ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

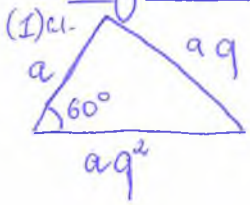
ШИФР 25241

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	8	12	12	3	0	0	51	пятьдесят од—	

Задача 4.



$a>0,\ q>0.$

Пусть одна сторона в треугольнике a, тогда две другие соответственно $a\cdot q$ и $a\cdot q^2$. По ~~следствию из~~ т. косинусов получим:

$$q^2 = a^2+(aq^2)^2-2\cdot a\cdot aq^2\cdot\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

$a^2q^2 = a^2 + a^2q^4 - \cancel{2}a^2q^2 \ \big|: a^2$, т.к. $a\neq 0$.

$q^2 = 1 + q^4 - q^2$

$q^4 - 2q^2 + 1 = 0$

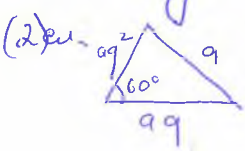
$q^2 = t \geq 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t_{1,2} = 1;$

$q^2 = 1 \Rightarrow q = 1$ или $q = -1 < 0$ – не подходит, т.к. $q>0$.

если $q=1$, тогда все стороны в Δ равны a, и все углы равны 60°.



$$\cos 60^\circ = \frac{a^2q^4 + a^2q^2 - a^2}{2a^2q^3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{q^4+q^2-1}{2q^3}$$

$q^4+q^2-1 = q^3 \Rightarrow q^4+q^2-q^3-1=0.$

$q^4-q^3+q^2-1=0.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Лист№2.

$(q-1)(q^3+q+1)=0$

$q=1$ или $q^3+q+1=0$.

$q^3=-(q+1)$

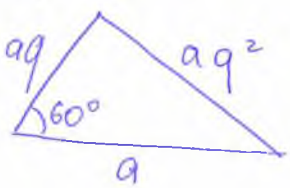
$q^3=-q-1$

т.к. $q>0$, значит $q^3>0$, тогда $(-q-1)<0$

$\varnothing$

значит так же получим равносторонний Δ со стороной a и углами в $60°$.

(3) случай.



$$\cos 60° = \frac{a^2+a^2q^2-a^2q^4}{2a^2q}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1+q^2-q^4}{2\cdot q}$$

$1+q^2-q^4=q$

$q^4-q^2+q-1=0$.

$q_1=1$.

$(q-1)(q^3+q^2+1)=0$

$q=1$ или $q^3+q^2+1=0$.

т.к. $q>0$, значит $q^3+q^2+1>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varnothing$

получим равносторонний Δ со стороной a и углами $60°$.

Ответ: стороны: a, a, a

углы: $60°, 60°, 60°$.

+

Лист №3.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задача 5.

Док-ть: $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg^4\alpha.$

Док-во.

$$tg^4\alpha=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha)^2}{(\cos^2\alpha)^2}=\frac{\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\cancel{4}}}{\frac{1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\cancel{4}}}.$$

$$=\frac{1-2\cos 2\alpha+\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}{1+2\cos 2\alpha+\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}=\frac{\frac{2-4\cos 2\alpha+1+\cos 4\alpha}{2}}{\frac{2+4\cos 2\alpha+1+\cos 4\alpha}{2}}=\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$$

что и требовалось доказать. +

Задача 7.

Док-ть: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Док-во.

1) ~~П~~роверим для $n=1$: $1\cdot(1+1)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ – верно.

2) Допустим, выр-ние верно для n, тогда для $n+1$:

$$\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}_{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}+(n+1)(n+2)=\cancel{(n+1)(n+2)}$$

, из предположения для n

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{3(n+1)(n+2)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$, что

и требовалось доказать.

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}=\frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}.$$ +

Лист №4.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241.

Задача 2.

Ц.	Р.	Ф.
0°	0°	32°
100°	80°	212°
x	y	z

Пусть $x°$ - градусы в Цельсиях.
Тогда $y° = k_1 \cdot x° + b_1$ - градусы Реомюр.
а $z° = k_2 \cdot x° + b_2$ - градусы Фаренгей.
~~Цел~~ Получим систему:

$$(1)\begin{cases} 0 = k_1 \cdot 0 + b_1 \\ 80 = 100 \cdot k_1 + b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ k_1 = 0,8 \end{cases}$$

$$y° = 0,8 \cdot x°$$

$$\begin{cases} 32 = k_2 \cdot 0 + b_2 \Rightarrow b_2 = 32 \\ 212 = k_2 \cdot 100 + b_2 \end{cases}$$

$100 \cdot k_2 = 180 \Rightarrow k_2 = 1,8.$ $z° = 1,8x° + 32$

Тогда если значения в Цельсиях и в Фаренгейтах совпадут, получим:

$x = 1,8x + 32$

$0,8x = -32$

$x = -40$

Тогда найдём показания термометра в гр. по Реомюру: $\cancel{z°} = y° = 0,8 \cdot (-40°) = -32°.$

Ответ: $-32°$. +

Лист № 5.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задача 6.

До встречи велосипедисты ехали

$t = \frac{S}{V_{сближ.}} = \frac{300 \text{ км}}{50 \frac{км}{ч}} = 6 ч$

$V_{сближ.} = V_1 + V_2 = 50 \frac{км}{ч}$

$S_{осы} = t \cdot V_{осы} = 6 ч \cdot 27 \frac{км}{ч} = 162 \text{ км}.$

Ответ: $S_{осы} = 162$ км. +

Задача 1.

$A = \left(3{,}018 - \frac{2{,}4\sqrt{8\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2\frac{1}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + 1{,}5\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot$

$\cdot 10^3 = \left(3{,}018 - \frac{-\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{12}{5}\sqrt{\frac{25}{3}}}{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{16\cdot 2}} \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot 10^3 =$

$= \left(3{,}018 - \frac{15\sqrt{\frac{1}{3}} - 4\sqrt{3}}{10\sqrt{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot 10^3 = \left(3{,}018 - \frac{\sqrt{\frac{15\cdot 15}{3}} - \sqrt{16\cdot 3}}{\sqrt{\frac{100}{2}} - \sqrt{16\cdot 2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot$

$\cdot 1000 = \left(3{,}018 - \frac{(\sqrt{75} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{50} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{3}}\right) \cdot 1000 = \left(3{,}018 - \frac{\sqrt{150} - \sqrt{96}}{\sqrt{150} - \sqrt{96}}\right) \cdot$

$\cdot 1000 = (3{,}018 - 1) \cdot 1000 = 2018.$

Ответ: 2018. +

Лист № 6.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задание 3.

$x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\ldots}} = 64.$

$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\ldots}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{27}}.$

$x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\ldots} = 64.$

$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = S$ - сумма убывающей геом. прогрессии

$S = \frac{b_1}{1-q}$; $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$

$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$x^{\frac{3}{2}} = 64$

$\sqrt[2]{x^3} = 64$

$x^3 = 64^2$

$x^3 = (2^6)^2$

$x^3 = 2^{12}$

$x = 2^4 = 16$

Ответ: $x = 16$.

+

Лист №7.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задание 9.

$\cos^2 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x \le -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}(\underbrace{\cos 0}_{1} + \cos 2x)\cdot\cos 3x - \frac{1}{2}(\underbrace{\sin 0}_{0} - \sin 2x)\sin x \cdot \sin 3x \le -\frac{1}{8}$

$\frac{(1+\cos 2x)\cdot\cos 3x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\cdot\sin x\cdot\sin 3x \le -\frac{1}{8}$

~~$\cos 3x + \cos 2x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot \sin x \cdot \sin 3x \le -\frac{1}{4}$~~

Задание 8.

$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - 2x + 11y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5-y^2} \end{cases}$ ОДЗ: $5 - y^2 \ge 0$

$y^2 \le 5$

$-5 \le y \le 5$

$(5-y^2) - 6y^2 - y\sqrt{5-y^2} - 2\sqrt{5-y^2} + 11y = 3;$

т.к. $5-y^2 \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 - y^2 - 6y^2 - (y+2)\sqrt{5-y^2} + 11y = 3$

$(y+2)\sqrt{5-y^2} = 2 - 7y^2 + 11y$

значит, (у листа №8)

$\sqrt{5-y^2} = \frac{2-7y^2+11y}{y+2}$

не имеет корней.

ОДЗ: $\frac{-7y^2+11y+2}{y+2} \ge 0$

$$\begin{array}{r|l} -7y^2+11y+2 & y-2 \\ -7y^2+14y & -7y-3 \\ \hline -3y+2 & \\ -3y+6 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$(y-2)(-7y-3) - 4 \ge 0.$

-2 y

Лист № 8.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задание 8.

~~$x=\sqrt{5-y^2}$ ОДЗ: $5-y^2\geq0$~~

~~$(5-y^2)-6y^2$~~

ОДЗ: $y\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$.

$x^2-6y^2-xy-2x+11y-3=0$

~~$D=(6y)^2$~~

$x^2-x(y+2)-6y^2+11y-3=0$.

$D=(y+2)^2-4\cdot(-6y^2+11y-3)=$

$=y^2+4y+4+24y^2-44y+12=25y^2-40y+16=$

$=(5y+4)^2$

$x_{1,2}=\dfrac{y+2\pm\sqrt{(5y+4)^2}}{2}=\dfrac{y+2\pm(5y+4)}{2}$

$x_1=\dfrac{y+2+5y+4}{2}=\dfrac{6y+6}{2}=3y+3$

$x_2=\dfrac{y+2-5y-4}{2}=\dfrac{-4y-2}{2}=-2y-1$.

$x=\sqrt{5-y^2}$

$5-y^2\geq0$

$y^2\leq5$

$-\sqrt{5}\leq y\leq+\sqrt{5}$.

$3y+3=\sqrt{5-y^2}$

$9y^2+9+12y=5-y^2$

$10y^2+12y+4=0$

$5y^2+6y+4$

~~$-7y^2-3y+14y-6-4\geq0$~~

~~$-7y^2+11y-10\geq0$~~

~~$7y^2-11y+10\leq0$~~

~~$7y^2-11y+10=0$~~

~~$D=121-280<0$~~

$\longrightarrow\ \varnothing$

Лист №8.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25241

Задание 8.

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

$x=\sqrt{5-y^2}$ ОДЗ: $5-y^2\geq 0$

$y\in[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$

$x^2-x(y+2)-6y^2+11y-3=0.$

$D=(y+2)^2-4\cdot(-6y^2+11y-3)=$

$=y^2+4+4y+24y^2-44y-3=(5y+4)^2$

$\cancel{x_1=\frac{(y+2)+\sqrt{(5y+4)^2}}{2}=\frac{y+2+(5y+4)}{2}}$

~~если~~

$x_{1,2}=\frac{y+2\pm(5y+4)}{2}$

$x_1=3y+3$

$x_2=-2y-1$

x_1:

$\sqrt{5-y^2}=3y+3$

$5-y^2=9y^2+9+12y$

$10y^2+12y+4=0$

$5y^2+6y+2=0$

$D=36-40<0$

x_2:

$\sqrt{5-y^2}=-2y-1$

$5-y^2=(-(2y+1))^2$

$\cancel{25+y^4}$

$-2y-1>0.$