**Математика. 10-11 класс.**

**Вариант-31**

---

**Задание 1.** (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{3}{a^2}=4$.

**Задание 2.** (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $6-2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**Задание 3**. (15 баллов) Решить уравнение $4x-x^2+\sqrt{\left(9-x^2\right)\left(-7+8x-x^2\right)}=7$.

**Задание 4. (20 баллов)** Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

**Задание 5. (20 баллов)** Точку случайно бросают на отрезок [6; 10] и пусть *k* – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2-3k-10\right)x^2+\left(3k-8\right)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

**Задание 6. (30 баллов)** При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ xy+yz+xz=-22. \end{cases}$$

Найти длину троса.

**Задание 1.** (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{3}{a^2}=4$.

**Решение.**

$$\frac{a^{12}-729}{27a^6}=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}+1+\frac{9}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}-2+\frac{9}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)^2+3\right)=4\cdot\left(4^2+3\right)=76$$

**Ответ.** 76.

**Задание 2.** (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $6-2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**Решение.**

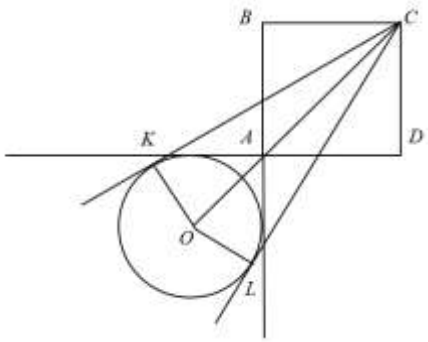



Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной $6-2\sqrt{5}$ см. Тогда $OA=\sqrt{2}\left(6-2\sqrt{5}\right)$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 18^\circ}=\dfrac{4\left(6-2\sqrt{5}\right)}{(\sqrt{5}-1)}$, диагональ квадрата *ABCD* $AC=\dfrac{4\left(6-2\sqrt{5}\right)}{(\sqrt{5}-1)}-\sqrt{2}\left(6-2\sqrt{5}\right)$, а сторона квадрата $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}-\left(6-2\sqrt{5}\right)=(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)$.

**Ответ.** $(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)$.

**Задание 3**. (15 баллов) Решить уравнение $4x-x^2+\sqrt{\left(9-x^2\right)\left(-7+8x-x^2\right)}=7$.

**Решение.**

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\left(9-x^2\right)\left(-7+8x-x^2\right)}=x^2-4x+7$.

$$\sqrt{(x-3)(x+3)(x-1)(x-7)} = x^2 - 4x + 7,$$

Перегруппируем множители $(x-3)(x-1)$ и $(x+3)(x-7)$, получим

$$\sqrt{(x^2-4x+3)(x^2-4x-21)} = x^2 - 4x + 7.$$

Пусть $x^2 - 4x + 3 = t$, тогда $x^2 - 4x - 21 = t - 24$, $x^2 - 4x + 7 = t + 4$, получим

$$\sqrt{t(t-24)} = t + 4,$$

$$\begin{cases} t + 4 \geq 0, \\ t(t-24) = (t+4)^2; \end{cases}$$

$$t = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 - 4x + 3 = -\frac{1}{2}.$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

**Ответ.** $\frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$.

**Задание 4. (20 баллов)** Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса $r$=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

**Решение.**

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

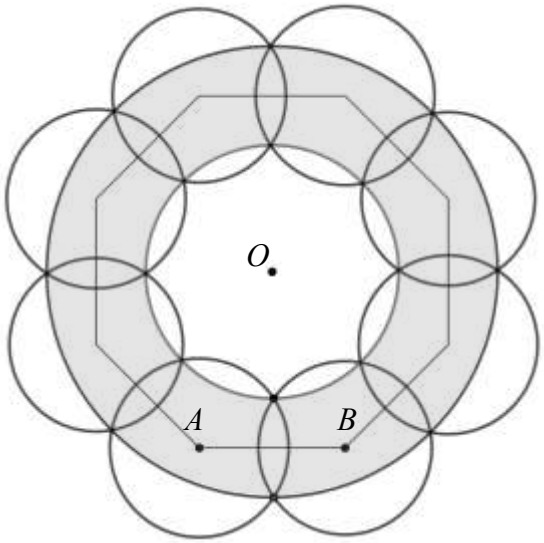



Рис. 2.

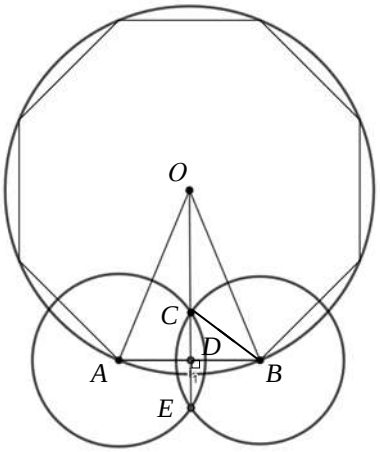



Рис. 3.

Точка $O$ – центр нефтяной платформы, а точки $A$ и $B$ – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 –$\Delta AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta BCD$ по теореме Пифагора найдем $BD$:

$BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

Тогда $AB$ = 30, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)} = \frac{30}{2\sin 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом $OE$ вычесть площадь круга с радиусом $OC$.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ};$$

$$OC = OD - 8 = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 8;$$

$$OE = OD + 8 = \frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 8;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 8\right)^2 - \left(\frac{15}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 8\right)^2\right) = \frac{480\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}.$$

**Ответ.** $\frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}; \frac{480\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}$.

**Задание 5. (20 баллов)** Точку случайно бросают на отрезок [6; 10] и пусть $k$ – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2 - 3k - 10)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

**Решение.**

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 - 3k - 10}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 3k - 10}. \end{cases}$$

Найдем значение $k$ при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

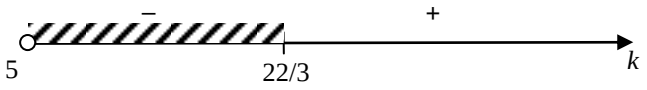
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 - 3k - 10}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 - 3k - 10}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{8 - 3k}{3(k^2 - 3k - 10)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 - 3k - 10}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(8 - 3k)^2}{9(k^2 - 3k - 10)^2} = \frac{1}{k^2 - 3k - 10};$$

Т.к. $k^2 - 3k - 10 > 0$ для $k \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(8 - 3k)^2}{9} = k^2 - 3k - 10,$$

$$9k^2 - 48k + 64 = 9k^2 - 27k - 90,\ 21k = \frac{22}{3},\ k = \frac{22}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение $k$, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.




Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{22}{3}$. Тогда $P = \frac{\frac{22}{3} - 6}{10 - 6} = \frac{1}{3}$.

**Ответ.** $\frac{1}{3}$.

**Задание 6. (30 баллов)** При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ xy + yz + xz = -22. \end{cases}$$

Найти длину троса.

**Решение.**

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 10^2 - 2 \cdot (-22). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 144. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $R = 12$ и плоскости $x + y + z = 10$, проходящей на расстоянии $d = \frac{10}{\sqrt{3}}$, что меньше 12, от центра сферы (рис. 4).

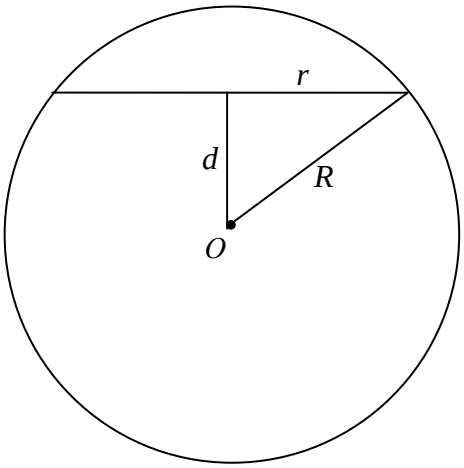



Рис.4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{144 - \frac{100}{3}} = 2\sqrt{\frac{83}{3}},$$

длина которой равна $l = 2\pi r = 4\pi\sqrt{\frac{83}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

**Ответ.** $4\pi\sqrt{\frac{83}{3}}$.