Математика. 9 класс.

Вариант-12

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 60°.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Даше привезли на исследование объект объемом около 100 монолитов (контейнер, рассчитанный на 100 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Валя арендовал самокат. Саша и Валя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Сергей Владимирович. Автомобили поравнялись через 4 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя поравнялись на расстоянии 1 км от главного корпуса. Найти скорость автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 18 км на 1,4 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 6 раза меньше скорости автомобиля Сергей Владимирович. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Задание 5. (20 баллов)

Найти x_0+y_0, если x_0 и y_0 решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3-2023x=2023y-y^3-2020, \\ x^2-xy+y^2=2022. \end{cases}$$

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$.

Решение.

$$\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^4}{16}-\frac{16}{a^4}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^2+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)=\left(3^2+2\right)\cdot 3=33.$$

Ответ. 33.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 60°.

Решение.

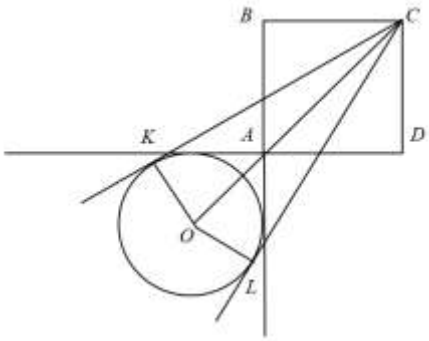

Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата *ABCD* $AC=4\sqrt{2}$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной *R*. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\frac{OK}{\sin 30°}=2R$. В результате получаем уравнение $2R=R\sqrt{2}+4\sqrt{2}$, откуда $R=4(\sqrt{2}+1)$.

Ответ. $4(\sqrt{2}+1)$.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Даше привезли на исследование объект объемом около 100 монолитов (контейнер, рассчитанный на 100 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит

окажется супесью равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Решение.

Определим точное число монолитов. Известно, что вероятность того, что монолит окажется супесью, равна $\frac{1}{7}$, ближайшее к 100 число, которое делится на 7 – 98. Значит всего монолитов 98. Монолиты озерно-ледникового генезиса составляют все супеси (98:7=14) и часть суглинков. Найдем, сколько монолитов озерно-ледникового генезиса среди суглинков: Всего суглинков 98:7·6=84. Среди них морские составляют $\frac{9}{14}$ от общего числа, то есть 63. Значит суглинков озерно-ледникового генезиса 21. Тогда общее число монолитов озерно-ледникового генезиса: 14+21=35.

Ответ. 35.

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Валя арендовал самокат. Саша и Валя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Сергей Владимирович. Автомобили поравнялись через 4 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя поравнялись на расстоянии 1 км от главного корпуса. Найти скорость автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 18 км на 1,4 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 6 раза меньше скорости автомобиля Сергей Владимирович. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Решение.

Так как скорости самоката и автомобиля преподавателя отличаются в 6 раз, то за то же время, автомобиль преподавателя пройдет в 6 раз больше. Тогда расстояние между корпусами 1+6=7 км.

Обозначим за x - скорость самоката, за t - время, которое тратит каршеринг на путь в 20 км, s - путь, который прошел автомобиль-каршеринг до встречи с автомобилем преподавателя, v - скорость каршеринга.

Решая систему:

$$\begin{cases} \frac{18}{x} = t + 1{,}4, \\ \frac{7-s}{6x} = \frac{s}{v} = \frac{1}{15}, \\ tv = 18, \end{cases} \text{ получим } \begin{cases} x = 10, \\ t = 0{,}4, \\ s = 3, \\ v = 45. \end{cases}.$$

Ответ. 10, 45, 60.

Задание 5. (20 баллов)

Найти $x_0 + y_0$, если x_0 и y_0 решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2023x = 2023y - y^3 - 2020, \\ x^2 - xy + y^2 = 2022. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2023x - 2023y = -2020, \\ x^2 - xy + y^2 = 2022; \end{cases}$$

Пусть x_0 и y_0 решение системы уравнений. Тогда

$$\begin{cases} {x_0}^3 + {y_0}^3 - 2023y_0 - 2023x_0 = -2020, \\ {x_0}^2 + x_0y_0 + {y_0}^2 = 2022. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\begin{cases} (x_0 + y_0)\left({x_0}^2 - x_0y_0 + {y_0}^2\right) - 2023(x_0 + y_0) = -2020, \\ {x_0}^2 - x_0y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2022(x_0 + y_0) - 2023(x_0 + y_0) = -2020, \\ {x_0}^2 - x_0y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

Тогда $x_0 + y_0 = 2020$.

Ответ. 2020.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

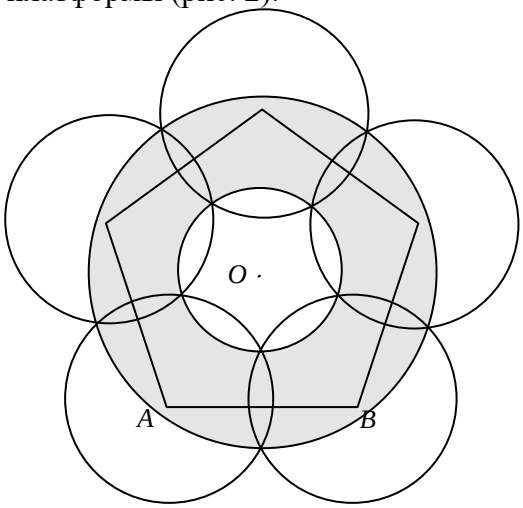

Рис. 2.

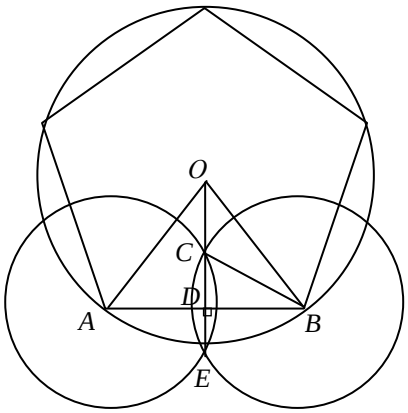

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда AB = 48, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/5\right)} = \frac{48}{2\sin 36^\circ} = \frac{24}{\sin 36^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$OC = OD - 7 = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 7;$$

$$OE = OD + 7 = \frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 7;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 7\right)^2 - \left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 7\right)^2\right) = \frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Ответ. $\frac{24}{\sin 36^\circ}; \frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}$.