

ШИФР 26264

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания ТЧУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	5	8	12	3	0	0	0	36	тридцать шесть	

N1

$$A = \left(3018 - \frac{24\sqrt{81} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2}\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{95} + 1,5\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right) (10,1)^{-3} =$$

$$= \left(3\frac{18}{1000} - \frac{\frac{12}{5}\sqrt{\frac{25}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{25}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{27}}{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right) 1000 =$$

$$= \frac{3018}{1000} \cdot 1000 - \frac{\frac{12 \cdot 5^{1/2}}{5 \cdot \sqrt{3}} - \frac{9^{1/2}}{\sqrt{3}} + \frac{5^{1/2}}{2\sqrt{3}} + \frac{1^{1/2}}{2\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}^{1/2}}{3}}{\frac{4 \cdot 3^{1/2}}{3\sqrt{2}} - \frac{1^{1/2}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}^{1/2}}{2} + \frac{20\sqrt{1}^{1/2}}{5\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1000 =$$

$$= 3018 - \frac{\frac{24}{2\sqrt{3}} - \frac{18}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{6}{2\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1000 =$$

$$= 3018 - \frac{\frac{24-18+5+1-6}{2\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1000 = 3018 - \frac{6}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 1000 =$$

$$= 3018 - \frac{6000}{6} = 3018 - 1000 = 2018$$

Ответ: $A = 2018$

+

ШИФР 26264

N2

Пусть x - градусы Цельсия, y - градусы Фаренгейта, а z - градусы Реомюра, тогда

	x	y	z
I	0	32	0
II	100	212	80

Найдём зависимость между x и y :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= 100 - 0 = 100 \\ \Delta y &= 212 - 32 = 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta y = 1,8 \Delta x$$

$$y_0 = x_0 + 32 \Rightarrow y = 1,8x + 32$$

$$x = y \Rightarrow x = 1,8x + 32$$

$$1,8x - x = -32$$

$$0,8x = -32$$

$$x = -40$$

Найдём зависимость между x и z :

$$z = 0,8x$$

$$z = 0,8(-40)$$

$$z = -32^\circ$$

Ответ: -32° +

N4

Пусть x, y, z - стороны треугольника, причём $x \leq y \leq z$

$y = xq$
 $z = xq^2$, где q - знаменатель геометрической прогрессии

По теореме косинусов:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}, \quad \alpha \leq \beta \leq \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in (0; \frac{3\pi}{2}))$$

если $\gamma = 60^\circ$, то $\alpha + \beta = 120^\circ$

$$\alpha = \beta = 60^\circ \Rightarrow x = y = z, \quad q = 1$$

если $\alpha = 60^\circ$, то $\beta + \gamma = 120^\circ$

$$\beta = \gamma = 60^\circ \Rightarrow x = y = z, \quad q = 1$$

если $\beta = 60^\circ$, то:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{xq}{\cos 60^\circ} = \frac{xq^2}{\cos \gamma}$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} = 2xq = \frac{xq^2}{\cos \gamma}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\cos \alpha} = 2xq &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2q} \Rightarrow q = \frac{1}{2\cos \alpha} \\ \frac{xq^2}{\cos \gamma} = 2xq &\Rightarrow \cos \gamma = \frac{q}{2} \Rightarrow q = 2\cos \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\cos \alpha = \frac{1}{2\cos \gamma}$$

$$\alpha + \gamma = 120^\circ \Rightarrow \gamma = 120^\circ - \alpha$$

$$2\cos(120^\circ - \alpha) = \frac{1}{2\cos \alpha}$$

$$2\cos(120^\circ - \alpha) \cdot 2\cos \alpha = 1$$

$$4\cos(120^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} \cos(120^\circ - \alpha) &= \cos 120^\circ \cos \alpha + \sin 120^\circ \sin \alpha = \\ &= -\frac{1}{2}\cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}\sin \alpha - \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}\sin \alpha - \cos \alpha}{2} \cos \alpha = 1$$

$$2(\sqrt{3}\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha) = 1$$

7 Предположим, что $\cos \alpha = 0$, тогда $2 \cdot (\sqrt{3}\sin \alpha \cdot 0 - 0) \neq 1$
 $0 \neq 1 \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$

$$\sqrt{3}\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad | : \cos \alpha$$

$$\sqrt{3}\tan \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad | : \cos \alpha$$

$$\sqrt{3}\tan \alpha - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = \frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ШИФР 26264

Ответ: треугольники с углами $\frac{\pi}{3}$ (равносторонний) +
 и с углами $\frac{\pi}{3}$, $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

N5

Докажем, что $\frac{3-4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$

$$\begin{aligned}
 1) \cos 4\alpha &= \cos 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - (2\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \\
 &= \cos^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \cdot \\
 &\cdot (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)^2 - 6\cos^2 \alpha + 6\cos^4 \alpha = \\
 &= 7\cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha + 1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1
 \end{aligned}$$

$$2) 4\cos 2\alpha = 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4\cos^2 \alpha - 4(1 - \cos^2 \alpha) = 4\cos^2 \alpha - 4 + 4\cos^2 \alpha = 8\cos^2 \alpha - 4$$

$$3) \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha}$$

$$\frac{3 - 8\cos^2 \alpha + 4 + 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1}{3 + 8\cos^2 \alpha - 4 + 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha}$$

$$\frac{8\cos^4 \alpha - 16\cos^2 \alpha + 8}{8\cos^4 \alpha} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha}$$

$$\frac{8(\cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1)}{8\cos^4 \alpha} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha}$$

$$\frac{(\cos^2 \alpha - 1)^2}{\cos^4 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha - 1)^2}{\cos^4 \alpha}, \text{ что и требовалось доказать } \quad \textcolor{red}{+}$$

N6

Пусть все время движения - t , тогда:

$$300 = 25t + 25t$$

$$300 = 50t$$

$$t = 6 \text{ ч.}$$

По формуле пути $s = vt$ найдём пройденный путь лодки:

$$s = 27 \cdot 6 = 162 \text{ км.}$$

Ответ: 162 км. +

ШИФР 26264

N6

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

МММ:

$$\text{Пусть } A(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$$

$$B(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1) $n=1$

$$\left. \begin{aligned} A(1) &= 1 \cdot 2 = 2 \\ B(1) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2 \end{aligned} \right\} A(n) = B(n) \leftarrow \text{верно}$$

2) $n=k$

пусть $A(k) = B(k)$, тогда:

3) $n=k+1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$A(k) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$A(k) + (k+1)(k+2) = B(k) \cdot \frac{3k}{k+3}$$

$$A(k) - B(k) \cdot \frac{k+3}{k} + (k+1)(k+2) = 0$$

$$B(k) \left(1 - \frac{k+3}{k} \right) + (k+1)(k+2) = 0$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{3k} + (k+1)(k+2) = 0$$

$$(k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} - \frac{k+3}{3} + 1 \right) = 0$$

$$(k+1)(k+2) \left(\frac{k - k + 3 + 3}{3} \right) = 0$$

$$(k+1)(k+2) \cdot 2 = 0$$

$$2k^2 + 6k + 4 = 0$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \quad k = -1 \quad k = -2 \leftarrow \text{верно?}$$

Согласно МММ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, что и требовалось доказать.



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26264

№10

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{y^2 + (x-3)^2} \quad |^2$$

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 = y^2 + x^2 - 6x + 9$$

$$6x - 9 = 8y - 16$$

$$8y = 6x + 7$$

$$y = \frac{6x + 7}{8}$$