ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 751

Класс 10 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	4	5	4	10 0	10	10	15	15	10	88 78	восемьдесят восемь семьдесят восемь	[illegible]

№1

$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x+3)(x-3)$

$(x+3)((x+1)(x+5) - x(x-3)) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ (x+1)(x+5) - x(x-3) = 0 \end{array}\right.$

$x^2+6x+5-x^2+3x=0$

$9x=-5$

$x=-\frac{5}{9}$

Ответ: $-\frac{5}{9}$; -3.

№2

ОДЗ ?

$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$

$\sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x} \quad |^2$

$22-x = 4+10-x+4\sqrt{10-x}$

$8 = 4\sqrt{10-x}$

$2 = \sqrt{10-x}$

$10-x=4$

$x=6$

Ответ: 6.

№3

$\frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0$

$\frac{x^2+2+(x^2-1)\cdot 2}{x^2-1} < 0$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

ШИФР 751

№3

$$\frac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3x^2}{x^2-1} < 0$$

Воспользуемся методом интервалов ~~x≠0~~ $x \neq 0$, $\frac{3x^2}{x^2-1} = 0$

$x \neq 1$

$x \neq -1$

+ − − +

-1 0 1

~~x∈~~ Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$.

№4

$$\lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(3x+1)$$

$$3\lg 2 = \lg(3x+1) - \lg(x-13) \quad \text{ОДЗ?}$$

$$\lg 8 = \lg \frac{3x+1}{x-13}$$

$$8 = \frac{3x+1}{x-13}$$

$$8x - 104 = 3x+1$$

$$5x = 105$$

$$x = 21$$

Ответ: 21.

№5

$$5^{2x+1} > 5^x + 4$$

Найдём точку пересечения графиков 5^{2x+1} и $5^x + 4$

$$5^x(5^{x+1} - 1) = 4$$

Видим, что $5^x \neq 4 \Rightarrow 5^x = 1$

$$x = 0$$

$$1 \cdot (5-1) = 4$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 751

№5

Построим ~~хорошим~~ макет чертежа и воспользуемся методом областей

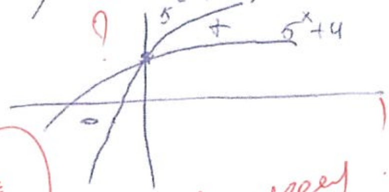


График неверн!

необоснован

$\Downarrow$

$x \in (0;+\infty)$

Ответ: $x \in (0;+\infty)$

№6

x - первый корпус, y - второй корпус, z - третий корпус.

$y = x-4$; $z = x+3$

$x+y+z = 119$

$x+x-4+x+3 = 119$

$3x = 120$

$x = 40$

$y = 36$ $\quad z = 43$

Ответ: в первом корпусе 40, во втором 36, в третьем 43.

№7

$S_1 = 3 \qquad S_2 = 4,5$

$$S_1 = \frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + \ldots$$

$$S_2 = \frac{b_2}{1-q_2} = b_2^2 + b_2 q_2 + \ldots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + \ldots$$

$b_2 = b_1^2$; $q_2 = q^2$

$$\frac{b_1}{1-q} = 3 \quad ; \quad \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{9}{2}$$

$b_1 = 3(1-q)$

$b_1^2 = 9(1-q)^2$

$2 \cdot \cancel{9}(1-q)^2 = \cancel{9}(1-q^2)$

$2q^2 - 4q + 2 = 1 - q^2$

$3q^2 - 4q + 1 = 0$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

(ab)c=a(bc) E=mc²

ШИФР 751

№7

$3q^2 - 4q + 1 = 0$

$K = -2$

$D = 4 - 3 = 1$

$q_1 = \frac{2+1}{3} = 1$

$q_2 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

$q \neq 1$, так как при убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$

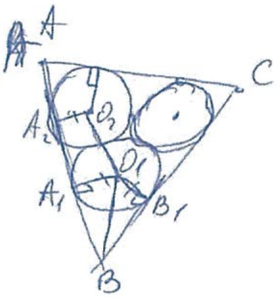
$q = \frac{1}{3}$ $\quad b_1 = 3 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 2$

Ответ: $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{3}$.

R – ?

№8

Наименьшая площадь коробки достигается, когда ABC равносторонний, так как ~~он~~ окружности касаются стороны они равны



$S \geq 4\sqrt{3} + 6$

$A_1A_2 = O_1O_2 = 2R$

$\angle A_1BB_1 = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\angle O_1A_1B = 30^\circ \Rightarrow \angle A_1O_1B = 60^\circ$

$\Downarrow$

$A_1B = tg60 \cdot A_1O_1 = R\sqrt{3}$

$AB = a = 2R\sqrt{3} + 2R = 2R(\sqrt{3}+1)$

$S_{камн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} + 6 = \frac{4R^2(4+2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{4}$

$\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3}) = R^2(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$

$R^2 = 1$

$R = 1$ Ответ: $R = 1$.

№9

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ tg x \cdot tg y = 3 \end{cases}$$

№9

$$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 = \frac{3}{4\cos x \cdot \cos y}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1$$

$$x - y = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$x = y + 2\pi n$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \sin(y + 2\pi n) = \sin y$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x = \frac{3}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \qquad n - ?$$

$$y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$

№10

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + 3ab^2 = 9$$

$$3a^2b + b^3 = \sqrt{80}$$

$$b = \frac{\sqrt{5}}{x}$$

$$b(3a^2 + b^2) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}$$

$$3a^2 + \frac{5}{x^2} = 4x$$

$$3a^2 = \frac{4x^3 - 5}{3x^2} > 0$$

$$x^3 > \frac{5}{4} \qquad x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}} > 1$$

$$\frac{4x^3 - 5}{3x^2} < 3$$

$$4x^3 - 9x^2 - 5 < 0 \Rightarrow 4x^3 - 9x^2 < 0$$

$$x < \frac{9}{4}$$

$$a^3 < 9$$

$$a < \sqrt[3]{9}$$

$$a < 3$$

ШИФР 751

№10

Так как $a \in R$, то $x=2$

$b=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(3a^2+\frac{5}{4}\right)=4\sqrt{5}$

$3a^2=8-\frac{5}{4}$

$3a^2=\frac{27}{4} \Rightarrow a^2=\frac{9}{4}$, $a=\frac{3}{2}$

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=$

$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\underline{\underline{3}}$