**Математика. 9 класс.**

**Вариант-21**

---

**Задание 1.** (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}.$$

**Задание 2.** (10 баллов) В треугольнике *ABC* со сторонами *AB* = 8, *AC* = 4, *BC* = 6 проведена биссектриса *AK*, а на стороне *AC* отмечена точка *M* так, что *AM*:*CM* = 3:1. Точка *N* – точка пересечения *AK* и *BM*. Найти *AN*.

**Задание 3.** (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Ивану Ивановичу привезли на исследование объект объемом около 300 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 300 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

**Задание 4. (20 баллов)** Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}>\left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}.$$

**Задание 5. (20 баллов)** Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_3}+3}\le 0$.

**Задание 6.** (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

**Математика. 9 класс.**

**Вариант-21. Решение**

---

**Задание 1.** (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}.$$

**Решение.**

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}=$$

$$=\left(\frac{10001}{2023\cdot 10001}-\frac{10001}{2022\cdot 10001}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{2022^2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{2022}=\frac{2022-2023}{2022\cdot 2023}\cdot 2023+\frac{1}{2022}=-\frac{1}{2022}+\frac{1}{2022}=0$$

**Ответ.** 0.

**Задание 2.** (10 баллов) В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = 8$, $AC = 4$, $BC = 6$ проведена биссектриса $AK$, а на стороне $AC$ отмечена точка $M$ так, что $AM:CM = 3:1$. Точка $N$ – точка пересечения $AK$ и $BM$. Найти $AN$.

**Решение.**

Проведем через точку $A$ прямую, параллельную прямой $BC$ и пересекающую прямую $BM$ в точке $L$ (рис. 1).

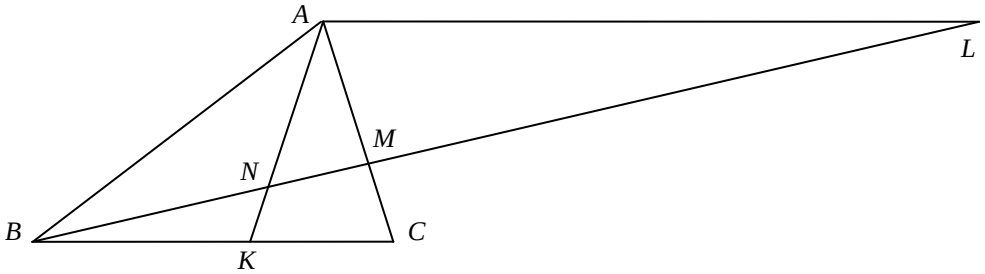


Рис. 1.

По свойству биссектрисы $\frac{BK}{CK}=\frac{AB}{AC}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{BK}{6-BK}=\frac{2}{1}\Rightarrow BK=4$

Рассмотрим подобные треугольники $AML$ и $CMB$: $\frac{AL}{BC}=\frac{AM}{MC}$.

Следовательно, $\frac{AL}{BC}=3$, $AL=3BC=18$.

Рассмотрим подобные треугольники $LAN$ и $BKN$: $\frac{AN}{NK}=\frac{AL}{BK}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$.

Длина биссектрисы составляет

$AK=\sqrt{AB\cdot AC-BK\cdot CK}=\sqrt{8\cdot 4-4\cdot 2}=2\sqrt{6}$.

$AN=\frac{9}{11}AK=\frac{18\sqrt{6}}{11}$

**Ответ.** $\frac{18\sqrt{6}}{11}$.

**Задание 3.** (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Ивану Ивановичу привезли на исследование объект объемом около 300 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 300 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

**Решение.**

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$, ближайшее к 300 число, которое делится на 8 – 296. Значит всего проб в контейнере 296. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (296:8=37) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 296:8·7=259. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{22}{37}$ от общего числа, то есть 176. Значит проб легкой высокосернистой нефти 83. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 37+83=120.

**Ответ.** 120.

**Задание 4.** (20 баллов) Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}.$$

**Решение.**

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}$$

Перейдем к равносильному неравенству

$$27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n > 72,$$

$$27\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 72,$$

$$\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > \frac{8}{3}$$

Левая часть неравенства представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} > \frac{8}{3},\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > \frac{8}{9},\ \frac{1}{9} > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\ \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{6}.$$

Найдем наименьшее значение $n$, для которого выполняется это неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = \frac{32}{162} = \frac{1}{6}\cdot\frac{32}{27} > \frac{1}{6},\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = \frac{64}{486} = \frac{1}{6}\cdot\frac{64}{81} < \frac{1}{6}.$$

Таким образом, наименьшее натуральное значение $n=5$.

**Ответ.** 5.

**Задание 5. (20 баллов)** Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+3}\le 0$.

**Решение.**

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+3}\le 0$ имеет решение только если $x^3-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+3=0$.

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $t^3-4t+3=0$, $t^3-t-3t+3=0$, $(t-1)(t^2+t-3)=0$, $t=1$ или $t=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Уравнения $x+\frac{1}{x}=1$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ не имеют корней.

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1=0,$$

$$D=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2-4=\frac{2\sqrt{13}-2}{4}=\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{2}\right)^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{13}\pm\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}.$$

**Ответ.** $\frac{-1-\sqrt{13}\pm\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}$.

**Задание 6.** (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса $r$=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

**Решение.**

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка $O$ – центр нефтяной платформы, а точки $A$ и $B$ – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta BCD$ по теореме Пифагора найдем $BD$:

$$BD=\sqrt{41^2-9^2}=40.$$

Тогда $AB$ = 80, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного семиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{80}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{40}{\sin\left(180/7\right)}.$$

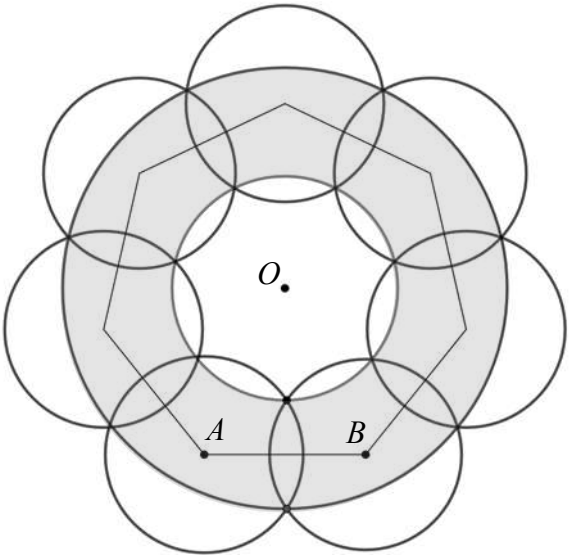


Рис. 2.

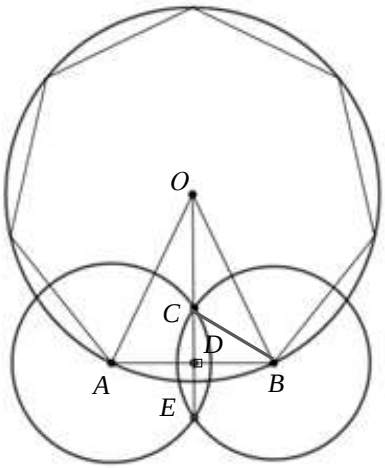


Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом $OE$ вычесть площадь круга с радиусом $OC$.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} = \frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)};$$

$$OC = OD - 9 = \frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 9;$$

$$OE = OD + 9 = \frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 9;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 9\right)^2 - \left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 9\right)^2\right) = \frac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$$

**Ответ.** $\dfrac{40}{\sin\left(180/7\right)}; \dfrac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$