

Класс 10

Вариант 12

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	4	0	0	12	16	16	2	58 62	пятьдесят восемь шестьдесят два	

анализирую: все старается решать
близко

✓1

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} \cdot (2,012)^0 \cdot \sqrt{0,36} =$$

$$= \frac{3^{10} \cdot \frac{1}{27^3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \frac{1}{25^2} + 64^{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3)}}{(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \cdot 1 \cdot \sqrt{0,36} =$$

$$= \frac{\frac{3^{10}}{3^9} + 5^4 \cdot \frac{1}{5^4} + 64^{\frac{1}{3}}}{4 + 2\sqrt{4-3}} \cdot 0,6 = \frac{3 + 1 + \sqrt[3]{64}}{4+2} \cdot 0,6 = \frac{4+4}{6} \cdot 0,6 =$$

$$= 8 \cdot 0,6 = 9,8$$

$$\frac{10\%}{100\%} A = B$$

$$\frac{A}{10} = 0,8$$

$$A = 8$$

Ответ: A=8

①

№2

Пусть V_1 и V_2 - ёмкости 1-ого и 2-ого танкера соответственно.
 v - скорость одной трубы.

$$t_1 = 11 \text{ ч.}$$

$$t_2 = 18 \text{ ч.}$$

$$t_1 = \frac{V_1 + \frac{1}{3} V_2}{4v} \quad | \cdot 4v$$

$$t_2 = \frac{V_1}{3v} + \frac{\frac{1}{4} V_2}{v} \quad | \cdot 3v$$

$$11 \cdot 4v = V_1 + \frac{1}{3} V_2$$

$$18 \cdot 3v = V_1 + \frac{3}{4} V_2$$

$$v = \frac{V_1 + \frac{1}{3} V_2}{44}$$

$$v = \frac{V_1 + \frac{3}{4} V_2}{54}$$

$$v = \frac{V_1}{44} + \frac{1}{132} V_2$$

$$v = \frac{V_1}{54} + \frac{3}{216} V_2$$

$$\frac{V_1}{44} + \frac{V_2}{132} = \frac{V_1}{54} + \frac{3V_2}{216}$$

$$V_1 \cdot \frac{54 - 44}{44 \cdot 54} = V_2 \cdot \frac{3 \cdot 132 - 216}{132 \cdot 216}$$

$$V_1 \cdot \frac{10}{44 \cdot 54} = V_2 \cdot \frac{396 - 216}{132 \cdot 216}$$

$$V_1 \cdot \frac{10}{44 \cdot 54} = V_2 \cdot \frac{180}{132 \cdot 216}$$

$$V_1 = \frac{18 \cdot 44 \cdot 54}{132 \cdot 216} \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 54}{11 \cdot 12 \cdot 54 \cdot 4} V_2 = \frac{3}{2} V_2$$

$$t_1 = \frac{V_1 + \frac{1}{3} V_2}{4v} = \frac{\frac{3}{2} V_2 + \frac{1}{3} V_2}{4v} = \frac{9+2}{6 \cdot 4} \cdot \frac{V_2}{v} = \frac{11}{24} \cdot \frac{V_2}{v}$$

$$11 = \frac{11}{24} \cdot \frac{V_2}{v}$$

$$\frac{V_2}{v} = 24$$

✓2

$$t_3 = \frac{v_2}{3v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{v_2}{v} = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ ч.}$$

Ответ: 8 часов.

✓4

$$(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1) = \frac{1}{4}x$$

Заметим, что $x=0$ - является решением

$$(\sqrt{1^2}-1)(\sqrt{1^2}+1) = \frac{1}{4} \cdot 0$$

$$0 \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot 0$$

$$0 = 0$$

Тогда пусть $x \neq 0$

$$(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1) = \frac{1}{4}x \quad \cdot (\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{1-x^2}+1) = \frac{1}{4}x(\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$(1+x-1)(\sqrt{1-x^2}+1) = \frac{1}{4}x(\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$x \cdot (\sqrt{1+x^2}+1) = \frac{1}{4}x(\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$4\sqrt{1-x^2}+4 = \sqrt{1+x^2}+1$$

$$\sqrt{1+x^2} - 4\sqrt{1-x^2} = 3$$

$$(\sqrt{1+x^2} - 4\sqrt{1-x^2})^2 = 9$$

$$1+x+16(1-x) - 8\sqrt{(1+x)(1-x)} = 9$$

$$17-15x - 8\sqrt{(1+x)(1-x)} = 9$$

$$8-15x = 8\sqrt{1-x^2}$$

$$8-15x \geq 0$$

$$x \leq \frac{8}{15}$$

$$\text{т.е. } 8\sqrt{1-x^2} \geq 0$$

ОДЗ

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$x \in [-1; 1]$$

③

14

$$8 - 15x = 8 \sqrt{1 - x^2}$$

$$(8 - 15x)^2 = 64(1 - x^2)$$

~~$$64 - 240x + 225x^2 = 64 - 64x^2$$~~

~~$$289x^2 - 240x + 64 = 0$$~~

$$64 - 240x + 225x^2 = 64 - 64x^2$$

$$289x^2 - 240x = 0$$

$| : 289$

$$x \left(x - \frac{240}{289} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{240}{289} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{240}{289} \\ x \leq \frac{8}{15} \end{cases}$$

$0 \leq \frac{8}{15}$ это верно, но $x \neq 0$ не подходит.

$$\frac{240}{289} \leq \frac{8}{15}$$

$$3600 \leq 2312$$

это неверно.

Значит в этом случае решения нет.

Значит есть только одно решение $x = 0$

Ответ! $x = 0$

N7

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$$

3

$$6x-x^2-5 \geq 0$$

$$x^2-6x+5 \leq 0$$

$$(x-5)(x-1) \leq 0$$



$$x \in [1; 5]$$

$$7-2x \geq 0$$

$$2x \leq 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$8x-x^2-12 \geq 0$$

$$x^2-8x+12 \leq 0$$

$$(x-6)(x-2) \leq 0$$



$$x \in [2; 6]$$

$$\begin{cases} x \in [1; 5] \\ x \leq 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3,5 \\ x \in [2; 6] \end{cases}$$

$$x \in [2; 3,5]$$

Возведем обе части неравенства в квадрат.

$$(\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x})^2 \geq 8x-x^2-12$$

$$6x-x^2-5 + 7-2x - 2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)} \geq 8x-x^2-12$$

$$4x-x^2+2 - 2\sqrt{(x-5)(x-1)(7-2x)} \geq 8x-x^2-12$$

$$14-4x \geq 2\sqrt{(x-5)(x-1)(7-2x)}$$

$$7-2x \geq \sqrt{(x-5)(x-1)(7-2x)}$$

$$(7-2x)^2 \geq (x-5)(x-1)(7-2x)$$

$$(2x-7)((2x-7)-(x-5)(x-1)) \geq 0$$

$$(2x-7)(2x-7-x^2+6x-5) \geq 0$$

$$(2x-7)(8x-x^2-12) \geq 0$$

$$(2x-7)(x^2-8x+12) \leq 0$$

$$\begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ x \leq 3,5 \end{cases}$$

5

№ 7

$$\begin{aligned}(2x-7)(x^2-8x+12) &\leq 0 \\ (x-3,5)(x-6)(x-2) &\leq 0\end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [3,5; 6]$$

Замечание:

Возводить в квадрат можно только если

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq 0$$

$$\sqrt{6x-x^2-5} \geq \sqrt{7-2x}$$

$$6x-x^2-5 \geq 7-2x$$

$$x^2-8x+12 \leq 0$$

$$(x-6)(x-2) \leq 0$$



$$x \in [2; 6]$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [3,5; 6] \\ x \in [2; 6] \\ x \leq 3,5 \\ x \in [2; 3,5] \end{cases}$$

$$x = \{2; 3,5\}$$

Ответ: $x = \{2; 3,5\}$

✓ 9

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2014} - \frac{1}{x+2015} &= \frac{x+2015 - x - 2014}{(x+2014)(x+2015)} = \frac{1}{(x+2014)(x+2015)} \\ \frac{1}{x+2015} - \frac{1}{x+2016} &= \frac{x+2016 - x - 2015}{(x+2015)(x+2016)} = \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} \\ \frac{1}{x+2016} - \frac{1}{x+2017} &= \frac{x+2017 - x - 2016}{(x+2016)(x+2017)} = \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} \\ \frac{1}{x+2017} - \frac{1}{x+2018} &= \frac{x+2018 - x - 2017}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} &= \\ = \frac{1}{x+2014} - \frac{1}{x+2018} &= \frac{x+2018 - x - 2014}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{4}{(x+2014)(x+2018)} \\ \frac{1}{999999} &= \frac{4}{(x+2014)(x+2018)} \end{aligned}$$

$$x^2 + 4032x + 4064252 = 4000000 - 4$$

$$x^2 + 4032x + 64256 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 4032^2 - 4 \cdot 64256 = 16257024 - 257024 = 16000000 = \\ &= (4000)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4032 \pm 4000}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4032 + 4000}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \quad x_2 = \frac{-4032 - 4000}{2} = \frac{-8032}{2} = -4016$$

$$\textcircled{2} \text{ Ответ: } x = \{-4016, -16\}$$

1/8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}$$

003

$$\begin{aligned} \sin x - \cos y &\geq 0 \\ \sin x &\geq \cos y \end{aligned}$$

$$\cos x \geq 0$$

$$\sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x$$

$$+ \begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x \\ \cos x + \cos y = \sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

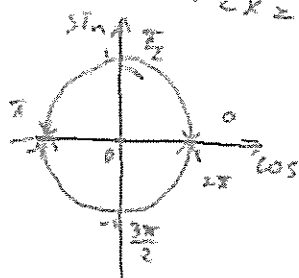
$$\sin x + \cos x = 1$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$$

$$1 + \sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = 0$$



$$2x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Разберём случаи:

1) $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 0; \quad \cos x = 1$$

$$\cos x + \cos y = \sin^2 x$$

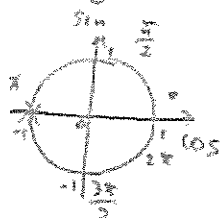
$$1 + \cos y = 0$$

$$\cos y = -1$$

8

№ 8

$$\cos y = -1$$



$$y = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

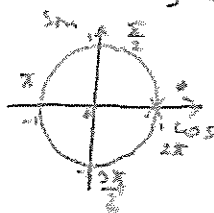
$$\begin{aligned} \sin x &\geq \cos y \\ 0 &\geq -1 \\ \text{Верно} \end{aligned}$$

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$

$$\sin x = 1 \quad \cos x = 0$$

$$\cos x + \cos y = \sin^2 x.$$

$$\cos y = 1$$



$$\begin{aligned} \sin x &\geq \cos y \\ 1 &\geq 1 \\ \text{Верно} \end{aligned}$$

$$y = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

3) $x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$

$$\sin x = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos x + \cos y = \sin^2 x$$

$$\cos y = 1$$

$$y = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \sin x &\geq \cos y \\ 0 &\geq 1 \end{aligned}$$

не верно!

Нет решения.

4) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$

$$\sin x = -1 \quad \cos x = 0$$

$$\cos x + \cos y = \sin^2 x$$

$$\cos y = 1$$

$$\sin x \geq \cos y$$

$$-1 \geq 1$$

не верно!

Нет решения.

Ответ: $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$
 $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k)$

$$n, k \in \mathbb{Z}.$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИОР 26444

№10

$$(2a - 6)x^2 + (32 - 10a)x - a - 8 < 0$$

$$2x^2 \cdot a - 6x^2 + 32x - 10xa - a - 8 < 0$$

$$2x^2 \cdot a + 10x \cdot a + a > -6x^2 + 32x - 8$$

$$a(2x^2 + 10x + 1) > -6x^2 + 32x - 8$$

При $2x^2 + 10x + 1 > 0$

$$a > \frac{-6x^2 + 32x - 8}{2x^2 + 10x + 1}$$

т.к. $a > 2$, то

$$2 > \frac{-6x^2 + 32x - 8}{2x^2 + 10x + 1}$$

(Если выражение больше 2-х, то при а ~~меньше~~ ~~большее~~ логичнее между 2 и значением выражения, неравенство не выполняется)

$$4x^2 + 20x + 2 > -6x^2 + 32x - 8$$

$$10x^2 - 12x + 10 > 0$$

$$10x^2 - 12x + 10 = 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 10 = 144 - 400 = -256 < 0$$

значит $10x^2 - 12x + 10 > 0$ при любом x .

x любое, при котором $2x^2 + 10x + 1 > 0$

При $2x^2 + 10x + 1 < 0$

$$a < \frac{-6x^2 + 32x - 8}{2x^2 + 10x + 1}$$

Аналогично

$$4 > \frac{-6x^2 + 32x - 8}{2x^2 + 10x + 1}$$

$$8x^2 + 40x + 4 \leq -6x^2 + 32x - 8$$

$$14x^2 - 12x + 12 \leq 0$$

$$7x^2 - 6x + 6 \leq 0$$

№10

$$7x^2 - 6x + 6 \leq 0$$

$$7x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 6 = 36 - 168 = -132 < 0$$

$7x^2 - 6x + 6$ не имеет корней.

Значит неравенство не выполняется.

При $2x^2 + 10x + 1 = 0$

$$a \cdot 0 > -6x^2 + 32x - 8$$

$$6x^2 - 32x + 8 > 0$$

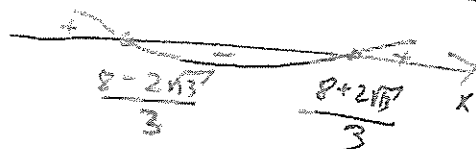
$$3x^2 - 16x + 4 > 0$$

$$3x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 256 - 48 = 208$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm 4\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{3}$$

$$3\left(x - \frac{8 - 2\sqrt{13}}{3}\right)\left(x - \frac{8 + 2\sqrt{13}}{3}\right) > 0$$



$$x \in (-\infty; \frac{8 - 2\sqrt{13}}{3}) \cup (\frac{8 + 2\sqrt{13}}{3}; +\infty)$$

$$2x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 2 = 100 - 8 = 92$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{23}}{2}$$

Заметим, что

$$\frac{-5 + \sqrt{23}}{2} < \frac{8 - 2\sqrt{13}}{3}$$

$$-15 + 3\sqrt{23} < 16 - 4\sqrt{13}$$

ШИОР 26444

✓ 10

$$-15 + 3\sqrt{23} < 16 - 4\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{23} + 4\sqrt{13} < 31$$

$$207 + 208 + 24\sqrt{289} < 961$$

$$24 \sqrt{299} \leq 546$$

$$4 \sqrt{299} < 91$$

299.16 < 8281

4701 < 8281

4

$$\frac{-5 - \sqrt{23}}{2} < \frac{-5 + \sqrt{23}}{2} < \frac{0 - 2\sqrt{3}}{3}$$

$$X = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{23}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{23}}{2} \right\} \quad \text{ногагаг}$$

Для 1-го случая.

$$(2x^2 + 10x + 1) > 0$$

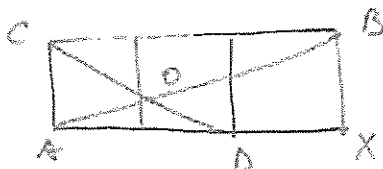
$$2 \left(x - \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \right) \left(x - \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right) > 0$$

$$\begin{array}{r} -5 = 127 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 + 127 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow X &\in \left(-\infty; -\frac{5-\sqrt{23}}{2}\right) \cup \left(-\frac{5+\sqrt{23}}{2}; +\infty\right) \\ \hookrightarrow X &= \left\{ \frac{-5+\sqrt{23}}{2}; \frac{-5-\sqrt{23}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ober: $x \in (-\infty; \frac{-5 - \sqrt{23}}{2}] \cup [\frac{-5 + \sqrt{23}}{2}; +\infty)$

№3



$$\operatorname{tg} ADB = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ADB = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} BAD = \frac{BX}{AX} = \frac{1}{3}$$

$$\angle BAD = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

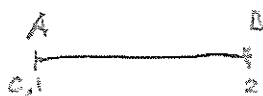
$$\angle AOD = 180^\circ - \angle BDA - \angle BAD = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

$$\angle COA = 180^\circ - \angle AOD = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

Ответ:

$$\angle COA = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

№6



Пусть собака из пункта А встретит велосипедиста из В
за t часов.



Рассчитаем ^{суммарное} расстояние, которое проехали
оба велосипедиста

$$12t + 13t = 25t \text{ км. проехали оба.}$$

Пусть S_t — ~~суммарное~~ полное время движения собаки.
На каждом промежутке от одного человека к другому,
велосипедисты сближались на 25 км, значит
по промежуткам S_t часов, ~~они~~ они пройдут всё
расстояние от А до В. Значит:

$$75 = 25 \cdot S_t$$

$$S_t = 3 \text{ ч.}$$

Пусть собака прошла L км

$$L = 25 \cdot S_t = 13 \cdot 3 = 39 \text{ км.}$$

Ответ: 39 км.

(13)

