ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25185

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	0	0	8	12	12	0	12	0	52	пятьдесят два	

№2

Дано: пусть объем цистерны равен 1л. Обозначим время наполнен[ия] за t, ~~н~~ начальное кол-во нефти во 2 цистерне за x, а в 3 цистерне за y. Расчитаем ~~объем~~ нефти в цистерне по формуле $A=N\cdot t$, где N – скорость наполнения сосуда.

$N_1=100\frac{л}{мин}$; $N_2=60\frac{л}{мин}$; $N_3=80\frac{л}{мин}$.

Найти: $\frac{x}{y}$

Решение: по условию задачи составим и решим систем[у] ур-ий

$$\begin{cases}1=100t\\1=60t+x\\1=80t+y\end{cases}\quad \begin{cases}t=0{,}01\\x=1-60t\\y=1-80t\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1-60t}{1-80t}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0{,}4}{0{,}2}=2$$

Ответ: $\frac{x}{y}=2$ (Во второй цистерне было в 2 раза больше нефти)

+

№6

Дано: скорость первого путешественника $V_1=4\frac{км}{ч}$, второго – $6\frac{км}{ч}$

Путешественники идут в одном направлении, расстояние изначально между ними 8км. $V_{собаки}=V_c=15\frac{км}{ч}$

Пусть собака пробежала S_c -км, а все время путешествия до встречи $=t$

Найти: S_c

Решение: $S=V\cdot t\Rightarrow 8=(6-4)\cdot t\Rightarrow t=4ч$.

Собака бегала все время путешествия $\Rightarrow S_c=4ч\cdot 15\frac{км}{ч}=60$

Ответ: $S_c=60км$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25185

№7

Док-ть: $1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Док-во: Применим ММИ:

1) $n=1$

$1=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ – для $n=1$ – верно

$\Downarrow$

для $n=k$ – верно $4(1+2^3+3^3+\ldots+k^3)=(k(k+1))^2$

2) Док-ть: для $n=k+1$

$$4(1+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3)=((k+1)(k+2))^2$$

$$\Updownarrow$$

$$4(1+2^3+3^3+\ldots+k^3)=((k+1)(k+2))^2-4(k+1)^3$$

Док-ть: $(k(k+1))^2=((k+1)(k+2))^2-4(k+1)^3$

$$\Updownarrow$$

$$(k^2+3k+2)^2=(k^2+k)^2+4(k+1)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$k^4+3k^3+2k^2+3k^3+9k^2+6k+2k^2+6k+4=k^4+2k^3+k^2+4k^3+12k^2+12k+$$

$$\Updownarrow$$

$$4=4$$

В ходе равносильных преобразований было получено верное равенство, опираясь на $n=k$, доказано для $n=k+1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ – верно. ЧТД.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25185

№5

Док-ть: $\frac{2\sin^2 2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1-8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = ctg^4\alpha$

Док-во:

1) $2\sin^2 2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8 = 2(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha) + 8\sin^2\alpha - 8 =$
$= 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 8\cos^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) = -8\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$
$= -8\cos^4\alpha$

2) $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$
$= (1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$
$= 1-4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha$

3) $1-8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha - 1 + 8\sin^2\alpha - 8\sin^4\alpha = -8\sin^4\alpha$

4) $\frac{2\sin^2 2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1-8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{-8\cos^4\alpha}{-8\sin^4\alpha} = ctg^4\alpha$ + ч.т.д.

№9

Решить неравенство: $2\sin 6x\cos 3x + \cos 6x < -1$

Решение: $2\sin 6x\cos 3x + \cos 6x + 1 < 0$

$2\cdot 2\sin 3x\cos 3x\cdot\cos 3x + \cos 6x + 1 < 0$

$4\sin 3x\cos^2 3x + \cos^2 3x - \sin^2 3x + 1 < 0$

$4\sin 3x\cos^2 3x + 2\cos^2 3x < 0$

$\underset{\geq 0}{\cos^2 3x}(4\sin 3x + 2) < 0$

$\begin{cases}\cos 3x \neq 0\\ 4\sin 3x + 2 < 0\end{cases}$ $\begin{cases}3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in Z\\ \sin 3x < -\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\in Z\\ \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k < 3x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z\end{cases}$

$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\in Z$

Ответ: $x \in \left(\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\right), k\in Z$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25185

№1

Найти: A, при $A=(0{,}1)^{-3}\left(\dfrac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1\right.$

Решение: 1) $3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}=$

$=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4\sqrt{5}}-\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}-\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$

2) $3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}=\frac{7}{2}\cdot4\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{6}{3}$

$-\frac{140}{5\sqrt{2}}=$

$=14\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-\frac{28}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}-\frac{30}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

3) $\dfrac{\frac{5}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=1$

4) $1+1{,}017=2{,}017$

5) $(0{,}1)^{-3}=\frac{1}{(0{,}1)^3}=\frac{1}{0{,}001}=1000$

6) $2{,}017\cdot1000=2017$

Ответ: $A=2017$ +

№10

Найти: $x, y \mid \underbrace{\sqrt{x^2+(y-5)^2}}_{\geq 0}+\underbrace{\sqrt{y^2+(x-12)^2}}_{\geq 0}$ – миним.

Решение: ~~$\begin{cases}x^2+(y-5)^2=0\\ y^2+(x-12)^2=0\end{cases}$~~ ~~$\begin{cases}x^2+y^2-25y+25=0\\ y^2+x^2-24x+144=0\end{cases}$~~ ~~$144-24x+25y-25=0$~~

~~$24x=119+25y \Rightarrow x=\frac{119+25y}{24}$~~

~~$y^2+\left(\frac{25y+119-288}{24}\right)^2=0 \Rightarrow 1201y^2-169^2=0$ $y=\pm\frac{13}{\sqrt{1201}}$~~

Наим. при $x\to0$, $(y-5)\to0$, $y\to0$; $(x-12)\to0$ $x=6$

ЛИСТ 4 При сближении ...