Математика. 10-11 класс.

Вариант-12

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{a}=4$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной $6+2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-23y-25z=-681, \\ y^2-21x-21z=-419, \\ z^2-19x-21y=-313. \end{cases}$$

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11] и пусть *k* – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2-2k-24)x^2+(3k-8)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{2}-1$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{a}=4$.

Решение.

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}=\frac{a^6}{729}+\frac{729}{a^6}=\frac{a^6}{729}-2+\frac{729}{a^6}+2=\left(\frac{a^3}{27}-\frac{27}{a^3}\right)^2+2=$$

$$=\left(\frac{a^3}{27}-3\cdot\frac{a}{3}+3\cdot\frac{3}{a}-\frac{27}{a^3}+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=\left(4^3+3\cdot 4\right)^2+2=5778.$$

Ответ. 5778.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной $6+2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение.

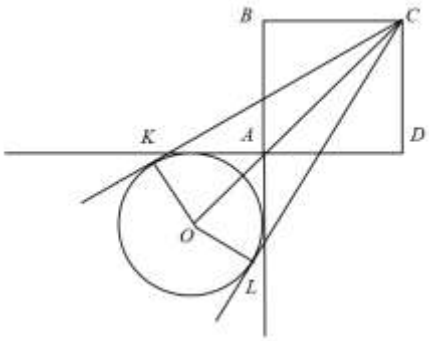


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата *ABCD* $AC=\sqrt{2}\left(6+2\sqrt{5}\right)$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной *R*. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 18^\circ}=\dfrac{4R}{\sqrt{5}-1}$. В результате получаем уравнение $\dfrac{4R}{\sqrt{5}-1}=R\sqrt{2}+8$, откуда $R=\dfrac{\sqrt{2}\left(6+2\sqrt{5}\right)}{\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)$.

Ответ. $2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 23y - 25z = -681, \\ y^2 - 21x - 21z = -419, \\ z^2 - 19x - 21y = -313. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению два других и выделим полные квадраты по каждой переменной:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x - 44y - 46z = -1413,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x - 44y - 46z + 1413 = 0,$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 - 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0,$$

$$(x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 = 0.$$

Следовательно, $x = 20$, $y = 22$, $z = 23$ единственное возможное решение. Проверим это подстановкой в уравнения системы:

$$\begin{cases} 20^2 - 23 \cdot 22 - 25 \cdot 23 = 400 - 506 - 575 = -681, \\ 22^2 - 21 \cdot 20 - 21 \cdot 23 = 484 - 420 - 483 = -419, \\ 23^2 - 19 \cdot 20 - 21 \cdot 22 = 529 - 380 - 462 = -313. \end{cases}$$

Ответ. $(20;22;23)$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

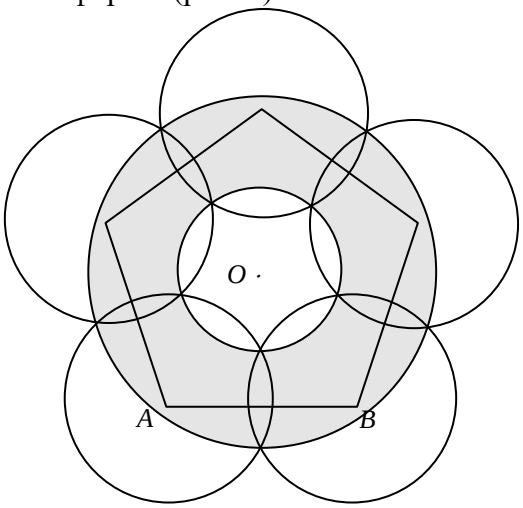


Рис. 2.

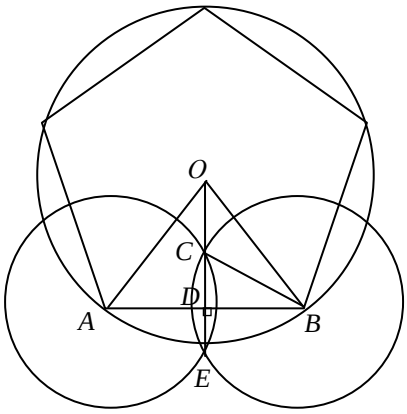


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 – ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$BD = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$.

Тогда AB = 48, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/5\right)} = \frac{48}{2\sin 36^\circ} = \frac{24}{\sin 36^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$OC = OD - 7 = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 7;$$

$$OE = OD + 7 = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 7;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 7\right)^2 - \left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 7\right)^2\right) = \frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Ответ. $\frac{24}{\sin 36^\circ}; \frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2 - 2k - 24\right)x^2 + \left(3k - 8\right)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 - 2k - 24}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 24}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

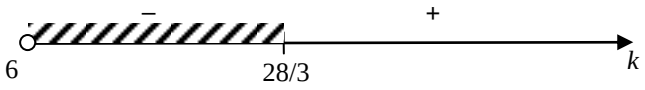
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 - 2k - 24}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 24}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{8 - 3k}{3\left(k^2 - 2k - 24\right)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 - 2k - 24}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(8 - 3k\right)^2}{9\left(k^2 - 2k - 24\right)^2} = \frac{1}{k^2 - 2k - 24};$$

Т.к. $k^2 - 2k - 24 > 0$ для $k \in \left(-\infty; -4\right) \cup \left(6; +\infty\right)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{\left(8 - 3k\right)^2}{9} = k^2 - 2k - 24,$$

$$9k^2 - 48k + 64 = 9k^2 - 18k - 216,\ 30k = 280,\ k = \frac{28}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{28}{3}$. Тогда $P = \frac{\frac{28}{3} - 6}{11 - 6} = \frac{1}{3}$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{2} - 1$.

Решение.

При таком расположении десяти одинаковых шаров центры *A, B, C, D* четырех из них расположены в вершинах правильного тетраэдра, а точки касания расположены на ребрах этого тетраэдра. Следовательно, ребро тетраэдра равно четырем радиусам этих шаров, радиус внешней сферы больше радиуса шара, описанного около тетраэдра на четверть длины ребра тетраэдра, а радиус внутреннего шара меньше расстояния от центра тетраэдра до его грани на эту же величину. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью *ABM* (рис. 3).

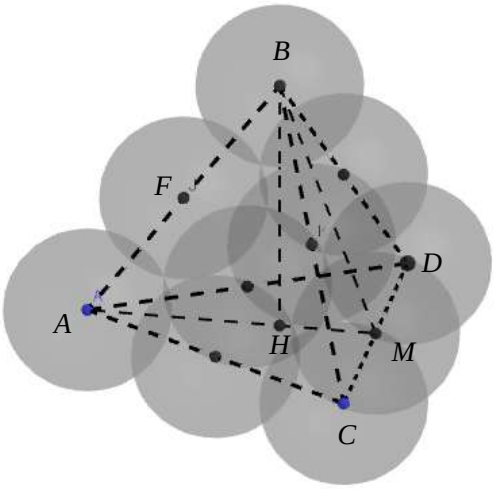


Рис. 2

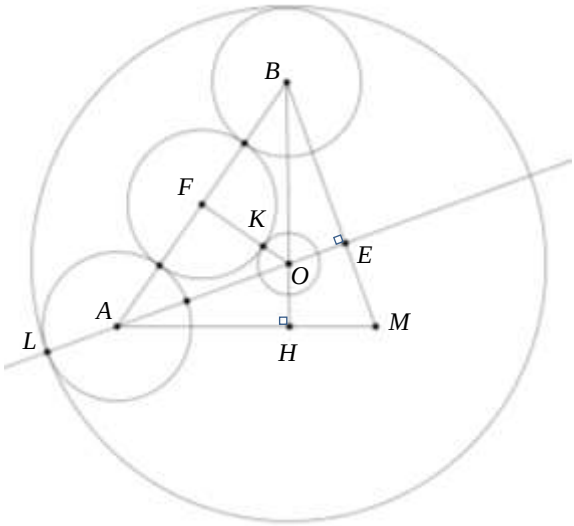


Рис. 3

Обозначим длину ребра тетраэдра – *a*, радиус сферы, описанной вокруг пирамиды из шаров – *R*, радиус шара, вписанного в центр пирамиды из шаров – *r*.

В треугольнике $\Delta\, ABM$: $AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $ME = MH = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$AH = BE = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$AE = BH = \sqrt{AM^2 - ME^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Из подобия треугольников $\Delta\, AEM$ и $\Delta\, AHO$ имеем $\frac{AO}{AM} = \frac{AH}{AE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2} AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

В треугольнике $\Delta\, ABO$: $S_{ABO} = \frac{AH \cdot BO}{2} = \frac{AB \cdot FO}{2} \Rightarrow FO = \frac{AH \cdot BO}{AB} = \frac{a^2\sqrt{18}}{12a} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $R = AO + AL = \frac{a\sqrt{6}}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{4}$; а $r = FO - FK = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$.

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(\sqrt{6}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right);\ R = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)r = \left(\sqrt{6}+1\right)$$

Ответ. $\left(\sqrt{6}+1\right)$.