1 лист

ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25004

Класс 9 **Вариант** 2-1 **Дата Олимпиады** 10.01.2018

Площадка написания ТИУ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Σ Цифрой**	**Σ Прописью**	**Подпись**
Оценка	5	5	5	5	5	[illegible] 5	15	10	5	20	80	восемьдесят	

испр

① $1\frac{7}{6}+1\frac{5}{6}\cdot\left(X:1,8-\frac{3}{2}\cdot2,02\right)\underset{\Updownarrow}{=}-2,5$ О.Д.З. $x\in R$.

$\frac{7}{6}+\frac{11}{6}\cdot\left(\frac{X\cdot10}{18}-\frac{6,06}{2}\right)\underset{\Updownarrow}{=}-2,5$

$7+11\cdot\frac{5X}{5}-11\cdot\frac{300}{404}\,3,03\underset{\Updownarrow}{=}-15$

$\frac{55X}{5}=\underset{\Updownarrow}{-22}+33,33$

$\cancel{\frac{55}{5}}\ \frac{5\cdot11\cdot x}{5}\underset{\Updownarrow}{=}11(-2+3,03)$

$\frac{5x}{5}=1,03$

$\Updownarrow$ $x=\frac{9,27}{5}=\frac{18,54}{10}=1,854$

~~$x=9,27$~~

$\boxed{\text{Ответ: } \cancel{x=9,27}}$ $x=1,854$ +

② $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{a^2b-b^3}:\frac{a^2+ab}{a^2-ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{b(a^2-b^2)}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{ba^2+ab^2}=$

$=\frac{1}{ab}\left(a^2+b^2-\frac{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)}{a+b}\right)=\frac{1}{ab}(a^2+b^2-a^2+ab-b^2)=\frac{ab}{ab}=1.$

$a\neq0;\ b\neq0;\ a\neq b;\ a\neq-b.$

$\boxed{\text{Ответ: } 1.}$ +

③ Пусть изначальное число имеет вид $\overline{ab}$; $a\in N$; $b\in Z$; $0\le b\le9$
$a\neq$ Тогда его сумма цифр $=a+b=12$. $0\le a,b\le$

А разность числа [illegible] $=ba=1$ [illegible] 1

$=\frac{1}{12}(10a+b)$ Тогда мы получим систему:

$\begin{cases} a+b=12, \\ b-a=\frac{1}{2}\cdot\frac{10a+b}{12}, \end{cases}$

$\begin{cases} a=12-b, \\ 12b-12a=10a+b; \end{cases}$

$\begin{cases} 11b=22a, \\ a=12-b; \end{cases}$

$\begin{cases} b=2a, \\ a=12-b; \end{cases}$

$\begin{cases} b=24-2b, \\ a=12-b; \end{cases}$

$\begin{cases} 3b=24, \\ a=12-b; \end{cases}$

$\begin{cases} b=8, \\ a=12-b; \end{cases}$

$\begin{cases} b=8; \\ a=4. \end{cases}$

Тогда изначальное число $=48$.

$\boxed{\text{Ответ: } 48.}$ +

④ Шаг прогрессии равен $\frac{7}{6}-\frac{1}{2}=\frac{7}{6}-\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

$\frac{59}{6}=\frac{1}{2}+k\cdot\frac{2}{3}$; $59=3+4k$; $4k=56$; $k=14 \Rightarrow \frac{59}{6}$ - 15 член прогрессии.

$\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+\dots+\frac{59}{6}=15\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(0+1+\dots+14)=\frac{15}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{14\cdot15}{2}=\frac{15}{2}+70=$ ~~49,5~~ 77,5

$\boxed{\text{Ответ: сумма} = \cancel{49,5}}$ 77,5 +

5) $\sqrt{7-3x}-\sqrt{6-x}=3$.

$\begin{cases} 7-3x\ge0, & \cancel{x\ge} \; x\le\frac{7}{3} \\ 6-x\ge0, & x\le6 \end{cases} \Rightarrow x\le\frac{7}{3}$.

$\sqrt{7-3x}-\sqrt{6-x}=3 \Leftrightarrow \sqrt{7-3x}=3+\sqrt{6-x} \overset{\text{т.к. обе части}\ge0}{\Leftrightarrow} 7-3x=9+6\sqrt{6-x}+6-x \Leftrightarrow$

$-4-x=3\sqrt{6-x}$, ~~$\begin{cases}-4-x\ge0, & x\le-4\end{cases}$ [illegible] $x^2-5x+10=$ [illegible] $(x-8)=0$~~

3 лист

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25004

~~$\left[x=1,$ не $x\le -4$ это подх-ит~~

$\begin{cases} -4-x\ge 0; \; x\le -4; \\ (-4-x)^2 = 4(6-x); \; x^2+8x+16=54-9x; \; x^2+17x-38=0; \; (x+19)(x-2)=0; \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x=2 < -4, \text{ не подх-ит.} \\ x=-19; \end{array} \right.$ $\sqrt{7+3\cdot 19}+\sqrt{6+19} = 8-5=3.$ Подходит.

Ответ: $x=-19$ +

~~6. $\frac{x+2}{5x+1} < -x-4$ О.Д.З. $x\ne -\frac{1}{5}$.~~ 6. См лист 6.

~~$\Updownarrow$~~

~~$\frac{x+2}{5x+1}+x+4<0 \Leftrightarrow \frac{x+2+5x^2+20x+x+4}{5x+1}<0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+22x+6}{5x+1}<0.$~~

~~$5x^2+22x+6=0$~~

~~$x=\frac{-22\pm\sqrt{22^2-120}}{10} = \frac{-11\pm\sqrt{121-30}}{5} = \frac{-11\pm\sqrt{91}}{5}$~~

~~$\frac{-11+\sqrt{31}}{5} \lessgtr -\frac{1}{5}$~~

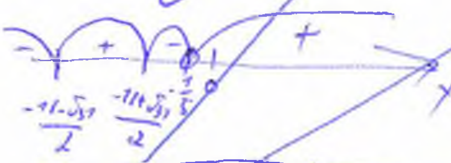
~~$\Updownarrow$~~

~~$11-\sqrt{31} \gtrless 1$~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$\sqrt{31}<10 \Leftarrow 31<100.$ Верно.~~

~~$\Downarrow$~~



~~$\Rightarrow x\in\left(-\infty; \frac{-11-\sqrt{31}}{2}\right)\cup\left(\frac{-11+\sqrt{31}}{2}; -\frac{1}{5}\right).$~~

~~Тогда наиб. решение $x=-1$;~~

~~$-\frac{1}{5}>-1$, $-1<\frac{-1}{m}>\frac{-11+\sqrt{31}}{2} \Rightarrow 9>\sqrt{31} \Leftarrow 81>31$ Верно~~

~~$\boxed{\text{Ответ: } x=-1.}$~~

④ $4x-3y=20$

Рассмотрим точку $(a;b)$ на этой прямой ~~$(a;b)$~~; $4a-3b=20$; $b=\frac{4a-20}{3}$

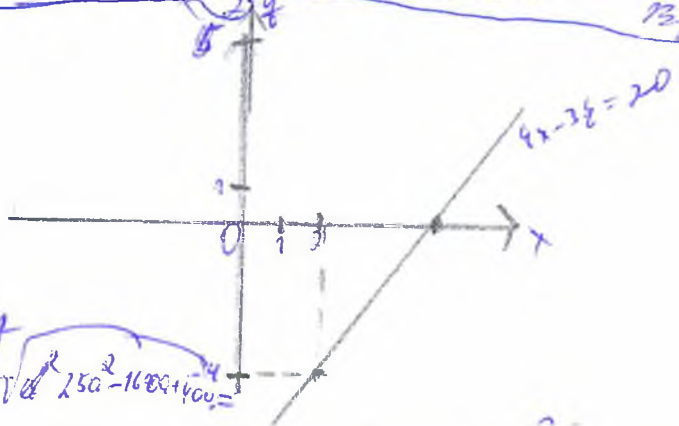
Рас-ие от неё до $O = \sqrt{a^2+b^2} =$

$= \sqrt{a^2+\left(\frac{4a-20}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2+16a^2-160a+400} = \frac{1}{3}\sqrt{25a^2-160a+400} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(5a-32)^2+144} \ge \frac{1}{3}\sqrt{144} = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4.$ (т. к. $(5a-32)^2\ge 0$). Причём данное расстояние достигается при $a=\frac{32}{3}$ $\left(b=\frac{4\cdot\frac{32}{3}-20}{3}\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } 4.}$

+



4 лист.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25004

⑧ $\frac{x^2-ax+2a-4}{(x-3)(x+7a)}=0$. О.Д.З. $x\neq 3$; $x\neq -7a$

$x^2-ax+2a-4=0$; $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-8a+16}}{2}=\frac{a\pm(a-4)}{2}$; $x_1=\frac{a-a+4}{2}=2$.

$x_2=\frac{a+a-4}{2}=a-2$

1) Если 2 - $\overset{\text{единственный}}{\text{корень}}$ уравнения, то

а) $a-2=2$; $\boxed{a=4}$, $-7a=-28\neq 2$.

б) $a-2=-7a$; $8a=2$; $\boxed{a=\frac{1}{4}=0{,}25}$; $-7a=-\frac{7}{4}\neq 2$.

~~2) Если 2 - не корень, то ед. корень $=a-2$~~

в) $a-2=3$; $\boxed{a=3}$; $-7a=-35\neq 2$.

2) Если 2 - не корень, то ед. корень $=a-2$.

$2=-7a$, т.к. 2 - не корень

$\boxed{a=-\frac{2}{7}}$, $a-2=-\frac{16}{7}\neq 3$ и $\neq -7a$.

Ответ: $a=-\frac{2}{7}$; $a=3$; $a=\frac{1}{4}$; $a=4$

?

⑨ Дано: $\Omega(O;6)$; ~~ω пр. с~~

$OA=OB=6$, $M\in$ отр. AB, ω

$A, M, O\in\omega$; $\omega\cap\Omega=C\neq A$

$BC=4$; $AC=4\sqrt{5}$

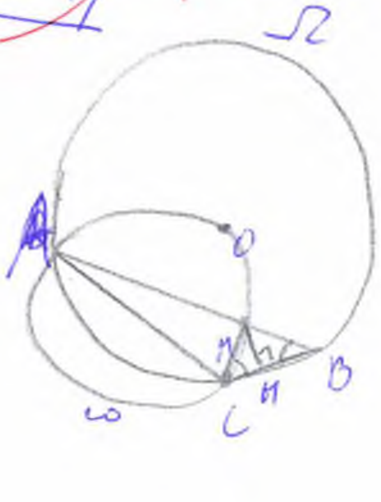
Найти: BM

Решение: ~~$\angle AOC=2\alpha$~~.

~~$AC^2=AO^2+OC^2-2\cos 2\alpha\cdot AO\cdot OC$~~

~~$80=36+36-2\cos 2\alpha\cdot 36$~~

~~$1=\dots\cos 2\alpha$.~~



Заметим, что C и O лежат в разных полуплоскостях относительно AB $\Rightarrow$ $\angle AMC=\angle AOC=2\angle ABC\Rightarrow\angle MCB=\angle AMC-\angle MBC=\angle ABC=\alpha$.

По т. синусов $\frac{AC}{\sin\alpha}=2\cdot 6=12$; $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{5}}{12}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Так как $\angle MCB=\angle MBC=\alpha$; ~~$\angle CMB=180$~~ $MC=MB$. $MH=h_{CB}=m_{CB}=l_{CM}$

5 лист

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25004

$HB = \frac{1}{2} \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, т.к. $\angle CHB = 180^\circ - 2\alpha > 0^\circ$; $\alpha < 90^\circ$ =>

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{5}{8}} = \frac{2}{3}$.

$MB = \cos\alpha \cdot HB = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

$\boxed{\text{Ответ: } MB = \frac{4}{3}.}$

(12) $2x^2 + xy - y^2 - 3y = 110$ $\boxed{\text{Ответ: } x = 19;\ y = 34}$

+

$(2x - y - 2)(x + y + 1) = 108 = 3^3 \cdot 2^2$.

$x \geq 1$; $y \geq 1$ (т.к. $x, y \in \mathbb{N}$) => $x + y + 1 \geq 3$. =>

~~I $x + y + 1 = 3$; $x = y = 1$. $2x - y - 2 = -1$; $-1 \cdot 3 = -3$, не удов-ет.~~

~~II $x + y + 1 = 4$; $x + y = 3$.~~

$2x - y - 2 = a$; $x + y + 1 = \frac{108}{a}$; $x \leq \frac{108}{a} - 2$.

~~$x \geq y + 2 + a$~~ $x \geq \frac{3+a}{2}$; $\frac{3+a}{2} \leq \frac{108}{a} - 2$; $3a + a^2 \leq 216 - 4a$

$a^2 + 7a - 216 \leq 0$.

$a^2 + 7a - 216 = 0$; $a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 864}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{913}}{2}$ => ~~т.к. $a > 0$ (поскольку $\frac{108}{a} > 0$)~~

$a \leq \frac{-7 + \sqrt{913}}{2} < \frac{-7 + 31}{2} = 12$.

I $a = 9$; $\begin{cases} 2x - y - 2 = 9;\ 2x - y = 11 = x + y;\ x = 2y;\ x + y = 11;\ 3y = 11\ \varnothing \\ x + y + 1 = 12;\ x + y = 11 \end{cases}$ т.к. $y \in \mathbb{N}$

II $a = 6$; $\begin{cases} 2x - y - 2 = 6;\ 2x - y = 8 \\ x + y + 1 = 18;\ x + y = 17 \end{cases}$

~~$3x - 2$~~ $2x - y + x + y = 8 + 17 = 25 = 3x$. $\varnothing$, т.к. $x \in \mathbb{N}$.

III $a = 4$ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 4;\ 2x - y = 6; \\ x + y + 1 = 27;\ x + y = 26; \end{cases}$ $2x - y + x + y = 26 + 6 = 32$; $3x = 32$ $\varnothing$, т.к. $x \in \mathbb{N}$

IV $a = 3$ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 3;\ 2x - y = 5, \\ x + y + 1 = 36;\ x + y = 35 \end{cases}$ $2x - y + x + y = 5 + 35 = 40 = 3x$ $\varnothing$, т.к. $x \in \mathbb{N}$

V $a = 2$ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 2;\ 2x - y = 4; \\ x + y + 1 = 54;\ x + y = 53 \end{cases}$ ~~$2x - y = 4$~~ $2x - y + x + y = 4 + 53 = 57 = 3x$; $x = 19$; $19 + y = 53$; $y = 34$

[illegible] $2x = 110$ $\varnothing$ т.к. $x \in \mathbb{N}$.

VI $a = 1$ $\{2x - y - 2 = 1;$ [illegible]

$\boxed{\text{Ответ: } x=19;\ y=34}$

⑥ $\frac{x+2}{5x+1} < -x-4$. О.Д.З. $x \neq -\frac{1}{5}$.

$\Updownarrow$

$\frac{x+2}{5x+1} + x+4 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2+5x^2+20x+x+4}{5x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+22x+6}{5x+1} < 0.$

$5x^2+22x+6=0;\ x=\frac{-22\pm\sqrt{4\cdot 11^2-4\cdot 30}}{10} = \frac{-11\pm\sqrt{91}}{5}.$

$\cancel{-11\pm}\ \frac{-11+\sqrt{91}}{5} < \cancel{0} -\frac{1}{5}$

$\Updownarrow$

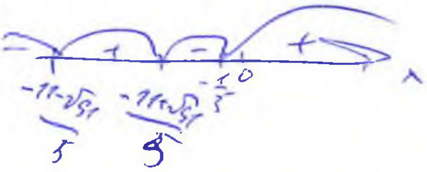
$-11+\sqrt{91} < -1$

$\Updownarrow$

$\sqrt{91} < 10$

$\Updownarrow$

$91 < 100$. Верно. Тогда:



$-1 < \frac{-11+\sqrt{91}}{5}$

$\Updownarrow$

~~[illegible]~~ $\sqrt{91} > 6 \Leftrightarrow 91 > 36$. Верно. Тогда:

$-1 < \frac{-11+\sqrt{91}}{5} < -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow$ ~~наиб.~~ целое решение $\leqslant$

$< \frac{-11-\sqrt{91}}{5} < \frac{-11-10}{5} = -\frac{21}{5} < -4 \Rightarrow$ наиб. целое решение:

$\frac{-5+2}{-25+1} < 5-4 \Leftrightarrow \frac{-3}{-24} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{24} < 1$. Верно.

$\boxed{\text{Ответ: } x=-5.}$ +

Общее решение: $x \in \left(-\infty; \frac{-11-\sqrt{91}}{5}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{91}}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.