

**Математика. 9 класс**

**Вариант 12**

**Задача 1.** (5 баллов) Найти значение выражения  при , если

.

**Решение.**

Упростим выражение .





.

Если , то .

**Ответ.** .

**Задача 2.** (10 баллов) Найти два различных корня  уравнения , если числа  образуют геометрическую прогрессию.

**Решение.**

По теореме Виета:

Пусть  – знаменатель геометрической прогрессии, тогда .

Система примет вид  

Так как  первый член геометрической прогрессии, то  не подходит по смыслу.

Если , то , .

Если , то .

Если , то .

**Ответ.**  или .

**Задача 3.** (15 баллов) Среднее арифметическое двух положительных чисел *p* и *q* в *m* раз больше их среднего гармонического. Доказать, что



**Решение.** Пусть *p* > *q.* По условию задачи имеем:

,  , , .

Очевидно, что .

Тогда , .

При условии , .



**Что и требовалось доказать.**

**Задача 4**. (20 баллов) Точка  лежит на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника . Точка  принадлежит продолжению катета , причем угол  прямой. Площадь треугольника  составляет  площади треугольника . Определить, в какой пропорции точка  делит сторону .

**Решение.**

*A*

*B*

*C*

*N*

*M*

Треугольник  равнобедренный, поэтому.

Тогдатоже равнобедренный и .

Обозначим . По теореме Пифагора из :

, .

По условию ,

, .

Тогда, , ,  и . Корень  не подходит, т.к. и .

. Таким образом, .

**Ответ:** 5:1.

**Задача 5**. (20 баллов) Найти все целые значения переменной *x*, при которых значение  удовлетворяет неравенству:

.

**Решение.**

Подставим в неравенство значение . Таким образом, получим неравенство:

,

,

,

.

Решим методом интервалов.

–10

0,8

**+**

**–**

**+**

Таким образом,  и принимает целые значения: –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0.

**Ответ:** –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0**.**

**Задача 6.** (30 баллов) На школьную елку привезли новогодние подарки четырех видов. Каждый школьник должен был получить один подарок. Ребята сами выбирали подарки. Оказалось, что число выбранных подарков каждого вида равно цене в рублях одного подарка этого же вида. Число выбранных подарков второго вида больше числа выбранных подарков первого вида на столько, насколько число выбранных подарков четвертого вида больше числа выбранных подарков третьего вида. Подарков первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем подарков второго и четвертого видов. За выбранные школьниками подарки уплатили 420 руб. Определить, сколько школьников присутствовало на елке.

**Решение**.

Пусть *x* шт. – количество подарков первого вида, *y* шт. – второго вида, *z* шт. – третьего вида и *u* шт. – четвертого вида. По условию задачи составим систему:



Преобразуем систему:

Подставим второе и третье уравнения в первое уравнение и преобразуем:





Число 208 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел единственным образом: . Тогда и . Следовательно  и .Тогда общее число школьников равно общему числу подарков, т.е. .

**Ответ.** **40**.



**Математика. 10 класс**

**Вариант 12**

**Задача 1.** (5 баллов) Найти значение выражения  при , , если .

**Решение**.

Выполним преобразования выражения .



.

При , , получим: .

**Ответ. 2019**.

**Задача 2.** (10 баллов) В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35млн 650 тыс. т. Определить, сколько всего лет разрабатывалось месторождение.

**Решение.**

Пусть  – число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто

 тыс. т нефти.

И это составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы  члена геометрической прогрессии, получим уравнение:

, ,

, .

Тогда общее количество лет будет равно 15.

**Ответ. 15.**

**Задача 3.** (15 баллов) Найти все целые значения переменной *x*, при которых значение  удовлетворяет неравенству:

.

**Решение.**

Подставим в неравенство значение . Таким образом, получим неравенство:

,

,

,

.

Решим методом интервалов

–10

0,8

**+**

**–**

**+**

Таким образом,  и принимает целые значения: –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0.

**Ответ:** –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0**.**

**Задача 4.** (20 баллов)Определить, при каком значении  область определения функции  состоит из одной точки.

**Решение.**

Функция определена на множестве:

Для того, чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы парабола  либо имела единственный корень, не превосходящий 1, либо имела 2 корня, меньший из которых был бы равен 1. Эти условия выполнимы, если

 или 

Здесь  – дискриминант квадратного выражения, а  – абсцисса вершины параболы.

1. ;

2.  ⇒∅.

**Ответ:** Решений нет.

**Задача 5.** (20 баллов)На школьную елку привезли новогодние подарки четырех видов. Каждый школьник должен был получить один подарок. Ребята сами выбирали подарки. Оказалось, что число выбранных подарков каждого вида равно цене в рублях одного подарка этого же вида. Число выбранных подарков второго вида больше числа выбранных подарков первого вида на столько, насколько число выбранных подарков четвертого вида больше числа выбранных подарков третьего вида. Подарков первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем подарков второго и четвертого видов. За выбранные школьниками подарки уплатили 420 руб. Определить, сколько школьников присутствовало на елке.

**Решение**.

Пусть *x* шт. – количество подарков первого вида, *y* шт. – второго вида, *z* шт. – третьего вида и *u* шт. – четвертого вида. По условию задачи составим систему:



Преобразуем систему:

Подставим второе и третье уравнения в первое уравнение и преобразуем:





Число 208 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел единственным образом: . Тогда и . Следовательно  и .Тогда общее число школьников равно общему числу подарков, т.е. .

**Ответ.** **40**.

**Задача 6. (**30 баллов) Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 6см и центром в точке *Q* в точках *M, N* и P. Площадь треугольника *MNP* больше 36см2, площадь треугольника Δ*QNP* равна 9см2. Найти угол *NMP*.

**Решение.**

Так как радиусы *QM*, *QN* и *QP* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка – *QM*, *QN* и *QP –* лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью (рис.1).

По условию задачи *S*Δ*QNP* = 9, т.е.

.

Возможные значения  или . Рассмотрим возможные варианты.

1. Если , то  (рис.1) или  (рис.2), тогда

, что противоречит условию.

Рис.1

*M*

*N*

*Q*

*P*

*M*

*N*

*Q*

*P*

Рис.2

2. Если , то  (рис.3) или  (рис.4).

На рисунке 3 , что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором  представлен на рис.4.

Рис.3

*M*

*N*

*Q*

*P*

Рис.4

*M*

*N*

*Q*

*P*

**Ответ:** .



**Математика. 11 класс.**

**Вариант-12**

**Задача 1.** (5 баллов) Найти значение выражения  при , , если .

**Решение**.

Выполним преобразования выражения .



.

При , , получим: .

**Ответ. 2019**.

**Задача 2.** (10 баллов) Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что восьмая часть из них получила оценку «удовлетворительно», 60% получили оценку «хорошо», а 15 человек получили оценку «отлично». Отличники составляют более 5%, но менее 6% от искомого числа студентов.

**Решение.**

Если 15 человек – 5 %, то всего студентов .

Если 15 человек – 6 %, то всего студентов .

Значит, всего студентов было от 250 до 300 человек.

Это число должно делиться на 8, так как известно, что каждая 8 часть получила оценку «удовлетворительно» (256, 264, 272, 280, 288, 296).

Также 60% от общего числа студентов есть целое число, т.к. 60% получили оценку «хорошо», т.е. . Такое число одно – 280.

**Ответ. 280.**

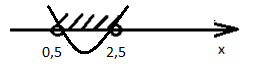
**Задача 3.** (15 баллов) Найти сумму корней уравнения

.

**Решение.**

ОДЗ: , ,





Таким образом, .

Далее решение сводится к решению двух уравнений:

, .

Решим первое уравнение: .

,

,



– не имеет решений, т.к. .

.

, .

Определим корни уравнения, входящие в промежуток  при разных значениях .

; ;

; .

Решим второе уравнение: .

, ,



Таким образом, получим 4 корня: ,

их сумма .

**Ответ: 6.**

**Задача 4.** (20 баллов) Три фермера продавали на рынке поштучно цыплят. Первый привез 14 цыплят, второй – 24, третий – 38 цыплят. Каждый продал часть товара утром, часть – вечером. Утренняя цена одного цыпленка у всех фермеров была одинаковая, вечерняя тоже, но более низкая. К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка у всех оказалась одинаковой: 1200 условных единиц (за утро и вечер). Найти суммарную утреннюю выручку всех фермеров в условных единицах.

**Решение.**

Пусть первый, второй и третий фермер продали утром

  цыплят соответственно.

Пусть также  () утренняя и вечерняя цены соответственно.

Так как дневная выручка у всех одинакова и равна 1200 (у.е.), то получаем

 (\*)

Вычитая из предыдущего уравнения следующее, получаем

.

Поделив уравнения, имеем .

Таким образом, .

Так как , то из последнего выражения получаем . Поэтому .

Подстав полученные значения в (\*), имеем:

.

Решая совместно эти уравнения, найдем: .

Окончательно находим общую утреннюю выручку

у.е.

**Ответ. 1980.**

**Задача 5. (**20 баллов) Три параллельные прямые касаются сферы радиуса 6см и центром в точке *Q* в точках *M, N* и P. Площадь треугольника *MNP* больше 36см2, площадь треугольника *QNP* равна 9см2. Найти угол *NMP*.

**Решение.**

Так как радиусы *QM*, *QN* и *QP* перпендикулярны заданным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка – *QM*, *QN* и *QP –* лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью (рис.1).

По условию задачи *S*ΔQ*NP* = 9, т.е.

.

Возможные значения  или . Рассмотрим варианты.

1. Если , то  (рис.1) или  (рис.2), тогда

, что противоречит условию.

Рис.1

*M*

*N*

*Q*

*P*

*M*

*N*

*Q*

*P*

Рис.2

2. Если , то  (рис.3) или  (рис.4).

На рисунке 3 , что также противоречит условию.

Таким образом, единственный вариант, при котором  представлен на рис.4.

Рис.3

*M*

*N*

*Q*

*P*

Рис.4

*M*

*N*

*Q*

*P*

**Ответ:** .

**Задача 6.** (30 баллов) Найти наименьшее значение функции

.

**Решение.**

Введем векторы  и . В соответствии с неравенством  найдем длины векторов:

, .

Найдем координаты суммы векторов и длину суммы: , .

Подставляем в неравенство и получаем:  то есть . Наименьшее значение функции будет тогда когда достигается знак равенства. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда , то есть когда

, , .

**Ответ.** Наименьшее значение функции равно 

достигается при 