ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

(ab)c = a(bc)   E = mc²

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

Класс 9 **Вариант** 2-1 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	5	5	15	~~0~~ 2	20	0	~~65~~ 67	шестьдесят пять	[illegible]

апелляция: шестьдесят семь Баиева

N1.

$$1\frac{1}{6}+1\frac{5}{6}\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-2{,}5.$$

$\Downarrow$

$$1\frac{5}{6}\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-\frac{15}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{22}{6} \quad \Big|\cdot 6$$

$\Downarrow$

$$11\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-22 \quad \Big|:11$$

$\Downarrow$

$$(x:1{,}8)-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02=-2$$

$$\frac{x}{1{,}8}=3{,}03-2=1{,}03$$

$\Downarrow$

$$x=1{,}8\cdot 1{,}03=1{,}854$$

Ответ: $x=1{,}854$ +

N2.

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{a^2b-b^3}:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b(a^2-b^2)}:$$

$$:\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)\cancel{(a^2-b^2)}}{b\cancel{(a^2-b^2)}\cdot a\cancel{(a+b)}}=$$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 25033

$$= \frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2-ab+b^2}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Ответ: $\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^3+b^3}{a^2b-b^3} : \frac{a^2+ab}{a^2-b^2} = 1.$ +

№3 Пусть это число $= \overline{ab}$, тогда из условие

$$\begin{cases} a+b=12, \\ |b-a| = \frac{10a+b}{12}. \end{cases}$$

$$|b-a| = \frac{10a+b}{12}$$

$\Downarrow$

$$|b-(12-b)| = \frac{10(12-b)+b}{12}$$

Пусть $b-12+b=2b-12 \geqslant 0$, тогда

$$2b-12 = \frac{120-9b}{12}$$

$\Downarrow$

$$24b-144 = 120-9b$$

$\Downarrow$

$$33b = 264$$

$\Downarrow$

$b=8$ (при $b=8$ $2b-12=4 \geqslant 0$, тогда $a=12-b=4$.)

Если $|b-a|<0$ т.е.

$$|2b-12| = \frac{10(12-b)+b}{12}$$

$\Downarrow$

$$12-2b = \frac{120-9b}{12}$$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

$\Downarrow$

$144-120=-9b+24b$

$24=15b \Rightarrow b=\frac{24}{15}$, но раз b - цифра то $b\in\mathbb{Z}$

Тогда $b\neq\frac{24}{15} \Rightarrow$ искомое число ~~?~~ есть 48.

Ответ: 48. +

N4.

$\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+...+\frac{59}{6}=\frac{3}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+...+\frac{59}{6}$.

Тогда ~~а~~ мы имеем дело с суммой членов арифметической прогрессии где $a_1=\frac{3}{6}$, $d=\frac{4}{6}$.

Тогда всего членов в нашей сумме $\frac{59-3}{6}:\frac{4}{6}+1=$

$=15$. Тогда $S_{15}=15a_1+\frac{15\cdot14}{2}d=15\cdot\frac{3}{6}+\frac{15\cdot14\cdot4}{2\cdot6}=$

$=7{,}5+70=77{,}5$.

Ответ: 77,5. +

N5.

$\sqrt{7-3x}-\sqrt{6-x}=3$. ОДЗ: $7-3x\geq0 \Rightarrow x\leq\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

$\sqrt{7-3x}=3+\sqrt{6-x}$ $|^{\wedge2}$

$\Downarrow$

$7-3x=9+6\sqrt{6-x}+6-x$ $\downarrow$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

$\Updownarrow$

$-8-2x=6\sqrt{6-x}$ $|:2$ и $\wedge 2$

$\Updownarrow$ ← от сюда $-2(4+x)\geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\leq -4$

$(4+x)^2=9\cdot(6-x)$

$\Updownarrow$

$x^2+8x+16-54+9x=0$

$\Updownarrow$

$x^2+17x-38=0$

$D=289+152=441=21^2$

$x_1, x_2 = \frac{-17\pm 21}{2}$ — 2; -19

При $x=2$

$\sqrt{7-6}-\sqrt{6-2}=1-2=-1\neq 3 \Rightarrow x=2$ – не подходит (оно и понятно, ведь $x\leq -4$)

При $x=-19$

$\sqrt{64}-\sqrt{25}=3$

Ответ: $x=-19$ +

№6. $\frac{x+2}{5x+1}<-x-4$ ОДЗ: $x\neq -\frac{1}{5}$

$\Updownarrow$

$\frac{(x+2)+(x+4)(5x+1)}{5x+1}<0$

$\Updownarrow$

$\frac{5x^2+21x+4+x+2}{5x+1}<0$

$\Updownarrow$

$$\frac{5x^2+22x+6}{5x+1}<0$$

D уравнения $5x^2+22x+6$.

$D=484-120=364=2^2\cdot 91$

$x_1, x_2 = \frac{-22\pm 2\sqrt{91}}{10}$ $\left[\begin{array}{l}\frac{-22+2\sqrt{91}}{10}.\\ \frac{-22-2\sqrt{91}}{10}\end{array}\right.$

Тогда заметим, что $-\frac{1}{5}$ располагается на коорд. прямой:

$\frac{-22-2\sqrt{91}}{10}$ $\quad$ $-\frac{1}{5}$

$\frac{-22+2\sqrt{91}}{10}$

Т.к. $\frac{-22-2\sqrt{91}}{10} = \frac{-11-\sqrt{91}}{5} < -1 < -\frac{1}{5}$ и

$\frac{-22+2\sqrt{91}}{10} = \frac{-11+\sqrt{91}}{5} < \frac{-11+10}{5} = -\frac{1}{5}$.

~~Тогда все удовл-ие ним x это~~ $\cancel{x<-\frac{1}{5}}$ ~~и~~

$\cancel{x\in\left(\frac{-22-2\sqrt{91}}{10}; \frac{-22+2\sqrt{91}}{10}\right)}$ ~~Тогда целых x это~~

$\cancel{x=\left[\frac{-22+2\sqrt{91}}{10}\right]=\left[\frac{-11+\sqrt{91}}{5}\right]}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

Тогда дробь $\frac{5x^2+22x+6}{5x+1}<0$ верно только при $x\in\left(-\infty;\frac{-22-2\sqrt{91}}{10}\right)\cup\left(\frac{-22+2\sqrt{91}}{10};-\frac{1}{5}\right)$ тогда найдём наиб. целое x. Заметим, что решен. нашего нер-ва <0, тогда при $x=-1$

$$\frac{5\cdot(-1)^2-22+6}{-4}=\frac{-11}{-4}=\frac{11}{4}>0,$$

при $x=-2$

$$\frac{5\cdot(-2)^2-2\cdot22+6}{-9}=\frac{20-44+6}{-9}=\frac{-18}{-9}=2>0$$

при $x=-3$

$$\frac{5\cdot(-3)^2-3\cdot22+6}{-14}=\frac{45+6-66}{-14}=\frac{-15}{-14}=\frac{15}{14}>0$$

при $x=-4$

$$\frac{5\cdot(-4)^2-4\cdot22+6}{-19}=\frac{80-88+6}{-19}=\frac{-2}{-19}=\frac{1}{19}>0$$

при $x=-5$

$$\frac{5\cdot(-5)^2-5\cdot22+6}{-24}=\frac{125-110+6}{-24}=\frac{21}{-24}<0.$$

Тогда $x_{max}=-5$

Ответ: $x=-5$. +

№3. $\frac{x^2-ax+2a-4}{(x-3)(x+7a)}=0$ ОДЗ: $x\neq-7a$ $x\neq3$. $x\in R$

6.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

Дробь равна 0 если числитель =0, т.е.
$x^2-ax+2a-4=0$ при том при $\geq$ корень 1, то $D=0$
$D=a^2-4(2a-4)=0$

$\Updownarrow$

$a^2-8a+16=0$

$\Updownarrow$

$(a-4)^2=0$
Тогда $a=4$
При $a=4$ $x=2$ тогда x подходит ОДЗ.

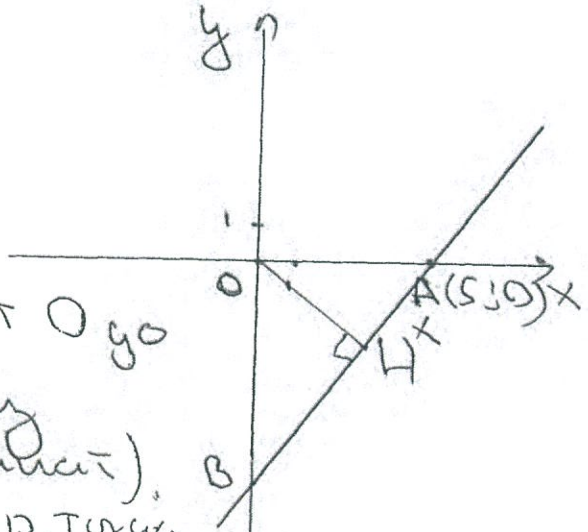
не все случаи рассм-ны.

2б

Ответ: $a=4$

№7.

Заметим, что $4x-3y=20$
проходит через точки
$A(5;0)$ и $B(0;-\frac{20}{3})$



Кратчайшее расстояние от O до AB есть перпендикуляр из O на AB (O-начало координат).
Пусть OH и есть этот перп-р. Тогда
из т. Пифагора для $\triangle AOB$ имеем
$BA=\sqrt{25+\frac{400}{9}}=\sqrt{25+44\frac{4}{9}}=\sqrt{79\frac{4}{9}}$.
Пусть $AH=x$ тогда $BH=\sqrt{79\frac{4}{9}}-x$
Тогда $OH=\sqrt{\frac{20^2}{3}-69\frac{4}{9}-x^2+2x\sqrt{69\frac{4}{9}}}=\sqrt{25-x^2}$

из т. Пифаг. для $\triangle OHB$ из т. Пифаг. для $\triangle OHA$.

(7.)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25033

Тогда

$$\cancel{44\frac{4}{9} - 69\frac{4}{9} - x^2 + 2x\sqrt{69\frac{4}{9}} = 25 - x^2}$$

$$\cancel{-35 + 2x\sqrt{69\frac{4}{9}} = 25}$$

$$\cancel{x\sqrt{69\frac{4}{9}} = \frac{60}{2} = 30.}$$

$$\cancel{x = 30 : \sqrt{69\frac{4}{9}}}$$

~~Тогда~~

$$\cancel{OH = \sqrt{25 - \left(\frac{30}{\sqrt{79\frac{4}{9}}}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{900}{79\frac{4}{9}}} =}$$

$$\frac{400}{9} - 69\frac{4}{9} - \cancel{x^2} + 2x\sqrt{69\frac{4}{9}} = 25 - \cancel{x^2}$$

$$x\sqrt{69\frac{4}{9}} = \frac{25 + 69\frac{4}{9} - 44\frac{4}{9}}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

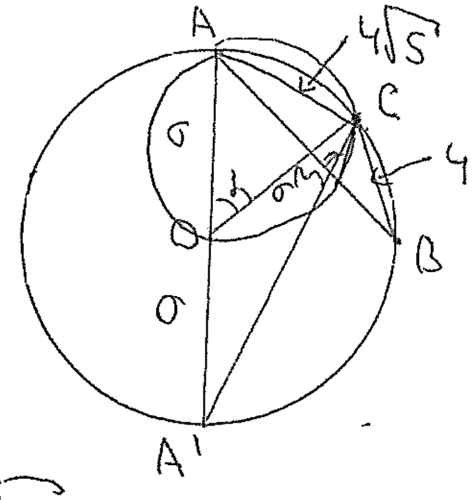
$$x = \frac{25}{\sqrt{69\frac{4}{9}}}$$

Тогда $OH = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25\cdot\left(1 - \frac{25}{69\frac{4}{9}}\right)} = \sqrt{25\cdot\left(1 - \frac{25}{\frac{625}{9}}\right)} =$

$= \sqrt{25\left(1 - \frac{9}{25}\right)} = \sqrt{25\cdot\frac{16}{25}} = 4.$

Ответ: $OH = 4$.

№9. Отметим точку A' такую, что A' диаметрально противоположна точке A в окр. с центром в O. Тогда пусть окр с центром в O называется ω_1 а окр. на которой лежат точки $A, C, M, O - \omega_2$



Тогда $\angle AA'C = \angle ABC$ (в ω_1 они опир-ся на одну дугу и в и A' по одну полупл-ть отн. AC)
Тогда $\angle AOC = \angle AMC$ (в ω_2 они опир. на дугу AC и по одну полупл-ть от AC (от прямой))
В $\triangle AOC$ нам известны все стороны: $AO = OC = 6$, а $AC = 4\sqrt5$.
Тогда по т. Косинусов для $\triangle AOC$:

$(4\sqrt5)^2 = 36+36-2\cdot36\cdot\cos\alpha$ где $\alpha = \angle AOC = 180 - \angle COA'$

$8 = -2\cdot 36\cdot\cos\alpha$

$1 = -9\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac19$ тогда $\cos\alpha = -\cos(180-\alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(180-\alpha) = \frac19$.

Раз углы $\angle CMA = \angle AOC$ то и смежные им углы равны $\Rightarrow \angle COA' = \angle CMB = 180-\alpha$
~~по т.~~ Тогда по т. Косин. для $\triangle COA'$:

$CA'^2 = 36+36-2\cdot36\cdot\frac19 \Rightarrow (CA')^2 = 72-8 = 64$

Тогда $\boxed{CA' = 8}$

Заметим, что раз $\angle COA' = \angle CMB$ и $\angle CBM = \angle OA'C$, то $\triangle COA' \sim \triangle CMB$ откуда $\frac{CB}{CA'} = \frac{BM}{OA'} \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = \frac{CB\cdot OA'}{CA'} = \frac{4\cdot6}{8} = 3$. Ответ: $BM = 3$ +