**Математика. 9 класс**

**Вариант 22**

**Задача 1.** (5 баллов) Сумма цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

**Решение.**

Пусть искомое число имеет вид $10x+y$.

По условию $x+y=13$. Также, по условию $10x+y-9=10y+x$, то есть $x-y-1=0$.

Решив полученную систему $\begin{cases} x+y=13, \\ x-y=1; \end{cases}$,

получим $x=7,\ y=6$.

**Ответ: 76.**

**Задача 2.** (10 баллов) Решить уравнение

$$\frac{|3x-2|+6}{3x-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}(4x^{-1}+9x-12)}=0.$$

**Решение.**

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} 3x-2\neq 0, \\ x\neq 0, \\ \frac{1}{x}(4x^{-1}+9x-12)\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{2}{3}, \\ \frac{9x^2-12x+4}{x^2}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{2}{3}, \\ \frac{(3x-2)^2}{x^2}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{2}{3}, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Тогда имеем, $\frac{|3x-2|+6}{3x-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}(4x^{-1}+9x-12)}=0$,

$$\frac{|3x-2|+6}{3x-2}\cdot\sqrt{\frac{(3x-2)^2}{x^2}}=0,$$

$$\frac{|3x-2|+6}{3x-2}\cdot\left|\frac{3x-2}{x}\right|=0,$$

$$|3x-2|+6=0,$$

$$|3x-2|=-6.$$

Таким образом, $x\in\varnothing$.

**Ответ.** $x\in\varnothing$.

**Задача 3.** (15 баллов) Найти значение выражения $A$, если

$$A=\left(\frac{1}{1919\cdot 1920}+\frac{1}{1920\cdot 1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)\cdot 19{,}20.$$

**Решение.**

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$A=\left(\frac{1}{1920\cdot 1921}+.\frac{1}{1921\cdot 1922}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)\cdot 19{,}20=$$

$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}+\frac{1}{1921}-\frac{1}{1922}+\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=$$

$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=\frac{2020-1920}{1920\cdot 2020}\cdot 19{,}20=\frac{100\cdot 1920}{1920\cdot 2020\cdot 100}=\frac{1}{2020}.$$

**Ответ.** $\frac{1}{2020}$.

**Задача 4.** (20 баллов) Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4,то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

**Решение.**

По условию:

числа $a,\ aq,\ aq^2$ образуют геометрическую прогрессию;

числа $a,\ aq,\ aq^2-4$ образуют арифметическую прогрессию;

числа $a,\ aq-1,\ aq^2-5$ образуют геометрическую прогрессию.

Используя свойство $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для арифметической прогрессии и свойство $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ для геометрической прогрессии, составим систему уравнений

$$\begin{cases} aq=\frac{a+aq^2-4}{2}, \\ (aq-1)^2=a\cdot\left(aq^2-5\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{a}=q^2-2q+1, \\ \frac{4}{a}=8q-20; \end{cases} \quad \begin{cases} q^2-10q+21=0, \\ \frac{1}{a}=2q-5; \end{cases} \quad \begin{cases} q_1=3, q_2=7, \\ a_1=1, a_2=\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Полученная система имеет два решения, и два набора чисел являются решением задачи:

Если $q=3$, то $a_1=1; a_2=3; a_3=9$.

Если $q=7$, то $a_1=\frac{1}{9}, a_2=\frac{7}{9}, a_3=\frac{49}{9}$.

**Ответ.** $a_1=1; a_2=3; a_3=9$;

$a_1=\frac{1}{9}, a_2=\frac{7}{9}, a_3=\frac{49}{9}$.

**Задача 5.** (20 баллов) В первую неделю, с момента открытия магазина, продали товаров на сумму чуть меньше, чем 60% от суммы товарного запаса на складе; во вторую – на 25% от остатка и еще на 3000 руб. В третью неделю продали на 40% от нового остатка и еще на 1200 руб., после чего товаров на складе осталось на $\frac{6}{35}$ рублей от первоначальной суммы товарного запаса. Остатки товарного запаса (в руб.) к концу первой, второй и третьей недель образовали арифметическую прогрессию. Определить, на какую сумму был продан товар за три недели с момента открытия магазина.

**Решение.**

Пусть $x$ – стоимость товарного запаса на складе к моменту открытия магазина, а $y$ – разница между 60% от стоимость товарного запаса на складе к моменту открытия магазина и суммой проданного товарного запаса за первую неделю. Опишем стоимость остатков товарного запаса на складе к концу каждой недели по условиям задачи:

1 неделя: $0{,}4x + y$;

2 неделя: $0{,}75(0{,}4x + y) - 3000 = 0{,}3x + 0{,}75y - 3000$;

3 неделя: $0{,}6(0{,}3x + 0{,}75y - 3000) - 1200 = 0{,}18x + 0{,}45y - 3000$.

Учитывая, что последний остаток составил $\frac{6}{35}$ от первоначальной суммы товарного запаса, т.е.

$$0{,}18x + 0{,}45y - 3000 = \frac{6}{35}x,$$

а разница между стоимостью остатков товарного запаса третьей и второй, второй и первой неделями одинакова (по свойству членов арифметической прогрессии), составим уравнение

$$(0{,}18x + 0{,}45y - 3000) - (0{,}3x + 0{,}75y - 3000) = (0{,}3x + 0{,}75y - 3000) - (0{,}4x + y).$$

Объединим уравнения в систему и решим ее.

$$\begin{cases} \frac{1}{350}x + \frac{3}{20}y = 1000, \\ \frac{1}{50}x + \frac{1}{20}y = 3000; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 105y = 700000, \\ 2x + 5y = 300000; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 140000, \\ y = 3000. \end{cases}$$

Тогда с момента открытия магазина товаров продано на:

$$\left(1 - \frac{6}{35}\right)x = \frac{29}{35} \cdot 140000 = 116000 \text{ (руб.)}$$

**Ответ.** 116000 руб.

**Задача 6.** (30 баллов) Внутри прямого угла дана точка М, расстояния от которой до сторон угла равны 2 и 8 см. Прямая, проходящая через точку М, отсекает от прямого угла треугольник площадью 50 см$^2$. Найти катеты треугольника.

**Решение.**

Возможны два случая (рис.1 и рис.2)

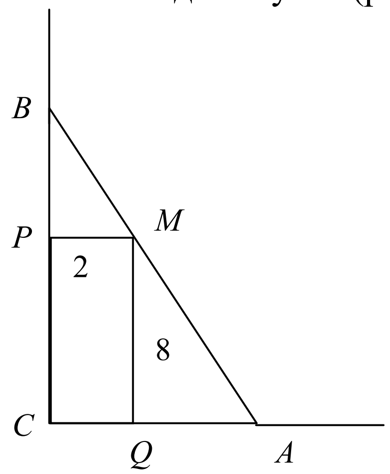



Рис.1.

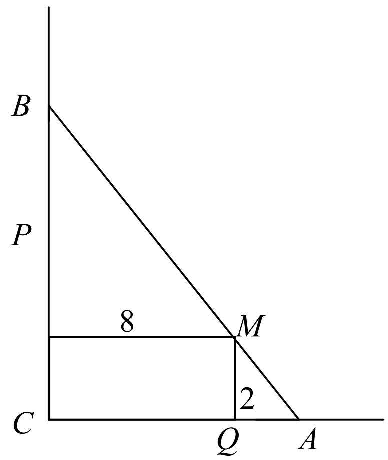



Рис. 2.

Пусть $BC = x,\ AC = y$. Тогда $0{,}5xy = 50$, то есть $xy = 100$.

Так как $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, то $\dfrac{MP}{AQ} = \dfrac{BP}{MQ}$ или $\dfrac{2}{y-2} = \dfrac{x-8}{8}$.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y-2} = \dfrac{x-8}{8}, \\ xy = 100; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 50y + 400 = 0, \\ x = \dfrac{100}{y}. \end{cases}$$

Решая уравнение $y^2 - 50y + 400 = 0$, получим $y_1 = 2{,}5$, $y_2 = 10$.

Тогда, $x_1 = 40$, $x_2 = 10$.

Получим

1) $x_1 = 40\,см,\ y_1 = 2{,}5\,см$;

2) $x_2 = 10\,см,\ y_2 = 10\,см$.

**Ответ.** $x_1 = 40\,см,\ y_1 = 2{,}5\,см$;
$x_2 = 10\,см,\ y_2 = 10\,см$.

**Задача 1.** (5 баллов) Найти значение выражения $A$, если

$$A=\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{4})^2+\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}}-\sqrt[6]{25}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{1}.$$

**Решение**.

$$A=\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{4})^2+\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}}-\sqrt[6]{25}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{1}=$$

$$=\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{3\cdot 16}++\frac{1}{\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}-\sqrt[6]{5^2}+\sqrt[6]{4^2}+1=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}{4-5}-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}+1=1.$$

**Ответ.** 1.

**Задача 2.** (10 баллов) Доказать, что $A<B$, если

$$A=\frac{\cos 2018^0}{\cos 2019^0},\quad B=\frac{\cos 2020^0}{\cos 2021^0}.$$

**Решение.**

Найдем разность $A$ и $B$.

$$A-B=\frac{\cos 2018^0}{\cos 2019^0}-\frac{\cos 2020^0}{\cos 2021^0}=\frac{\cos 38^0}{\cos 39^0}-\frac{\cos 40^0}{\cos 41^0}=$$

$$=\frac{\cos 38^0\cos 41^0-\cos 40^0\cos 39^0}{\cos 39^0\cos 41^0}=$$

$$=\frac{\cos 3^0+\cos 79^0-\cos 1^0-\cos 79^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}=\frac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}.$$

Так как $\cos 3^0<\cos 1^0$, то $\dfrac{\cos 3^0-\cos 1^0}{2\cos 39^0\cos 1^0}<0$.

Таким образом, $A-B<0$, $A<B$.

**Что требовалось доказать.**

**Задача 3.** (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}+8+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{7}{2}, \\ |x-y|=3. \end{cases}$$

**Решение.**

Рассмотрим первое уравнение $\sqrt{\dfrac{y}{x}+8+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{7}{2}$.

Так как справа стоит положительная величина, то просто возводим в квадрат обе части: $\dfrac{y}{x}+8+\dfrac{x}{y}=\dfrac{49}{4}$. Делаем замену, $\dfrac{y}{x}=t\neq 0$.

Тогда $t+8+\dfrac{1}{t}=\dfrac{49}{4}$.

Получим квадратное уравнение $4t^2-17t+4=0$.

Корни уравнения: $t_1=4, t_2=\dfrac{1}{4}$.

Возвращаемся к исходной системе, она равносильна совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=4, \\ |x-y|=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=4x, \\ |-3x|=3; \end{cases}$ $x_{1,2}=\pm 1, y_{1,2}=\pm 4$.

Таким образом, получим два решения $(1;4)$ и $(-1;-4)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}, \\ |x-y|=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{x}{4}, \\ \left|-\dfrac{3x}{4}\right|=3; \end{cases}$ $x_{1,2}=\pm 4, y_{1,2}=\pm 1$.

Таким образом, получим еще два решения $(4;1)$ и $(-4;-1)$.

**Ответ.** $(1;4),(-1;-4),(4;1),(-4;-1)$.

**Задача 4.** (20 баллов) Числа, равные произведениям первого члена арифметической прогрессии на второй, второго на третий и третьего на первый в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

**Решение.**

Обозначим члены арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3$, ее разность $d$; члены геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3$, ее знаменатель $q$. Запишем условия задачи, используя введенные обозначения

$b_1=a_1\cdot a_2=a_1(a_1+d)$,

$b_2=a_2\cdot a_3=(a_1+d)(a_1+2d)$,

$b_3 = a_1 \cdot a_3 = a_1(a_1 + 2d)$.

Тогда,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{(a_1+d)(a_1+2d)}{a_1(a_1+d)} = \frac{a_1+2d}{a_1} = 1 + \frac{2d}{a_1},$$

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_1(a_1+2d)}{(a_1+d)(a_1+2d)} = \frac{a_1}{a_1+d} = 1 - \frac{d}{a_1+d}.$$

Сравним полученные тождества:

$$1 + \frac{2d}{a_1} = 1 - \frac{d}{a_1+d}, \ \frac{2}{a_1} = -\frac{1}{a_1+d}, \ a_1 = -\frac{2}{3}d.$$

Найдем $q$:

$$q = 1 + \frac{2d}{a_1} = 1 + \frac{2d}{-\frac{2}{3}d} = -2.$$

**Ответ:** $-2$.

**Задача 5.** (20 баллов) Расстояние между точками $A$ и $B$ равно 270 м. Из точки $A$ в точку $B$, а затем сразу обратно двигается тело с равномерной скоростью. Второе тело выходит из $B$ на 11с позже первого и с меньшей скоростью. Оно встречается с первым телом два раза: через 10с и 40с после своего выхода из точки $B$. Определить с какой скоростью двигается второе тело.

**Решение.**

*Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.*

Изобразим графики равномерного движения тел в системе координат «путь-время» (рис.1).

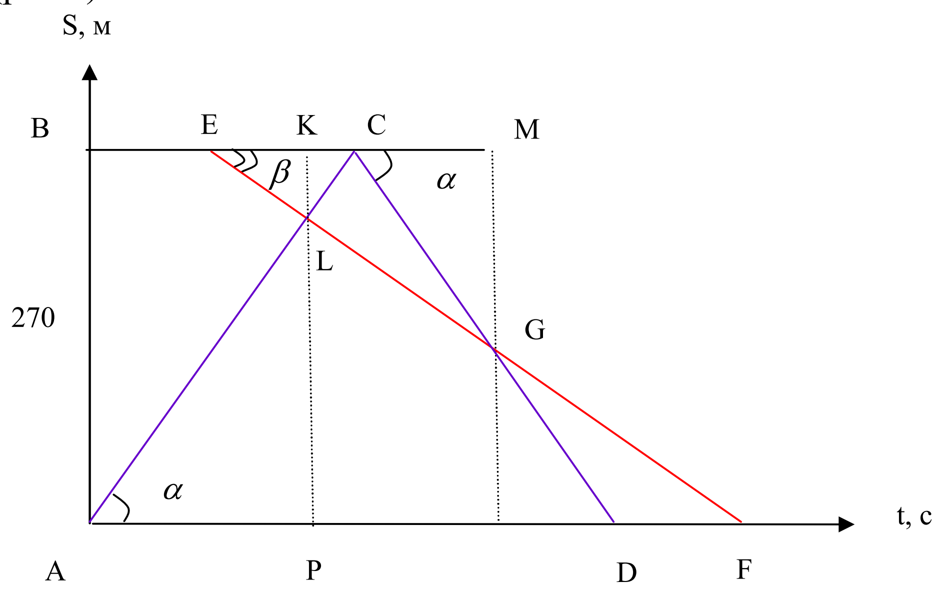



Рис.1.

Пусть $AC$ и $CD$ – графики движения первого тела из $A$ в $B$ и обратно со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

$EF$ – график движения второго тела из $B$ в $A$ со скоростью $V_2 = tg\beta$.

По условию задачи, промежутки времени $BE$ =11с, $EK$ =10с, $KM$ =30с, тогда $AP$ =11+10=21с.

Путь определим:

из $\Delta ALP$: $PL = AP \cdot tg\alpha = 21 \cdot V_1$;

из $\Delta EKL$: $KL = EK \cdot tg\beta = 10 \cdot V_2 MG$;

$PK = PL + LK = 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270$;

из $\Delta BMG$: $MG = (EK + KM) \cdot tg\beta = 40 \cdot V_2$.

Промежутки времени определим:

из $\Delta LKC$: $KC = \dfrac{LK}{tg\alpha} = \dfrac{10V_2}{V_1}$;

из $\Delta CMG$: $CM = \dfrac{MG}{tg\alpha} = \dfrac{40V_2}{V_1}$;

$KM = KC + CM = \dfrac{10 \cdot V_2}{V_1} + \dfrac{40 \cdot V_2}{V_1} = 30$.

Объединим полученные уравнения в систему

$$\begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270, \\ \dfrac{50 \cdot V_2}{V_1} = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot 0{,}6 \cdot V_1 = 270, \\ V_2 = 0{,}6 \cdot V_1; \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = 10, \\ V_2 = 6. \end{cases}$$

Так как скорость второго тела меньше первого, то оно имеет скорость $V = 6$ м/с.

**Ответ.** 6 м/с.

**Задача 6**. (30 баллов)

Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2} \cdot (\sin x - \cos x) \cdot \cos 8x - \cos 16x - 7}.$$

**Решение.**

Преобразуем формулу функции.

$$f(x)=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\cdot\cos 8x-\cos 16x-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{4(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)\cdot\cos 8x-(2\cos^2 8x-1)-7}=$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{4\sin(x-\frac{\pi}{4})\cdot\cos 8x-2\cos^2 8x-6}.$$

Обозначим $\sin(x-\frac{\pi}{4})=a,\ \ b=\cos 8x,\ \ |a|\le 1,\ \ |b|\le 1$, тогда имеем

$$f(a,b)=\frac{a}{4ab-2b^2-6}=\frac{a}{-2(b^2-2ab+a^2)-6+2a^2}=-\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}.$$

$$|f(a,b)|=\left|\frac{a}{2(b-a)^2+6-2a^2}\right|\le\left|\frac{a}{6-2a^2}\right|\le\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{4}\le f(a,b)\le\frac{1}{4}.$$

$f(a,b)=-\frac{1}{4}$ при $(b-a)^2=0$ и $a=1$, отсюда

$$\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1,\\ \cos 8x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 8x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\frac{\pi k}{4}, k\in Z;\end{cases}$$

$$x=\frac{3\pi}{4},\ \ f_{\min}=f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{4}$$

**Ответ.** $-\frac{1}{4}$.

**Математика. 11 класс**

**Вариант 22**

**Задача 1.** (5 баллов) Найти значение выражения $A$, если

$$A=\left(\frac{1}{1919\cdot 1920}+\frac{1}{1920\cdot 1921}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)\cdot 19{,}20.$$

**Решение.**

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$A=\left(\frac{1}{1920\cdot 1921}+.\frac{1}{1921\cdot 1922}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)\cdot 19{,}20=$$

$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{1921}+\frac{1}{1921}-\frac{1}{1922}\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=$$

$$=\left(\frac{1}{1920}-\frac{1}{2020}\right)\cdot 19{,}20=\frac{2020-1920}{1920\cdot 2020}\cdot 19{,}20=\frac{100\cdot 1920}{1920\cdot 2020\cdot 100}=\frac{1}{2020}.$$

**Ответ.** $\frac{1}{2020}$.

**Задача 2.** (10 баллов)

Дана функция $f(x)=\frac{2019+x}{2020-2x}$. Найти $2f(1)-2018f'(1)$.

**Решение.**

$$f'(x)=\left(\frac{2019+x}{2020-2x}\right)'=\frac{(2020-2x)-(-2)(2019+x)}{(2020-2x)^2}=$$

$$=\frac{2020+4038}{(2020-2x)^2}=\frac{6058}{(2020-2x)^2}.$$

$$f(1)=\frac{2019+1}{2020-2}=\frac{2020}{2018}.$$

$$f'(1)=\frac{6058}{(2020-2)^2}=\frac{6058}{2018^2}.$$

$$2f(1)-2018f'(1)=\frac{4040}{2018}-\frac{6058}{2018}=-\frac{2018}{2018}=-1.$$

**Ответ.** $-1$.

**Задача 3.** (15 баллов) Найти количество корней уравнения

$$5^{\frac{4\cos x+1}{3\cos x+2}}-4=5^{\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}},$$ принадлежащих отрезку $\left[-\pi,\frac{15\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

ОДЗ: $3\cos x + 2 \neq 0$, $x \neq \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$.

Выполним преобразования

$5^{\frac{4\cos x+1}{3\cos x+2}} = 5^{\frac{(3\cos x+2)+\cos x-1}{3\cos x+2}} = 5^{1-\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}} = 5\cdot 5^{-\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}}$.

Пусть $t = 5^{\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}}$, $t > 0$.

Тогда уравнение примет вид $5t^{-1} - 4 = t$, $t^2 + 4t - 5 = 0$, $t_1 = -5, t_2 = 1$.

Корень $t_1 = -5$ не подходит, так как $t > 0$.

Тогда, $1 = 5^{\frac{1-\cos x}{3\cos x+2}}$, $\frac{1-\cos x}{3\cos x + 2} = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Тогда, промежутку $\left[-\pi, \frac{15\pi}{2}\right]$, учитывая ОДЗ, принадлежат корни:

$0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi$, т.е. промежутку $\left[-\pi, \frac{15\pi}{2}\right]$ принадлежит 4 корня.

**Ответ.** 4.

**Задача 4.** (20 баллов) Газопровод разбит на несколько участков. На каждом участке работает одинаковое число работников. Известно, что число работников находящихся на одном участке, превышает число участков на 12. Когда 15 человек пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, число работников на первом участке стало равным числу работников, оставшихся на всех остальных участках. Определить число участков газопровода.

**Решение.**

Обозначим за $n$ число участков, а за $k$ – число работников, работающих первоначально на каждом участке. Исходя из условий задачи, получим систему:

$$\begin{cases} k - n = 12, \\ k + 15 = (n-1)(k-15), \\ k > 15, n, k \in N; \end{cases} \quad \begin{cases} n = k - 12, \\ k + 15 = (k - 12 - 1)(k-15), \\ k > 15, n, k \in N. \end{cases}$$

Решим эту второе уравнение системы.

$k + 15 = (k-13)(k-15)$,

$k + 15 = k^2 - 28k + 195$,

$k^2 - 29k + 180 = 0$,

$k_1 = 9$, $k_2 = 20$.

Так как по условию $k > 15$, то $k = 20$ и $n = 8$. Таким образом, газопровод разбит на 8 участков.

**Ответ. 8.**

**Задача 5.** (20 баллов) Расстояние между точками $A$ и $B$ равно 270 м. Из точки $A$ в точку $B$, а затем сразу обратно двигается тело с равномерной скоростью. Второе тело выходит из $B$ на 11с позже первого и с меньшей скоростью. Оно встречается с первым телом два раза: через 10с и 40с после своего выхода из точки $B$. Определить с какой скоростью двигается второе тело.

**Решение.**

*Замечание. Приведено одно из возможных решений задачи. Участники заключительного тура олимпиады могут предложить другой, правильный и обоснованный, ход решения задачи и получить правильный ответ.*

Изобразим графики равномерного движения тел в системе координат «путь-время» (рис.1).

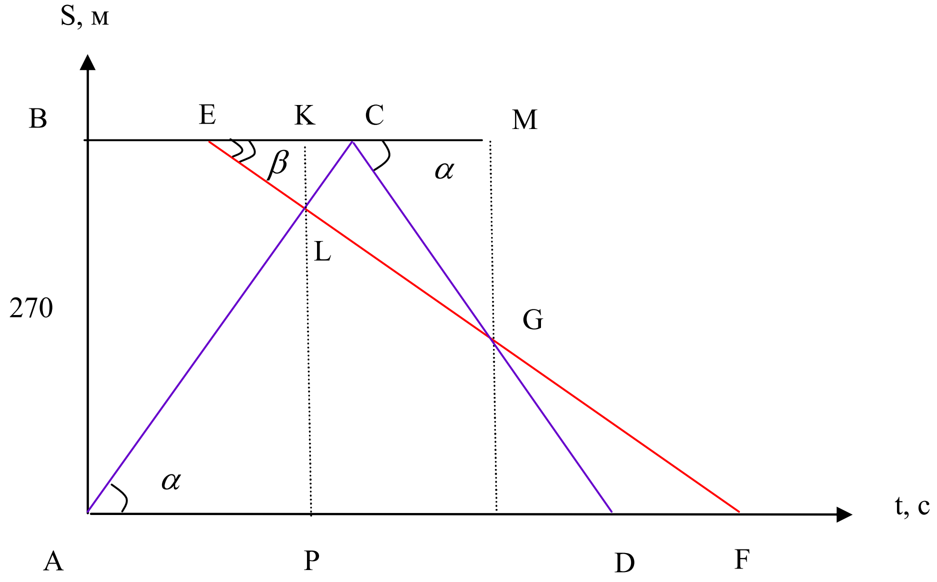



Рис.1.

Пусть $AC$ и $CD$ – графики движения первого тела из $A$ в $B$ и обратно со скоростью $V_1 = tg\alpha$;

$EF$ – график движения второго тела из $B$ в $A$ со скоростью $V_2 = tg\beta$.

По условию задачи, промежутки времени $BE$ =11с, $EK$ =10с, $KM$ =30с, тогда $AP$=11+10=21с.

Путь определим:

из $\Delta ALP$: $PL = AP \cdot tg\alpha = 21 \cdot V_1$;

из $\Delta EKL$: $KL = EK \cdot tg\beta = 10 \cdot V_2 MG$;

$PK = PL + LK = 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270$;

из $\Delta BMG$: $MG = (EK + KM) \cdot tg\beta = 40 \cdot V_2$.

Промежутки времени определим:

из $\Delta LKC$: $KC = \dfrac{LK}{tg\alpha} = \dfrac{10V_2}{V_1}$;

из $\Delta CMG$: $CM = \dfrac{MG}{tg\alpha} = \dfrac{40V_2}{V_1}$;

$$KM = KC + CM = \frac{10 \cdot V_2}{V_1} + \frac{40 \cdot V_2}{V_1} = 30.$$

Объединим полученные уравнения в систему

$$\begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot V_2 = 270, \\ \dfrac{50 \cdot V_2}{V_1} = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 21 \cdot V_1 + 10 \cdot 0{,}6 \cdot V_1 = 270, \\ V_2 = 0{,}6 \cdot V_1; \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = 10, \\ V_2 = 6. \end{cases}$$

Так как скорость второго тела меньше первого, то оно имеет скорость $V = 6$ м/с.

**Ответ.** 6 м/с.

**Задача 6.** (30 баллов) Найти радиус кругового конуса наибольшего объема, если площадь его боковой поверхности равна $S = \pi\sqrt{3}\,\text{см}^2$.

**Решение.**

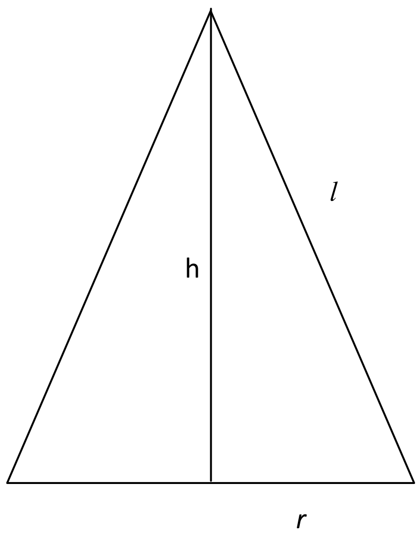
Изобразим осевое сечение конуса. Обозначим его высоту $h$, образующую $l$, а радиус основания $r$.

Теорема Пифагора связывает между собой эти три величины: $l^2 = h^2 + r^2$.

Площадь боковой поверхности конуса известна: $S = \pi r l = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$.

Отсюда

$$h = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 \cdot r^2} - r^2}.$$




Объем конуса выражается формулой:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} r\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}.$$

Необходимо подобрать такое значение $r$, объем $V(r)$ был наибольший. Продифференцируем это выражение

$$V'(r) = \frac{1}{3} \cdot \left( \sqrt{S^2 - \pi^2 r^4} + \frac{r(-4\pi^2 r^3)}{2\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}} \right) = \frac{S^2 - 3\pi^2 r^4}{3\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}}.$$

$V'(r) = 0$, т.е. $S^2 - 3\pi^2 r^4 = 0$, $r = \sqrt{\dfrac{S}{\sqrt{3}\pi}} = 1$.

Убедимся, что найден максимум функции проверкой знака производной.

Если $r < 1$, то $V'(r) > 0$, $V(r)$ возрастает;

Если $r > 1$, то $V'(r) < 0$, $V(r)$ убывает, значит $V_{\max}(1) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

**Ответ.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.