

ШИФР 22832

Класс 9 Вариант 1-2 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ имени М.Э.БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	8	12	8	12	16	0	76	семьдесят шесть	<i>1h</i>

Задача №1

$$4 \cdot \frac{3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}}{1,5} = 4 \cdot \frac{\frac{11}{3} - \frac{13}{6}}{1,5} = 4 \cdot \frac{\frac{22-13}{6}}{1,5} = 4 \cdot \frac{\frac{9}{6}}{1,5} = 4 \cdot \frac{1,5}{1,5} = 4$$

шестьдесят два *семьдесят шесть* *английский!* *банальс*

Ответ: 4

Задача №2

Пусть l (км) - расстояние от А до В, пусть x (км/ч) - начальная скорость автомобиля. Тогда расстояние l со скоростью x автомобиль проходит за $\frac{l}{x}$ часов, а по условию это время равно 2,5 часов. После увеличения скорости она стала равна $x+20$ (км/ч), автомобиль проезжал расстояние $l+15$ (км) за время $\frac{l+15}{x+20}$, по условию равное 2 часа. Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{l}{x} = 2,5 \\ \frac{l+15}{x+20} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 2,5x \\ l+15 = 2x+40 \end{cases} \Rightarrow 2,5x+15 = 2x+40$$

$$0,5x = 25$$

$$x = 50$$

$$l = 2,5 \cdot 50 \text{ (км)} = 125 \text{ км} - \text{искомое расстояние}$$

Ответ: расстояние от А до В равно 125 км



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22832

Задача №4

$$\sqrt{2x-3} < 3$$

Область допустимых значений:

$$2x-3 \geq 0$$

$$2x \geq 3$$

$$x \geq 1,5$$

$$\sqrt{2x-3} < 3$$

$$2x-3 < 9$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

$$x \in [1,5; 6)$$

Ответ: 2

Задача №5

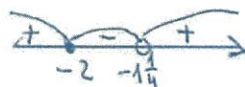
$$\frac{4-x}{4x+5} \leq -2$$

$$\frac{4-x}{4x+5} + 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x+8x+10}{4x+5} \leq 0 \quad \frac{7x+14}{4x+5} \leq 0 \quad | :7$$

$$\frac{x+2}{4x+5} \leq 0$$

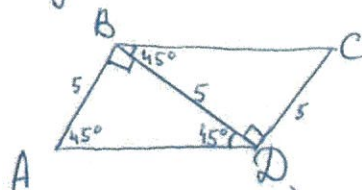
Н.ф.: $x = -2$
 $x \neq -\frac{5}{4}$



$x \in [-2; -\frac{5}{4})$ Одно целое значение: $x = -2$

Ответ: 1

Задача №6



Дано: $ABCD$ - пар-м

BD - диагональ; $\angle ABD = 90^\circ$; $\angle DBC = 45^\circ$; $BD = 5$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

$\angle CBD = \angle BDA$ (т.к. накрест лежащие) $= 45^\circ$



2) $\triangle ABD$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle BAD + \angle BDA = 90^\circ$

$$\angle BDA = 45^\circ \Rightarrow \angle BAD = 45^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ - равнобедренный $\Rightarrow AB = BD = 5$

3) $AB = CD = 5$ (т.к. стороны пар-ма)

4) $\angle BDC = \angle ABD = 90^\circ$ (т.к. накрест лежащие при $AB \parallel CD$)

$$5) S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 25$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 25$$

$$S_{ABCD} = 25$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCD} = 25$$

Задача №7

$$\sqrt{-x^2 - x + 12} = 3x - 9 \geq 0$$

Область допустимых значений:

$$-x^2 - x + 12 \geq 0$$

$$x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$\text{или } (x-3)(x+4) \leq 0$$

$$x \in [-4; 3]$$

$$\sqrt{-x^2 - x + 12} = 3x - 9$$

$$-x^2 - x + 12 = 9x^2 + 81 - 54x$$

$$10x^2 - 53x + 69 = 0$$

$$D = 2809 - 2760 = 49$$

$$x_1 = \frac{53+7}{20} = 3$$

$$x_2 = \frac{46}{20} = 2,3$$

$$\text{Ответ: } x = 3; x = 2,3$$

Задача №8

Пусть $n = 4k$, где k - целое число

$$16k^2 - 752k + 2752 < 0 \quad | : 16$$

$$k^2 - 47k + 172 < 0$$

$$D = 2209 - 688 = 1521 = 39^2$$

$$k_1 = \frac{47+39}{2} = 43$$

$$k_2 = 4$$



$$k \in (4; 43)$$

Нас интересуют только целые k , то есть:

$$k_1 = 5 \quad n_1 = 4k_1$$

$$k_2 = 6 \quad n_2 = 4k_2$$

$$k_3 = 7 \quad \dots$$

$$k_4 = 8 \quad \dots$$

$$\dots$$

$$k_{38} = 42 \quad n_{38} = 4k_{38}$$

каждое из этих n удовлетворяет неравенству

$$\Sigma = n_1 + n_2 + \dots + n_{38} = 4k_1 + 4k_2 + \dots + 4k_{38} = 4(k_1 + k_2 + \dots + k_{38})$$

равно сумме первых 42 натуральных чисел — сумма первых 42 натуральных чисел. Сумма ~~первых~~ первых последующих чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Докажем это по индукции:

База: $n = 1$; $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ верно

Переход: Пусть верно для n , докажем для $n+1$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + n + n+1 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

т.е. г.

$$\Sigma = 4 \left(\frac{42 \cdot 43}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} \right) = 4(903 - 10) = 4 \cdot 893 = 3572$$

Ответ: 3572

128



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22832

Задача №10

цифры
Сумма n первых подряд идущих чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Д-м по индукции

База: $n=1$ $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ верно

Переход: Пусть для n - верно

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Д-ем для $n+1$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n+1 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

т.т.г.

$$10+11+\dots+1000 = (1+2+3+\dots+1000) - (1+2+\dots+9) = \frac{500 \cdot 1001}{2} -$$

$$- 45 = 500455$$

Ответ: 500455

Задача №3

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sqrt[m]{mn} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{mn}{m+\sqrt[m]{mn}} \right) : \frac{\sqrt[m]{mn} - \sqrt[n]{n}}{m-n} - m\sqrt[n]{n} \Big)^2 : \sqrt[m]{mn \sqrt[m]{mn}} = \\ & = \left(\frac{m\sqrt[m]{mn} + mn - mn}{\sqrt[m]{mn}(\sqrt[m]{mn} + \sqrt[n]{n})} \right) \cdot \frac{(\sqrt[m]{mn} + \sqrt[n]{n})(\sqrt[m]{mn} - \sqrt[n]{n})}{\sqrt[m]{mn} - \sqrt[n]{n}} - m\sqrt[n]{n} \Big)^2 : \sqrt[m]{m^3 n^3} = \\ & = \left(\frac{m\sqrt[m]{mn} (\sqrt[m]{mn} - \sqrt[n]{n})(\sqrt[m]{mn} + \sqrt[n]{n})}{\sqrt[m]{mn}(\sqrt[m]{mn} + \sqrt[n]{n})} - m\sqrt[n]{n} \right)^2 : \sqrt[m]{mn} = \end{aligned}$$

$$= \left(m\sqrt[m]{mn} + \cancel{m\sqrt[n]{n}} - \cancel{m\sqrt[n]{n}} \right)^2 : \sqrt[m]{mn} = \frac{m^2 \sqrt[m]{mn}}{\sqrt[m]{mn}} = m^2$$

$$m=3 \Rightarrow m^2=9$$

Ответ: 9

Задача №9

Пусть x - кол-во заданий у Бори и Васи (заметьте, что x - натуральное), $x+5$ - у Ани. В первый день Боря решил a заданий, тогда Витя - $2a$, Аня - a . Во второй день Боря решил b заданий, Витя - b , Аня - $3b$.

По условию:

$$\begin{cases} x+5 = 1+a+3b \\ \frac{x-a-b}{x-2a-b} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 = a+3b \\ x-a-b = 3x-6a-3b \Rightarrow 2x = 2b+5a \Rightarrow x = b+2,5a \end{cases}$$

$$b+2,5a+4 = a+3b$$

$$2b = 1,5a+4$$

$$b = \frac{1,5}{2}a + 2 \Rightarrow b-a = 2 - \frac{1}{4}a \quad b > 0 \text{ и } a - \text{натуральное} \Rightarrow$$

$$x+4 = a + \frac{4,5}{2}a + 6$$

$$x = 3,25a + 2$$

$$\Rightarrow a - b \geq 1 \quad b-a \in \mathbb{N}$$

$$\text{на } a, \text{ и } b \text{ не равны } 0 \Rightarrow$$

$$2 - \frac{1}{4}a \geq 1$$

$$2 - \frac{1}{4}a \geq 0$$

$$\text{Так как } a > 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a > 0 \Rightarrow b-a < 2 \Rightarrow b-a = 1$$

$$2 - \frac{1}{4}a = 1$$

$$1 = \frac{1}{4}a; a = 4$$

$$x+5 = 3,25 \cdot 4 + 2 + 5 = 20$$

Ответ: 20 заданий.

(16) 20