{3}.$$

Тогда, $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4}=2-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{2x-\sqrt{3}}+4=2+\sqrt{3},$

$$\frac{1}{2x-\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2,\ 2x-\sqrt{3}=-2-\sqrt{3},\ 2x=-2,\ x=-1.$$

Ответ. $x=-1$.

Задача 2.(10 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+5x-9y+4=0, \\ x^2-y^2-5=0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение как квадратное относительно x с параметром y и решим его.

$$x^2-3xy+2y^2+5x-9y+4=0,$$
$$x^2-x(3y-5)+2y^2-9y+4=0,$$
$$D=(3y-5)^2-8y^2+36y-16=y^2+6y+9=(y+3)^2,$$
$$x_1=2y-1, x_2=y-4.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (x-2y+1)(x-y+4)=0, \\ x^2-y^2-5=0=0. \end{cases}$$

Перейдем к совокупности систем уравнений.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y-1,\\(2y-1)^2-y^2-5=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y-4,\\(y-4)^2-y^2-5=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y-1,\\3y^2-4y-4=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y-4,\\-8y+11=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=3, y_1=2,\\x_2=-\dfrac{7}{3}, y_2=-\dfrac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=-\dfrac{21}{8},\\y_3=\dfrac{11}{8}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. (3;2), $(-\frac{7}{3};-\frac{2}{3}),(\frac{21}{8};\frac{11}{8})$.

Задача 3.(15 баллов)

Доказать, что $A<B$, если $A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}$, $B=2019^{2\cdot 2019}$.

Решение.

Преобразуем выражение $A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}$.

$A=2018^{2020}\cdot 2020^{2018}=2018^2\cdot 2018^{2018}\cdot 2020^{2018}=$

$=2018^2\cdot(2019-1)^{2018}(2019+1)^{2018}=2018^2\cdot(2019^2-1)^{2018}$.

Тогда, $2018^2\cdot(2019^2-1)^{2018}<2019^2\cdot 2019^{2\cdot 2018}$, где

$2019^2\cdot 2019^{2\cdot 2018}=2019^{2+2\cdot 2018}=2019^{2\cdot 2019}=B$.

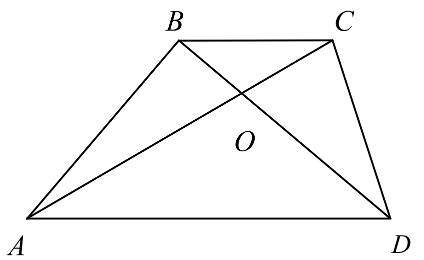
Следовательно, $A<B$.

Что требовалось доказать.

Задача 4.(20 баллов)

Диагонали AC и BD трапеции $ACBD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2. Найти площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\Delta AOD}\neq S_{\Delta BOC}$, поэтому AD и BD не боковые стороны, а основания трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k=\frac{4}{3}=\frac{AO}{OC}$.

Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}}=\frac{AO}{OC}=\frac{4}{3}$. Значит, $S_{\Delta ABO}=\frac{4}{3}S_{\Delta CBO}=\frac{4}{3}\cdot 9=12$.

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно,

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Поэтому и $S_{\Delta COD} = 12$, $S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49$ см^2.

Ответ. 49 см^2.

Задача 5.(20 баллов) Из города A в город B выехал курьер с корреспонденцией. Через 20 минут ему вдогонку отправили второго курьера. Он двигался со скоростью 45 км/ч. После встречи с коллегой второй курьер немедленно повернул обратно. К моменту прибытия первого курьера в город B, второй достиг лишь середины пути от места встречи до города A. С какой скоростью передвигался первый курьер, если расстояние между городами составляет 40 км.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения курьеров в системе координат «путь-время» (рис. 2).

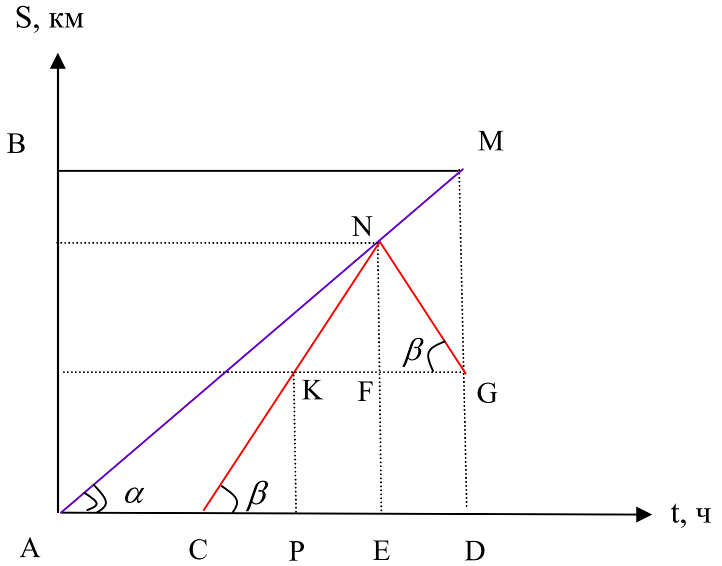


Рис. 2.

Пусть AM – график движения первого курьера из города A в город B со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

CN и NG – графики движения второго курьера из A до встречи и обратно со скоростью $V_2 = tg\beta = 45$ км/ч.

По условию задачи, промежуток времени $AC = 20\text{мин} = \frac{1}{3}$ ч. Промежуток времени CP определим из ΔCKP: $CP = \frac{KP}{tg\beta} = \frac{KP}{45}$. Так как движение курьеров равномерное, а $PK = FN$, то $CP = PE = ED$.

Тогда время движения первого курьера $AD = AC + 3CP = \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}$, а его путь

$$AB = \left(\frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}\right) V_1 = 40.$$

Из ΔANE: $AE = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}$; $EN = 2 \cdot KP = AE \cdot tg\alpha = \left(\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}\right) V_1$.

Объединим полученные соотношения в систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{KP}{15}\right) V_1 = 40, \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}\right) V_1 = 2 \cdot KP; \end{cases} \quad \begin{cases} (5 + KP) V_1 = 600, \\ (15 + 2 \cdot KP) V_1 = 90 \cdot KP; \end{cases}$$

$$\begin{cases} KP = \frac{600}{V_1} - 5, \\ \left(15 + 2 \cdot \left(\frac{600}{V_1} - 5\right)\right) V_1 = 90 \cdot \left(\frac{600}{V_1} - 5\right); \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$15V_1 + 2(600 - V_1) = 90 \cdot \frac{600 - 5V_1}{V_1},$$

$$15V_1^2 + 2V_1(600 - 5V_1) = 90(600 - 5V_1),$$

$$5V_1^2 + 1650 \cdot V_1 - 54000 = 0,$$

$$V_1^2 + 330 \cdot V_1 - 10800 = 0,$$

$$D = 330^2 + 4 \cdot 10800 = 100(33^2 + 4 \cdot 108) = 390^2$$

$V_1 = \frac{-330 + 390}{2} = 30$ км/ч, второй корень уравнения отрицательный и не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 30 км/ч.

Задача 6.(30 баллов) Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2} \cdot (\sin x - \cos x) \cdot \cos 8x - \cos 16x - 7}.$$

Решение.

Преобразуем формулу функции.

$$f(x)=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\cdot\cos 8x-\cos 16x-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{4(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)\cdot\cos 8x-(2\cos^2 8x-1)-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{4\sin(x-\frac{\pi}{4})\cdot\cos 8x-2\cos^2 8x-6}.$$

Обозначим $\sin(x-\frac{\pi}{4})=a,\quad b=\cos 8x,\quad |a|\le 1,\ \ |b|\le 1$, тогда имеем

$$f(a,b)=\frac{a}{4ab-2b^2-6}=\frac{a}{-2(b^2-2ab+a^2)-6+2a^2}=-\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}.$$

$$|f(a,b)|=\left|\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}\right|\le\left|\frac{a}{6-2a^2}\right|\le\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{4}\le f(a,b)\le\frac{1}{4}.$$

$f(a,b)=-\frac{1}{4}$ при $(b-a)^2=0$ и $a=1$, отсюда

$$\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1,\\ \cos 8x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 8x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\frac{\pi k}{4}, k\in Z;\end{cases}$$

$$x=\frac{3\pi}{4},\quad f_{\min}=f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{4}$$

Ответ. $-\frac{1}{4}$.

Математика. 11 класс

Вариант 31

Задача 1. (5 баллов)
Упростить выражение A, если $A = 2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{222...2}_{n}$.

Решение.
Выполним преобразование выражения A:

$$A = 2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{222...2}_{n} = 2(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{n}) =$$

$$= 2\left(\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{100}{9} - \frac{1}{9}\right) + ... + \left(\frac{10^n}{9} - \frac{1}{9}\right)\right) = 2\left(\frac{10}{9} + \frac{100}{9} + ... \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9}n\right) =$$

$$= 2\left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{1}{9}n\right) = \frac{2}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Ответ. $A = \frac{2}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n)$.

Задача 2. (10 баллов)
Доказать, что $A < B$, если $A = 2018^{2020} \cdot 2020^{2018}$, $B = 2019^{2\cdot 2019}$.
Решение.
Преобразуем выражение $A = 2018^{2020} \cdot 2020^{2018}$.

$$A = 2018^{2020} \cdot 2020^{2018} = 2018^2 \cdot 2018^{2018} \cdot 2020^{2018} =$$

$$= 2018^2 \cdot (2019 - 1)^{2018}(2019 + 1)^{2018} = 2018^2 \cdot (2019^2 - 1)^{2018}.$$

Тогда, $2018^2 \cdot (2019^2 - 1)^{2018} < 2019^2 \cdot 2019^{2\cdot 2018}$, где

$$2019^2 \cdot 2019^{2\cdot 2018} = 2019^{2+2\cdot 2018} = 2019^{2\cdot 2019} = B.$$

Следовательно, $A < B$.

Что требовалось доказать.

Задача 3. (15 баллов)
Наудачу выбирают число a из $[-6; 6]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня.
Решение.
Найдем возможные значения параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 2(a+1) > 0; \end{cases} \begin{cases} 8a + 40 > 0, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a + 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} a > -5, \\ (a-3)(a+3) > 0, \\ a > -1; \end{cases} a \in [3; +\infty).$$

Так как по условию число a выбирают из промежутка $[-6;6]$, то $a \in [3;6]$. Вероятность того, что уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня, равна отношению длины промежутка $[3;6]$ к длине промежутка $[-6;6]$, т.е. вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Задача 4. (20 баллов) Найти все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $y \geq -\frac{x}{4}$.

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \dfrac{x}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ -x^2 - 3xy - y^2 = 4y^2 + 2xy + \dfrac{x^2}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ y = -\dfrac{x}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} (2+\sqrt{3})^{-x} = (\sqrt{3})^{-x} + 2^{-x}, \\ y = -\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Поделив левую и правую части первого уравнения системы на $(2+\sqrt{3})^{-x} \neq 0$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x} + \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x} = 1.$$

Выражение слева есть сумма двух монотонно убывающих функций, значит данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень легко угадывается: $x = -1$. Тогда $y = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$**.**

Задача 5. (20 баллов)

Из города A в город B выехал курьер с корреспонденцией. Через 20 минут ему вдогонку отправили второго курьера. Он двигался со скоростью 45 км/ч. После встречи с коллегой второй курьер немедленно повернул обратно. К моменту прибытия первого курьера в город B, второй достиг лишь середины пути от места встречи до города A. С какой скоростью передвигался первый курьер, если расстояние между городами составляет 40 км.

Решение.

Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.

Изобразим графики равномерного движения курьеров в системе координат «путь-время» (рис. 1).

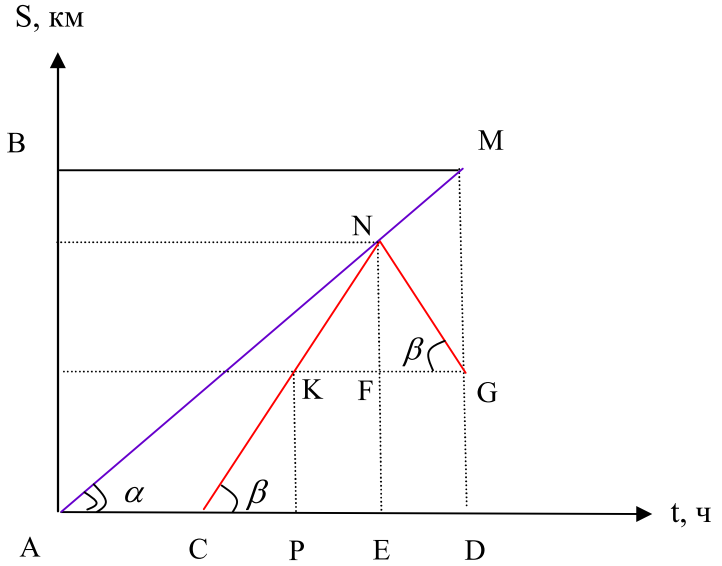


Рис. 1.

Пусть AM – график движения первого курьера из города A в город B со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

CN и NG – графики движения второго курьера из A до встречи и обратно со скоростью $V_2 = tg\beta = 45$ км/ч.

По условию задачи, промежуток времени $AC = 20\,\text{мин} = \frac{1}{3}$ ч. Промежуток времени CP определим из ΔCKP: $CP = \frac{KP}{tg\beta} = \frac{KP}{45}$. Так как движение курьеров равномерное, а $PK = FN$, то $CP = PE = ED$.

Тогда время движения первого курьера $AD{=}AC{+}3CP = \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}$, а его путь

$$AB = \left(\frac{1}{3} + \frac{3 \cdot KP}{45}\right)V_1 = 40.$$

Из ΔANE: $AE = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}$; $EN = 2 \cdot KP = AE \cdot tg\alpha = \left(\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot KP}{45}\right)V_1$.

Объединим полученные соотношения в систему:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{KP}{15}\right)V_1 = 40, \\ \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\cdot KP}{45}\right)V_1 = 2\cdot KP; \end{cases} \quad \begin{cases} (5+KP)V_1 = 600, \\ (15+2\cdot KP)V_1 = 90\cdot KP; \end{cases}$$

$$\begin{cases} KP=\dfrac{600}{V_1}-5, \\ \left(15+2\cdot\left(\dfrac{600}{V_1}-5\right)\right)V_1 = 90\cdot\left(\dfrac{600}{V_1}-5\right); \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$15V_1 + 2(600 - V_1) = 90\cdot\dfrac{600-5V_1}{V_1}$,

$15V_1^{\,2} + 2V_1(600-5V_1) = 90(600-5V_1)$,

$5V_1^{\,2} + 1650\cdot V_1 - 54000 = 0$,

$V_1^{\,2} + 330\cdot V_1 - 10800 = 0$,

$D = 330^2 + 4\cdot 10800 = 100(33^2 + 4\cdot 108) = 390^2$,

$V_1 = \dfrac{-330+390}{2} = 30$ км/ч, второй корень уравнения отрицательный и не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 30 км/ч.

Задача 6. (30 баллов)

Определить, какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости Oxy, расположенная между прямыми $x=-3$ и $x=1$, ограниченная снизу осью Ox, сверху касательной к графику функции $y=160-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания из промежутка $[-3;1]$.

Решение.

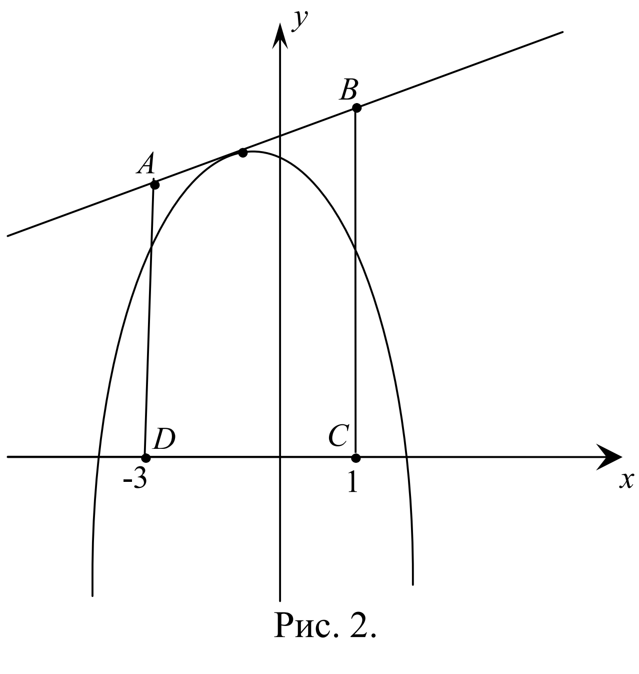


Рис. 2.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = 160 - x^4$ в точке с абсциссой x_0: $y_{кас} = -4x_0^3(x - x_0) + 160 - x_0^4$.
Точка $A(-3; a)$ – точка пересечения касательной и прямой $x = -3$ и $B(1; b)$ – точка пересечения касательной и прямой $x = 1$.
Подставим координаты этих точек в уравнение касательной и выразим a и b через x_0:
$a = -4x_0^3(-3 - x_0) + 160 - x_0^4 = 3x_0^4 + 12x_0^3 + 160$,
$b = -4x_0^3(1 - x_0) + 160 - x_0^4 = 3x_0^4 - 4x_0^3 + 160$.
Площадь трапеции $ABCD$ (рис.2): $S = \dfrac{4(a+b)}{2} = 2(6x_0^4 + 8x_0^3 + 320)$.
Найдем экстремумы полученной функции в промежутке $[-3; 1]$: $S' = 2(24x_0^3 + 24x_0^2)$. Определим нули производной: $2(24x_0^3 + 24x_0^2) = 0$, $x_0^2(x_0 + 1) = 0$, $x_0 = -1$.
Так как на интервале $(-3; -1)$ верно неравенство $S'(x_0) < 0$, а в интервале $(-1; 0)$ верно неравенство $S'(x_0) > 0$, то $x_0 = -1$ единственная точка минимума в интервале $(-3; 1)$. Следовательно, $S_{\min} = S(-1) = 636$.

Ответ. 636.