ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32043

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	3	8	8	12	12	1	0	4	56	пятьдесят шесть	Кли-

пятьдесят шесть
аннемация
Баллева -

№1

$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4}} = 4,75 > 5$

4

$A \cdot 60\% = 5 \cdot 0,6 = 3$.

Ответ: 3.

№2

Пусть Лукойл добыл x млрд. куб. м. газа.

Тогда Новатэк добыл $2x$ млрд. куб. м. газа

Роснефть добыл $5x$ млрд. куб. м. газа

Газпром добыл $1,5x$ млрд. куб. м. газа.

$5x = 2x + 1,5x + x + 8$

$0,5x = 8$

$x = 16$

→ Лукойл добыл 16 млрд. куб. м. газа; Новатэк 32 млрд. куб. м. газа; Роснефть 80 млрд. куб. м. газа; Газпром 24 млрд. куб. м. газа

4

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a \cdot b)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32043

№4

$\sqrt{x^3-3x+1} - x = -1$

$\sqrt{x^3-3x+1} = x-1$

ОДЗ: $x-1 \geq 0$ $x^3-3x+1 \geq 0$

$x \geq 1$

$x^3-3x+1 = x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x = 0$

$x(x^2-x-1) = 0$

$x = 0$ $x^2-x-1 = 0$

$D = b^2-4ac = 5$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$0 < 1$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ т.к. $\sqrt{5}+1 > 2$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1 =$

$= \frac{(6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{8} - \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} + 1 = \frac{6+2\sqrt{5}+6\sqrt{5}+10}{8} -$

$- \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} + 1 = \frac{4+\sqrt{5}-3-3\sqrt{5}+2}{2} =$

$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

№5

$\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} \vee \frac{2}{3}$.

$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1 = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1 = \sin^2\alpha(\sin^4\alpha - 1) + \cos^2\alpha(\cos^4\alpha - 1)$

$3\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) + 3\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) \vee 2\sin^2\alpha(\sin^4\alpha - 1) + 2\cos^2\alpha(\cos^4\alpha - 1)$

$\sin^2\alpha(2\sin^4\alpha - 2 - 3\sin^2\alpha + 3) + \cos^2\alpha(2\cos^4\alpha - 2 - 3\cos^2\alpha + 3) \vee 0$

$\sin^2\alpha(2\sin^4\alpha - 3\sin^2\alpha + 1) + \cos^2\alpha(2\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha + 1) \vee 0$

~~$(1-\cos^2\alpha)(2\sin^4\alpha - 3\sin^2\alpha + 1) + (1-\sin^2\alpha)(2\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha + 1) \vee 0$~~

$\sin^2\alpha(2\sin^2\alpha - 1)(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1)(\cos^2\alpha - 1) \vee 0$

$(1-\cos^2\alpha)(2-2\cos^2\alpha - 1)(1-\cos^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1)(\cos^2\alpha - 1) \vee 0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32043

№5 (часть 2)

$-\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(1-2\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)(\cos^2\alpha-1)\vee 0$

$-\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)(2\cos^2\alpha-1)+\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)(\cos^2\alpha-1)=0$

$\Rightarrow \dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}.$

8

№6

Найдем время движения. В час пешеходы сближаются на 2 км, а т.к. расстояние между ними 10 км, то время движения 5 часов.

т.к. оса двигается с постоянной скоростью, то за 5 часов она пролетит $5\cdot 12=60$ км.

Ответ: 60 км.

12

№7

$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$

$8x-x^2-7+11-x-2\sqrt{8x-x^2-7}\sqrt{11-x}\geq 9x-x^2-18$

$\sqrt{(8x-x^2-7)(11-x)}\geq 2x-11$

$(8x-x^2-7)(11-x)\geq x^2-22x+121$

$-11x^2-77+88x-8x^2+x^3+x\geq x^2-22x+121$

$x^3-20x^2+117x-198\geq 0$

$(x-11)(x-3)(x-6)\geq 0$

$x\in[3;6]\cup[11;+\infty)$

Проверим ОДЗ:

$8x-x^2-7\geq 0$

$11-x\geq 0$

$9x-x^2-18\geq 0$

$9\cdot 11-4-8\sqrt{7}\geq 2$

$8\geq 8\sqrt{7}$

$\Rightarrow x\leq 11$ подходит любой т.к. $\sqrt{a}\geq 0$.

$x\in(-\infty;11)$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ т.к. в ходе решения выяснилось, что $x<11$ подходят всегда.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32093

№7 (часть 2)

$x^2-8x+7\le 0$

$D=b^2-4ac=36$

$x=\frac{8\pm 6}{2}$ $x=7$ $x=1$.

$x\in[1;7]$

$x\le 11$

$x^2-9x+18\le 0$

$D=b^2-4ac=9$.

$x=\frac{9\pm 3}{2}$

$x=6$ $x=3$.

$x\in[3;6]$

И

$x\in[3;6]$.

~~Ответ: $x\in[3;6]$~~

~~Но т.к. у нас $x\le 11$, то $x=11$, а это не входит в~~ ~~Ответ: нет.~~

Ответ: $x\in[3;6]$

№8

$$\begin{cases}\sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y\\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\sin^2 x-1}{\sin x}=\sin y & \frac{-\cos^2 x}{\sin x}=\sin y\\ \frac{\cos^2 x-1}{\cos x}=\cos y & \frac{-\sin^2 x}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$$

$\sin y=\frac{1}{\cos y}$.

$\sin y\cos y=1$

$2\sin y\cdot\cos y=2$

$\sin 2y=2 \Rightarrow y\in\varnothing$

Ответ: ~~$\varnothing$~~ решений нет.

(1)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32043.

№10

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$

$4x^2-2ax^2+13ax-27x+33-13a>0$

$a(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33>0.$

$4x^2-27x+33>a(2x^2-13x+13)$

$2x^2-13x+13>0.$

$D=b^2-4ac=169-8\cdot13=65$

$x\in(-\infty;\frac{13-\sqrt{65}}{4})\cup(\frac{13+\sqrt{65}}{4};+\infty)$

(4)

$a<\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13}$ т.к. $a\in(1;3)$, то

$1\le\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13}$

$6x^2-39x+39\le4x^2-27x+33$

$x^2-6x+3\le0.$

$D=b^2-4ac=24$

$x=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}$ $x=3+\sqrt{6}$ $x=3-\sqrt{6}$

$x\in(\frac{13+\sqrt{65}}{4};3+\sqrt{6}]\cup[3-\sqrt{6};\frac{13-\sqrt{65}}{4})$

$2x^2-13x+13<0$

$x\in(\frac{13-\sqrt{65}}{4};\frac{13+\sqrt{65}}{4})$

$a>\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13}$ т.к. $a\in(1;3)$, то

$3>\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13}$

$2x^2-13x+13>4x^2-27x+33$

$2x^2-7x+10<0$

$D=b^2-4ac=9$

$x=5;\ x=2.$

$x\in[2;5].$

$x\in[2;5]\cup(\frac{13+\sqrt{65}}{4};3+\sqrt{6}]$

$(\frac{13-\sqrt{65}}{4};2]\cup[5;\frac{13+\sqrt{65}}{4})$

$2x^2-13x+13=0 \Rightarrow$ верно!

~~$x \in \left(\frac{13+\sqrt{65}}{4}\right]$~~ №10 (часть 2)

Ответ: $x \in [2;5] \cup \left(\frac{13+\sqrt{65}}{4}; 3+\sqrt{6}\right]$

№7

$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$

$8x-x^2-7+11-x-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)} \geq 9x-x^2-18.$

$2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)} \leq -2x+22$

$\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)} \leq 11-x.$

$(11-x)(8x-x^2-7) \leq (11-x)^2$

$(11-x)(8x-x^2-7-11+x) \leq 0$

$(11-x)(-x^2+9x-18) \leq 0.$

$(x-11)(x-3)(x-6) \leq 0.$

(12)

$\Rightarrow x \in (-\infty; 3] \cup [6; 11].$

Проверим ОДЗ:

$8x-x^2-7 \geq 0$	$11-x \geq 0$	$9x-x^2-18 \geq 0$
$x^2-8x+7 \leq 0$	$x \leq 11$	$x^2-9x+18 \leq 0$
$x \in [1;7]$		$x \in [3;6].$

$\Rightarrow$ по ОДЗ подходят только 2 значения: 3; 6

Ответ: $x=3$; $x=6$.

№3.

Пусть у нас есть n деревьев. Вокруг каждого из них нарисуем круг радиусами по 6 метров. Условие того, что расстояние между деревьями не менее 12 м, эк

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32063

№3 (часть 2)

высаживаться можно и только можно, когда окружности круги не пересекаются. => нам надо проверить, можно ли уместить 2018 кругов с радиусом 6 в круг радиусом 269 м. деревья могут расти на краю и круги могут вылезать на свой периметр

S круга πR^2, поэтому сравним $\pi \cdot 269^2$ и $6^2 \cdot 2018 \cdot \pi$

$\pi \cdot 269^2 \vee 6^2 \cdot 2018 \cdot \pi$

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 43^2 \vee 6^2 \cdot 2018$

$43^2 = 1849 < 2018$ => суммарная площадь всех кругов больше площади большого круга. => => какие-то круги будут пересекаться => => расстояние будет меньше 12 метров между деревьями => 2018 деревьев

$\pi \cdot 261^2 \vee 6^2 \cdot 2018 \cdot \pi$

$3^2 \cdot (87)^2 \vee 6^2 \cdot 2018$

$87^2 \vee 4 \cdot 2018$

$87^2 = 7569 < 8032$. => суммарная S больше S круги => разместить 2018 деревьев невозможно.