Математика. 10-11 класс.

Вариант-32

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-4096}{64a^6}$, если $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{4}{a^2}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 45°, и известно, что $\sin 22{,}5^\circ=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $5x-x^2+\sqrt{\left(16-x^2\right)\left(-9+10x-x^2\right)}=9$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [5; 7] и пусть *k* – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2-3k-4\right)x^2+\left(3k-7\right)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+yz+xz=14. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-32. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-4096}{64a^6}$, если $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{4}{a^2}=3$.

Решение.

$$\frac{a^{12}-4096}{64a^6}=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}+1+\frac{16}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}-2+\frac{16}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{16}-\frac{16}{a^2}\right)^2+3\right)=3\cdot\left(3^2+3\right)=36$$

Ответ. 36.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*, и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 45°, и известно, что $\sin 22{,}5^\circ=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Решение.

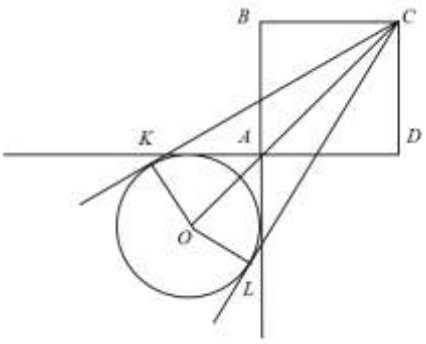


Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Тогда $OA=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$,

$OC=\dfrac{OK}{\sin 22{,}5^\circ}=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, тогда диагональ квадрата *ABCD*

$$AC=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

а сторона квадрата $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

Ответ. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $5x-x^2+\sqrt{\left(16-x^2\right)\left(-9+10x-x^2\right)}=9$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\left(16-x^2\right)\left(-9+10x-x^2\right)}=x^2-5x+9$.

$$\sqrt{(x-4)(x+4)(x-1)(x-9)}=x^2-5x+9,$$

Перегруппируем множители $(x-4)(x-1)$ и $(x+4)(x-9)$, получим

$$\sqrt{\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-4x-36\right)}=x^2-5x+9\,.$$

Пусть $x^2-5x+4=t$, тогда $x^2-4x-36=t-40$, $x^2-5x+9=t+5$, получим

$$\sqrt{t(t-40)}=t+5,$$

$$\begin{cases} t+5\ge 0, \\ t(t-40)=(t+5)^2; \end{cases}$$

$$t=-\frac{1}{2},$$

$$x^2-5x+4=-\frac{1}{2}.$$

$$2x^2-10x+9=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ. $\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{15^2-9^2}=12\,.$$

Тогда AB = 24, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)}=\frac{24}{2\sin 22{,}5^\circ}=\frac{12}{\sin 22{,}5^\circ}\,.$$

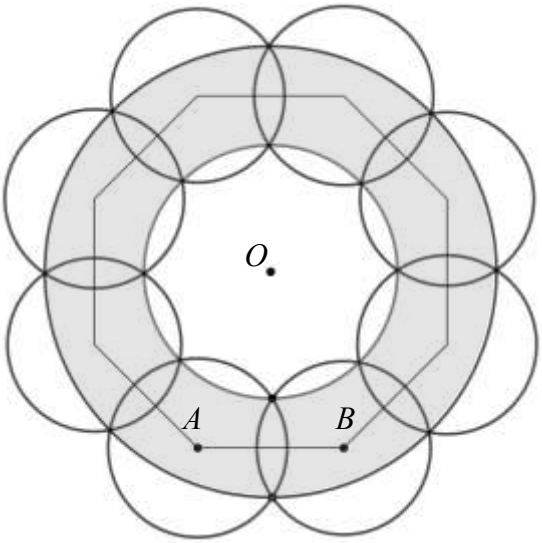


Рис. 2.

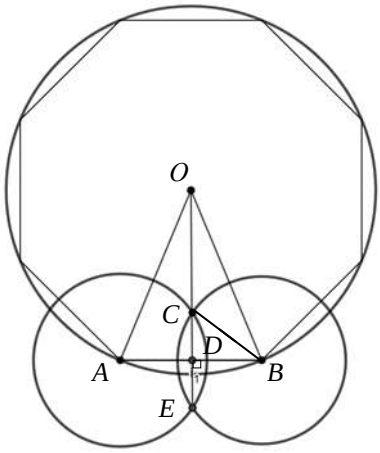


Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} = \frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ};$$

$$OC = OD - 9 = \frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 9;$$

$$OE = OD + 9 = \frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 9;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 9\right)^2 - \left(\frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 9\right)^2\right) = \frac{432\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\frac{12}{\sin 22{,}5^\circ}; \frac{432\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [5; 7] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 - 3k - 4}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 3k - 4}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

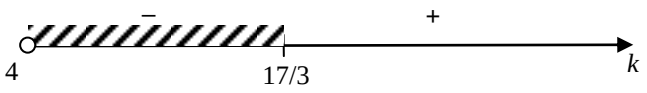
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 - 3k - 4}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 - 3k - 4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{7 - 3k}{3(k^2 - 3k - 4)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 - 3k - 4}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(7 - 3k)^2}{9(k^2 - 3k - 4)^2} = \frac{1}{k^2 - 3k - 4};$$

Т.к. $k^2 - 3k - 10 > 0$ для $k \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(7-3k)^2}{9} = k^2 - 3k - 4,$$

$9k^2 - 42k + 49 = 9k^2 - 27k - 36$, $15k = 85$, $k = \frac{17}{3}$.

Изобразим на числовой оси полученное значение *k*, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{17}{3}$. Тогда $P = \frac{17/3 - 5}{7-5} = \frac{1}{3}$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ xy + yz + xz = 14. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 8^2 - 2 \cdot 14. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $R = 6$ и плоскости $x + y + z = 8$, проходящей на расстоянии $d = \frac{8}{\sqrt{3}}$, что меньше 6, от центра сферы (рис. 4).

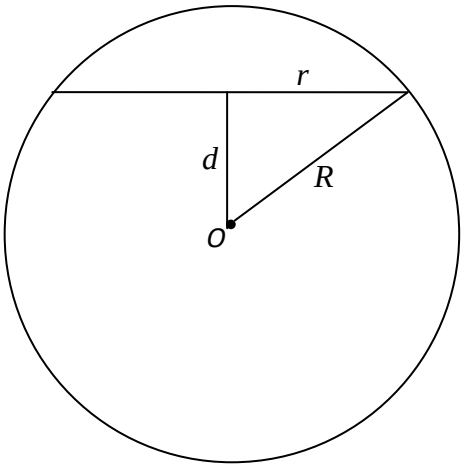


Рис. 4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - \frac{64}{3}} = 2\sqrt{\frac{11}{3}},$$

длина которой равна $l = 2\pi r = 4\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

Ответ. $4\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$.