ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24998

Класс 10 **Вариант** 21 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	0	8	8	12	12	0	15	0	63	шестьдесят три	

① Дано: $A=(0,1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\sqrt[3]{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0,2}}{3\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0,02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1,017\right)$

Найти: A?

Решение:

$$A=(0,1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\sqrt[3]{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0,2}}{3\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0,02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1,017\right)=$$

$$=\frac{1}{\frac{1^3}{10^3}}\left(\frac{\frac{10\cdot3}{3\cdot4\sqrt{5}}-\frac{5\cdot2}{4\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}-\frac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{10}}}{\frac{4\cdot4\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{2}}{3}-\frac{140\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{100}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1,017\right)=$$

$$=10^3\left(\frac{\frac{10}{4\sqrt{5}}-\frac{10}{4\sqrt{5}}+\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{14\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-14\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1,017\right)=$$

$$=10^3\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1,017\right)=10^3\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1,017\right)=$$

$$=10^3\left(1+1,017\right)=10^3\cdot2,017=2017$$

Ответ: $A=2017$. +

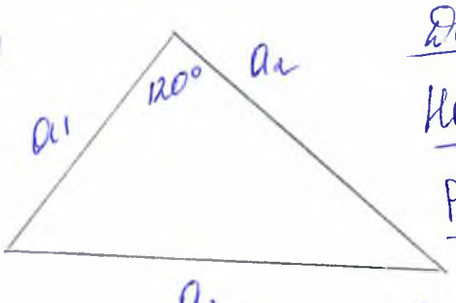
(2) Пусть объем цистерны V л; во вторую было налито x л, а в третью y л. Зная, что все цистерны заполнились одновременно составим систему ур-ий:

$$\begin{cases} \frac{V}{100} = \frac{V-x}{60} \\ \frac{V}{100} = \frac{V-y}{80} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{5} = \frac{V-x}{3} \\ \frac{V}{5} = \frac{V-y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5V-5x = 3V \\ 5V-5y = 4V \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2V = 5x \\ V = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}4V \\ y = 0{,}2V \end{cases} \quad \frac{x}{y} = \frac{0{,}4V}{0{,}2V} = 2$$

Ответ: В начальный момент во второй цистерне было в 2 раза больше нефти, чем в первой. +

(4)



Дано: $\angle\Delta = 120°$; стороны: a_1; a_2; a_3 – А.пр.

Найти: a_1; a_2; a_3.

Решение: против большего угла в Δ лежит большая сторона $\Rightarrow$ a_3 – лежит против $\angle 120°$

a_1; $a_2 = a_1 + b$; $a_3 = a_1 + 2b$, где b – разность прогрессии.

Запишем теорему косинусов для данного Δ:

$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos 120°$

$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2$ подставим a_2 и a_3.

$(a_1+2b)^2 = a_1^2 + (a_1+b)^2 + a_1(a_1+b)$

$a_1^2 + 4a_1 b + 4b^2 = a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 b + b^2 + a_1^2 + a_1 b$

(4) - продолжение

$a_1 b + 4b^2 = 2a_1^2 + b^2$

$a_1 b + 3b^2 = 2a_1^2$.

$2a_1^2 - a_1 b - 3b^2 = 0$ – получили квадратное ур-е

$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) b^2 =$ относ-но a_1.

$= b^2 + 24b^2 = 25b^2$.

$a_1 = \frac{b \pm 5b}{4}$ – берем положительный корень т.к. работаем с длинами сторон.

$a_1 = \frac{6b}{4} = \frac{3}{2} b$.

$a_2 = \frac{3}{2} b + b = \frac{5}{2} b$

$a_3 = \frac{3}{2} b + 2b = \frac{3}{2} b + \frac{4}{2} b = \frac{7}{2} b$. $b > 0$. +

Ответ: Треугольники со сторонами $\frac{3}{2}b$; $\frac{5}{2}b$; $\frac{7}{2}b$, причем $b > 0$.

(5) Д-ть: $\frac{2\sin^2 2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha$.

Д-во: $\frac{2\sin^2 2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{2 \cdot 4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha} =$

$= \frac{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 8\sin^2\alpha} = \frac{8\sin^2\alpha\,(\cos^2\alpha + 1) - 8}{2\sin^2\alpha - 8\sin^2\alpha} =$

продолжение на листе 4.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24998.

(5) - продолжение.

$$\frac{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-8}{2\sin^2\alpha-8\sin^2\alpha} = \frac{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-8}{2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-8}{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha} = \frac{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-8.}{8\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)} =$$

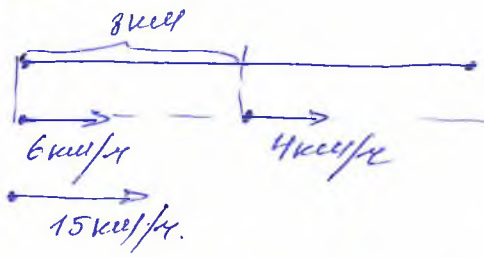
$$= \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-1}{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)} = \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)-1}{-\sin^4\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1}{-\sin^4\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{-\sin^4\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}{-\sin^4\alpha} = \frac{-\cos^4\alpha}{-\sin^4\alpha} = ctg^4\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha} = ctg^4\alpha \text{ чтр.}} \quad +$$

(6)



$v_1 = 6$ км/ч

$v_2 = 4$ км/ч

$v = 15$ км/ч

$S = 8$ км

S_c - ?

Скорость сближения путешественников: $v_{сб} = v_1 - v_2 = (6-4) = 2$ (км/ч)

Время сближения путешественников:

$t = \frac{S}{v_{сб}} = \frac{8\text{км}}{2\text{км/ч}} = 4$ ч - собака бегала в течении этого времени от одного путешественника к другому.

Лист № 4 (4)

(6) - продолжение

Скорость собаки $v = 15$ км/ч, а бегала она в течении $t = 4$ ч: $S_c = (4 \cdot 15) = 60$ (км)

Ответ: собака пробежала 60 км. +

(9) Решить нер-во: $2\sin 6x \cos 3x + \cos 6x < -1$.

Решение: $2\sin 6x \cos 3x + \cos 6x < -1$.

$2 \cdot 2 \cdot \sin 3x \cos 3x \cos 3x + \cos^2 3x - \sin^2 3x < -1$.

$\cos^2 3x (4\sin 3x + 1) - \sin^2 3x < -1$.

$\cos^2 3x (4\sin 3x + 1) - (1 - \cos^2 3x) < -1$

$\cos^2 3x (4\sin 3x + 1) + (\cos^2 3x - 1) < -1$.

$\cos^2 3x (4\sin 3x + 1) + \cos^2 3x < -1 + 1$

$\cos^2 3x (4\sin 3x + 1 + 1) < 0$

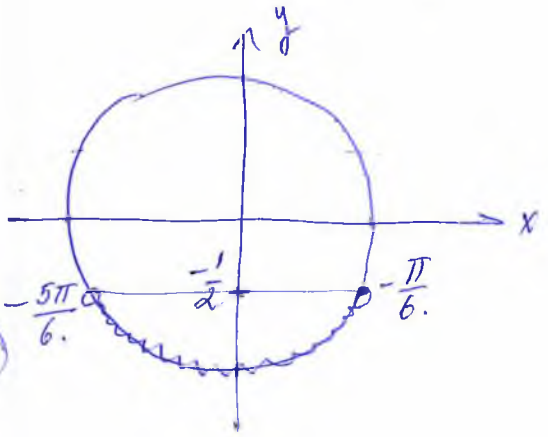
$\cos^2 3x (4\sin 3x + 2) < 0$.

$\cos^2 3x (2\sin 3x + 1) < 0$. $/: \cos^2 3x \neq 0$ $(\cos^2 3x > 0)$

$2\sin 3x + 1 < 0$.

$2\sin 3x < -1$.

$\sin 3x < -\frac{1}{2}$



$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 3x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$k \in Z$

$\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k < x < -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k$.

(9) - пр-е.

$$-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k < x < -\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k.$$

Рассмотрим значения: $\cos 3x = 0$.

$$3x = \frac{\pi}{2}+\pi k.$$

$$x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}k. \quad (k \in Z)$$

если данное значение входит в найденный промежуток, то либо: $-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{3}$, либо $-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{3}$.

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{9\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}$$

$$\pi k = \frac{14\pi}{6}$$

$k = \frac{7}{3}$ - противоречие ($k \in Z$)

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{9\pi}{18}+\frac{\pi}{18}$$

$$\pi k = \frac{10\pi}{6}$$

$k = \frac{5}{3}$ - противоречие ($k \in Z$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 3x \neq 0. \Rightarrow x \in \left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k;\ -\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k\right)$

Ответ: $x \in \left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k;\ \frac{-\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k\right)$ $x \neq -\frac{\pi}{6}$

(4) Д-ть: $1+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Д-во: применим М.М.И: $n \in N$.

1) для $n=1$.

$$1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1. \text{ - верно.}$$

2) пусть для $n=k$ - верно

$$1+2^3+3^3+\ldots+k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

(4) - предположение.

3) докажем, что для $n=k+1$ - верно:

$$\underbrace{1+2^3+3^3+\dots+k^3}_{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \text{ - верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Утверждение $1+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ верно для $n=1$ и из предположения, что оно верно для $n=k$ доказано, что утверждение верно для $n=k+1$, тогда данное утверждение верно для любого $n\in N$

чтд +