ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

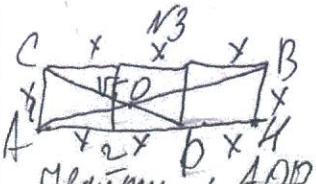
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22330

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	1	4	8	2	12	–	16	16	2	65	шестьдесят пять	



№3

Найти ∠AOD

Решение а) пусть сторона квадрата равна x

1) △ ACD по теореме Пифагора т.к ∠A=90°

$CD=\sqrt{4x^2+x^2}=x\sqrt{5}$

$\sin ADC=\frac{x}{x\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

2) △ AHB ∠H=90° по т Пифагора

$AB=\sqrt{9x^2+x^2}=x\sqrt{10}$

$\sin HAB=\frac{x}{x\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

3) $\angle AOD=180-(\angle A+\angle D)$

$\sin\angle AOD=\sin(180-(\angle A+\angle D))$

$\sin(180-(\angle A+\angle D))=\sin(\angle A+\angle D)$

$\sin(\angle A+\angle D)=\sin A\cdot\cos D+\sin D\cdot\cos A=\sin A\cdot\sin(90-D)+\sin D\cdot\cos\sin(90-A)=$

$=\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{10}+\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{10}+\frac{3\sqrt{2}}{10}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin O=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle AOD=135^0=\frac{3\pi}{4}$ (т.к. он тупой, т.к. AD – большая сторона)

Ответ: 135^0 $\frac{3\pi}{4}$ (4)

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22330

№1

$B = 0{,}1\ A$

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} \cdot (2{,}017)^0 : \sqrt{0{,}36}$$

$$B = \frac{(3^{-1})^{-10} \cdot (3^3)^{-3} + (5^{-1})^{-4} \cdot (5^{-2})^{-2} + \left((4^3)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{2+\sqrt{3} + 2\sqrt{4-3} + 2-\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \sqrt{0{,}6^2}$$

$$B = \frac{3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + (4^3)^{\frac{1}{3}}}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3+1+4}{6} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8$$

$A = 0{,}8 : 10 \cdot 100 = 8$

Ответ 8 ✓ (4)

I №2

I
II
III
IV
} $x + \frac{1}{3}y$

t 11

Пусть ~~25~~ $V_1 = x$ $V_2 = y$

Объёма $= z$

$J - ?$ $J = \frac{y}{3z}$

$$11(4z) = x + \frac{1}{3}y$$

$$z = \frac{x}{3z} + \frac{y}{z} = 18$$

$$\begin{cases} (1)\ \frac{x}{3z} + \frac{y}{z} = 18 \\ (2)\ 11 \cdot (4z) = x + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

(1) $\frac{x}{3z} + \frac{y}{z} = 18$

$\frac{x}{3z} + \frac{3y}{3z} = 18$

$x + 3y = 54z$

(2) $44z = x + \frac{1}{3}y$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = 44z \\ x + 3y = 54z \end{cases}$$

$2\frac{2}{3}y = 10z$

$\frac{8}{3}y = 10z$

смотреть следующий лист

$\frac{8}{3}y = 10z$

$8y = 30z$

$y = \frac{30z}{8}$ $\quad y = \frac{10}{8} \cdot 3z$

$\frac{10}{8} = \frac{y}{3z}$

$J = \frac{10}{8}$

$J = 1{,}25$

Ответ 1,25 часа ($\frac{5}{4}$ часа) (1)

№5

$tg15 \cdot tg25 \cdot tg35 \cdot tg85 = 1$

$tg15 \cdot tg25 - tg35 \cdot tg85 = tg85 \cdot ctg85$

$tg15 \cdot tg25 \cdot tg35 \cdot \sin 85 : \cos 85 = 1$

$\frac{\sin 15 \cdot \sin 25 \cdot \sin 35 \cdot \sin 85}{\cos 15 \cdot \cos 25 \cdot \cos 35 \cdot \cos 85} = 1$

$\sin 15 \cdot \sin 25 \cdot \sin 35 - \sin 85 = \cos 15 \cos 25 \cos 35 \cos 85$

$\sin^2 15 - \sin^2 25 \cdot \sin^2 35 - \sin^2 85 = \left(\sqrt{1-\sin^2 15} \cdot \sqrt{1-\sin^2 25} \sqrt{1-\sin^2 35} \cdot \sqrt{1-\sin^2 85} - 1\right)^2$.

$(\sin 15 \cdot \sin 25 \sin 35 - \sin 85)^2 = (1 - \sin^2 15 - \sin^2 25 + \sin^2 15 \cdot \sin^2 25) \cdot (1 - \sin^2 85 - \sin^2 35 + \sin^2 85 \cdot \sin^2 35)$

$(\sin 15 \sin 25 \sin 35 \sin 85)^2 = 1 - \sin^2 85 - \sin^2 35 + \sin^2 85 \cdot \sin^2 35 - \sin^2 15 + \sin^2 85 \cdot \sin^2 85 +$

$+ \sin^2 15 \cdot \sin^2 35 \mp \sin^2 15 \cdot \sin^2 85 \cdot \sin^2 35 \mp - \sin^2 25 + \sin^2 25 \sin^2 35 + \sin^2 25 \cdot \sin^2 85 \mp$

$- \sin^2 15 \cdot \sin^2 85 \cdot \sin^2 35 + \sin^2 15 \cdot \sin^2 25 - \sin^2 15 \cdot \sin^2 25 \cdot \sin^2 85 -$

$- \sin^2 15 \cdot \sin^2 25 \cdot \sin^2 35 + \sin^2 15 \cdot \sin^2 25 \cdot \sin^2 35 \cdot \sin^2 85$ (2)

№4

$(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$ ОДЗ $x\in[-1;1]$

$\sqrt{(1+x)(1-x)}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=\frac{1}{4}x$

пусть $\sqrt{1+x}=a$ $\sqrt{1-x}=b$

$ab+a-b-1=\frac{1}{4}x$

$a\cdot(b+1)-(b+1)=\frac{1}{4}x$

$a(b+1)=\frac{1}{4}x+(b+1)$

$a=\frac{\frac{1}{4}x+(b+1)}{b+1}$ $b+1\neq 0$

пусть $\sqrt{1+x}=a$ $\sqrt{1-x}=b$

$(a-1)\cdot(b+1)=\frac{1}{4}x$ обе части обязательно должны быть неотрицательны, т.к. из-за ОДЗ если один член произведения будет отрицательным

$(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

$(1+x-2\sqrt{1+x}+1)\cdot(1-x+2\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{16}x^2$

$(2+x-2\sqrt{1+x})\cdot(2-x+2\sqrt{1-x})=\frac{1}{16}x^2$

$4-2x+4\sqrt{1-x}\pm 2x-x^2+2x\sqrt{1-x}-4\sqrt{1+x}+2x\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{16}x^2$

$4+4\sqrt{1-x}-\frac{17}{16}x^2+2x\sqrt{1-x}-4\sqrt{1+x}+2x\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x^2}=0$

Допустим $x_1=0$, тогда $4+4-0+0-4+0-4=0$

$0=0$ верно

$\sqrt{1-x}=a$

$\sqrt{1+x}=b$

$y+ya-\frac{17}{16}x^2+2xa-yb+2xb-yab=0$

$-\frac{17}{16}x^2+2x\cdot(a+b)+y\cdot(a-b-ab)=0$

$K=1\cdot(a+b)$

$D_1=a^2-2ab+b^2+\frac{17}{4}\cdot(a-b-ab)$

$D_1=\frac{4a^2-8ab+4b^2+17\cdot4x-17b-17ab}{4}$

$D_1=\frac{4a^2-25ab+4b^2+17a-17b}{4}$

По теореме Виетта.

$x_1\cdot x_2=-\frac{4\cdot16(a-b-ab)}{17}$

$x_1=0$, значит $\frac{64}{17}(a-b-ab)=0$

$a-b-ab=0$

$\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}=0$

$\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x^2}$

$1-x-2\sqrt{1-x^2}+1+x=1-x^2$

$2-2\sqrt{1-x^2}=1-x^2$

$1-2\sqrt{1-x^2}=-x^2$

$x^2=2\sqrt{1-x^2}-1$

$x^4+6x^2+1=0$

Нет положительных корней ($x^2>0$ всегда)

Ответ: 0 (8)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22330

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

$(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$ $2<a<4$

1) если $a=3$ $2a-6=0$, то $(32-30)\cdot x-3-8<0$

$2x-11<0$

$2x<11$

$x<\frac{11}{2}$

2) если $a\neq 3$, то $(2a-6)x^2+(32-10a)\cdot x-a-8<0$.

$(2a-6)x^2+(32-10a)x-(a+8)=0$.

$x=16-5a$

$D_1=256-160a+25a^2+2a^2+10a-48$

$D_1=27a^2-150a+208=0$.

$D_1=75^2-27\cdot 208=3^2$

$a_1=\frac{75+3}{27}$ $a_2=\frac{75-3}{27}$

$a_1=\frac{26\cdot 3}{27\cdot 9}=\frac{26}{9}$ $a_2=\frac{8\cdot 24\cdot 3}{27\cdot 3}=\frac{8}{3}$

$a_1=$ $x=\frac{-16+5a}{2a-6}$ $a\in\left(\frac{8}{3};\frac{26}{9}\right)$

$x_1=$

$x_{1,2}=\frac{5a-16\pm\sqrt{27\cdot(a-\frac{26}{9})\cdot(a-\frac{8}{3})}}{2a-6}$

при каких x-?

Ответ $(2;\frac{8}{3})\cup(\frac{26}{9};3)\cup(3;4)$

(2)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 223310

$$\frac{1}{(x+2014)\cdot(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)\cdot(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)\cdot(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)\cdot(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

Пусть $x+2016=a$

$$\frac{1}{(a-2)\cdot(a-1)}+\frac{1}{(a+1)\cdot(a+2)}+\frac{1}{(a-1)\cdot a}+\frac{1}{a\cdot(a+1)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{(a+1)(a+2)+(a-2)\cdot(a-1)}{(a^2-1)\cdot(a^2-4)}+\frac{a+1+a-1}{a\cdot(a^2-1)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{a^2-1}+\frac{a^2+3a+2+a^2-3a+2}{a^4-5a^2+4}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2a^2}{a^4-a^2}+\frac{2a^2+4}{(a^2-1)\cdot(a^2-4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2\cdot(a^2-4)+2a^2+4}{(a^2-1)\cdot(a^2-4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4a^2-4}{(a^2-1)\cdot(a^2-4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{a^2-4}=\frac{1}{999999}$$

$$a^2-4=3999996$$

$$a^2=4\cdot10^6$$

$$a=\pm2000$$

$x+2000=$ $\quad x+2016=2000 \quad x+2016=-2000$

$x=-16 \quad x=-4016$

Ответ: $-16;-4016$ ✓ (16)

11 8

$\begin{cases} \sin x \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}$

$\sin x - \cos y = \cos^2 x$

$\sin x - \cos y = 1 - \sin^2 x$

$\cos y - \sin x = \sin^2 x - 1$

$\cos y - \sin x + 1 = \sin^2 x$

$\cos y - \sin x + 1 = \cos x + \cos y$

$1 = \cos x + \sin x \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ и $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$x = 0 + 2\pi n \; n \in Z$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \; n \in Z$

~~Проверка~~

$\cos y = 0 - 1$ $\quad y_2 = \cos y_2 = 1 - 0$

$\cos y = -1$ $\quad y = 0 + 2\pi n$

$y = \pi + 2\pi n \; n \in Z$

Проверка

$\sin 0 - \cos \pi = 1 > 0$ $\quad \sin \frac{\pi}{2} - \cos 0 = 1 - 1 = 0$

$\cos x = 1$ $\quad 1 = 1$ верно $\quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\quad 0 = 0$ верно.

Итак $(0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n) \; n \in Z$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 + 2\pi n\right)$ - решения системы

Ответ: $(0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n) \; n \in Z$ ✓

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 + 2\pi n\right) \; n \in Z$ ✓

16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22330

№6

A _____ B

$v_1 = 12$ км/ч.
$v_2 = 13$ км/ч.
$v_3 = 15$ км/ч.

1) Предположим, что собака была у более медленного велосипедиста

$$t = \frac{75}{13+15} = \frac{75}{28} = 2\frac{19}{28} \text{ часа.}$$

$$13 \cdot \frac{75}{28} = \frac{975}{28}$$

$$S_{\text{собаки}} = 75 - \frac{13 \cdot 75}{28} = \frac{1125}{28} \text{ км.}$$

$$S_{\text{велосипедиста}} = 12 \cdot \frac{75}{28} = \frac{900}{28} \text{ м.}$$

$$S_{\text{от вел дособ}} = \frac{1125}{28} - \frac{900}{28} = \frac{225}{28}$$

$$t = \frac{225}{28 \cdot 27} = \frac{27 \cdot 225}{27 \cdot 28} \quad c = \frac{75}{9 \cdot 28} \text{ с.}$$

$$S_{\text{собаки}} = \frac{75 \cdot 15}{9 \cdot 28} = \frac{125}{28} \text{ км.}$$

$$S_{\text{второго}} = \frac{75 \cdot 13}{9 \cdot 28} = \frac{25 \cdot 13}{3 \cdot 28} \text{ км.}$$

$$\Delta S_2 = \frac{125}{28} - \frac{25 \cdot 13}{3 \cdot 28} = \frac{375 - 325}{3 \cdot 28} = \frac{50}{3 \cdot 28}$$

2) $T_{\text{весь}} = \frac{75}{12+13} = 3$ часа

3) $S_{\text{весь}} = 3 \cdot 15 = 45$ км

Ответ 45 км ✓

(12)