Математика. 9 класс

Вариант-31

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^8+1296}{36a^4}$, если $\dfrac{a}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{a}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 15 касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 6 и 3 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины *B* точкой касания.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Павлу Павловичу привезли на исследование объект объемом около 100 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 100 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\dfrac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\dfrac{9}{14}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n\geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n=\dfrac{x_{n-1}+298x_n+x_{n+1}}{300}$. Найти $\sqrt{\dfrac{x_{2023}-x_2}{2021}\cdot\dfrac{2022}{x_{2023}-x_1}}-2023$.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-3x-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}+5}\leq 0$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^8+1296}{36a^4}$, если $\dfrac{a}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{a}=5$.

Решение.

$$\frac{a^8+1296}{36a^4}=\frac{a^4}{36}+\frac{36}{a^4}=\frac{a^4}{36}+2+\frac{36}{a^4}-2=\left(\frac{a^2}{6}+\frac{6}{a^2}\right)^2-2=$$

$$=\left(\frac{a^2}{6}+2+\frac{6}{a^2}-2\right)^2-2=\left(\left(\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{a}\right)^2-2\right)^2-2=\left(5^2-2\right)^2-2=527.$$

Ответ. 527.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 15 касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 6 и 3 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины *B* точкой касания.

Решение.

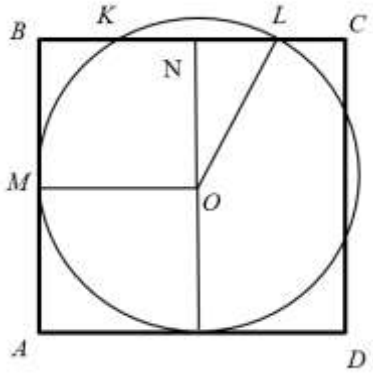

Рис. 1

Пусть $X-$искомый отрезок, тогда $X+15-$сторона квадрата. Отрезок $KL=15+X-6-3=X+6$. Рассмотрим ΔONL. По теореме Пифагора справедливо равенство:

$$15^2=X^2+\left(\frac{X+6}{2}\right)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно X, которое имеет только один положительный корень 12.

Ответ. 12.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Павлу Павловичу привезли на исследование объект объемом около 100 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 100 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой

нефти, равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Решение.

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{7}$, ближайшее к 100 число, которое делится на 7 – 98. Значит всего проб в контейнере 98. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (98:7=14) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 98:7·6=84. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{9}{14}$ от общего числа, то есть 63. Значит проб легкой высокосернистой нефти 21. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 14+21=35.

Ответ. 35.

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1} + 298x_n + x_{n+1}}{300}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} - 2023$.

Решение.

Из данного в условии задачи соотношения легко выводится, что для всех $n \geq 2$ $x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$, из чего следует, что последовательность является арифметической прогрессией. Действительно,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 298x_n + x_{n+1}}{300},$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1},$$

$$x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n.$$

Обозначим разность этой прогрессии d, $d \neq 0$ (по условию).

Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} - 2023 = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1 - d}{2021} \cdot \frac{2022}{x_1 + 2022d - x_1}} - 2023 =$

$= \sqrt{\frac{2021d}{2021} \cdot \frac{2022}{2022d}} - 2023 = 1 - 2023 = -2022$.

Ответ. -2022.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5} \leq 0$.

Решение.

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5} \leq 0$ имеет решение только если

$x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^3 - 6t + 5 = 0$, $t^3 - t - 5t + 5 = 0$, $(t-1)(t^2 + t - 5) = 0$, $t = 1$ или $t = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Уравнения $x + \frac{1}{x} = 1$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ не имеют корней.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$

$$x^2 + \frac{1+\sqrt{21}}{2}x + 1 = 0,$$

$$D = \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{2\sqrt{21}+6}{4} = \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{21}+6}}{2}\right)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{21} \pm \sqrt{2\sqrt{21}+6}}{4}.$$

Ответ. $\frac{-1-\sqrt{21} \pm \sqrt{2\sqrt{21}+6}}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

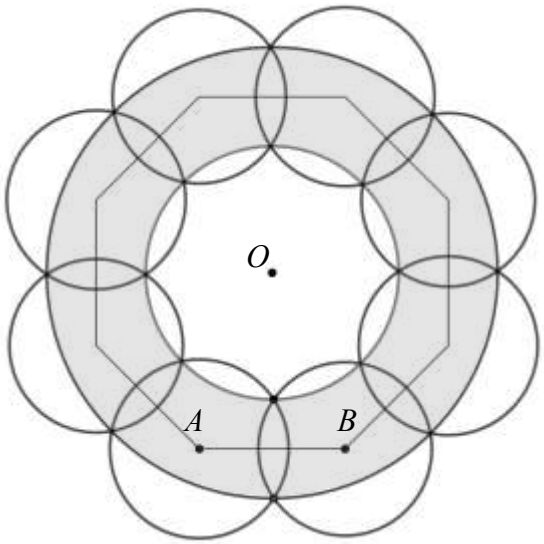

Рис. 2.

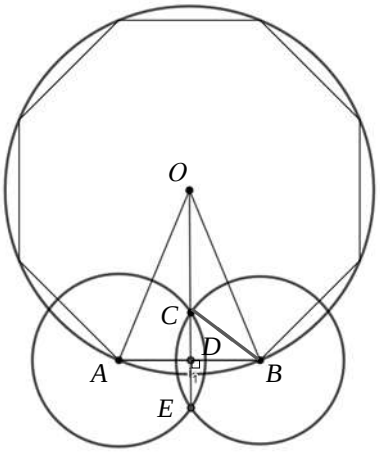

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

Тогда $AB = 30$, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)} = \frac{30}{2\sin 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ};$$

$$OC = OD - 8 = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 8;$$

$$OE = OD + 8 = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 8;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 8\right)^2 - \left(\frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 8\right)^2\right) = \frac{480\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}$; $\frac{480\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}$.