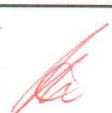


ШИФР 16223

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18.

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	2	4	8	8	12	12	16	—	16	82	восемьдесят два	

N4. $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1.$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1.$$

ОДЗ: $x - 1 \geq 0.$

$$x \geq 1.$$

$$x \in [1; +\infty)$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0.$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ (не удов. ОДЗ)} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \checkmark \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (не удов. ОДЗ)} \end{cases}$$

Отв: ~~0~~ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \checkmark$ 8



ШИФР

16223

$$N1. A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 = \frac{0,25 + 1}{4 - 5 \cdot 0,25 + \frac{9}{4}} +$$

$$\oplus. \frac{1,25}{6,25 - 1,25} + 4,75 = \frac{1,25}{5} + 4,75 = \oplus$$

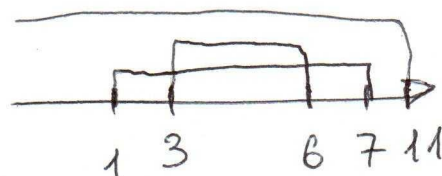
$$= 0,25 + 4,75 = 5.$$

$$\Rightarrow 0,6 \cdot 5 = 3$$

Отв: 3. ✓

$$N2. \sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$OZ3: \begin{cases} -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ -x^2 + 9x - 18 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \in [1; 7] \\ x \leq 11 \\ x \in [3; 6] \end{cases}$$



$$x \in [3; 6]. \checkmark$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{11 - x}$$

$$\underline{8x - x^2 - 7} \geq \underline{9x - x^2 - 18} + \underline{11 - x} + 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)}$$

$$0 \geq 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)}$$

Выражение справа $\geq 0 \Rightarrow$ неравенство выполняется только при равенстве.

$$2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)} = 0$$

$$(9x - x^2 - 18)(11 - x) = 0.$$

$$\begin{cases} x = 11 \\ 9x - x^2 - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (не удов. OZ3)} \quad \text{Отв: } 3, 6, 6$$

(12)

ШИФР

16223

$$\text{№ 2. } \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\cancel{\sin^2 x - 1 = \sin y}$$

$$\begin{cases} -\cos^2 x = \sin y \cdot \sin x \\ -\sin^2 x = \cos y \cdot \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos^2 x = 0,5(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ -\sin^2 x = 0,5(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \end{cases}$$

Сложим: $-1 = \cos(x-y) \Rightarrow x-y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Вычтем: $-\cos^2 x + \sin^2 x = \cancel{-\cos(x-y)} - \cos(x+y) \Rightarrow$
 $-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(x+y)$
 $-\cos 2x = -\cos(x+y)$

$$\cos 2x = \cos(x+y)$$

$$\cos 2x - \cos(x+y) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{3x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0$$

1) $3x+y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или 2) $x-y = 2\pi f, f \in \mathbb{Z}$

Также мы знаем, что $x-y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ (2) - не является решением. $\Rightarrow$

$$\textcircled{+} \begin{cases} 3x+y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow 4x = \pi + 2\pi k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k+n), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Тогда } y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi n}{2} - \pi - 2\pi n$$

$$y = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \frac{3\pi n}{2}, k, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k+n); -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \frac{3\pi n}{2}\right), n, k \in \mathbb{Z}$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Р2. «Победа»⁴ = x млрд. куб. м.

и «Роснефть»⁹ = y

и «Лукойл»⁴ = z

и Газпром нефть⁴ = a .

Итого: $x + y + z + a$.

По усл: $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10}$.

По усл: $a = 0,3y$.

По усл: $y = z + x + z + a$

$$y = z + x + z + 0,3y$$

$$\frac{7}{10}y = z + \frac{4}{10}y + \frac{2}{10}y$$

$$\frac{1}{10}y = z \Rightarrow y = 80 \text{ млрд. куб. м.} \Rightarrow z = 16 \text{ млрд. куб. м.}$$

$$\Rightarrow x = 32 \text{ млрд. куб. м.} \Rightarrow a = 24 \text{ млрд. куб. м.}$$

$$\Rightarrow x + y + z + a = 32 + 80 + 16 + 24 = 152 \text{ млрд. куб. м.}$$

Отв: ~~152~~ 152 млрд. куб. м.

См. усл. (2)

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y$$

$$\frac{y}{z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1} = 5$$

$$z = \frac{y}{5}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

16223

93. Пусть в парке всего x деревьев. Вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. Соч. усл. эти круги не пересекаются и $\checkmark$ расположены. В круге радиуса $256 + 6 = 264$ м. $\Rightarrow$ площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем нерав. $264^2 \pi \geq 36\pi \cdot x \Leftrightarrow x \leq 1936 \checkmark < 2018.$

100. $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0.$ 289. (8)

преобразуем: $(-2x^2 + 13x - 13)a + 4x^2 - 27x + 33 > 0$.
нер.-0 примет вид линейн. вид относ. a .

$$f(a) = k(x) \cdot a + b(x) > 0, \text{ где } k(x) = -2x^2 + 13x - 13,$$

$$b(x) = 4x^2 - 27x + 33, \text{ коэф. не зависят от } x$$

В зависимости от знака коэф. $k(x)$ при a левая часть нерав. явл. возрастающей ($k(x) > 0$) или убыв. ($k(x) < 0$), ф-цией от a . Если $k(x) = 0$ то это не зависит от a ф-ция.

т.к. $f(a) = k(x) \cdot a + b(x)$ - линейна её условие монотонности на интервале $(1, 3)$ равносильно:

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 13x - 13 + 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \\ (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 3 + 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \end{cases} \checkmark$$

см. профилем.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



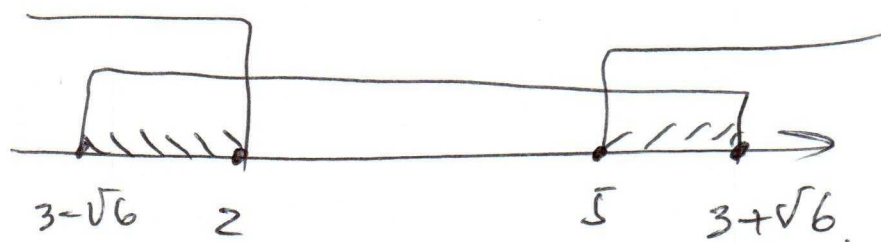
ШИФР

16223

110 (продолжение).

$$\begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 \geq 0 \\ -2x^2 + 12x - 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) \geq 0 \\ (x-3)^2 - 6 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \\ x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}] \end{cases}$$



Ans.: ~~$[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$~~
 $[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$ ✓

116



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

16223

N 5.
$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha)^3 = \sin^6 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^3 = 1 - \cos^6 \alpha - 3\cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)$$

Тогда числитель и знаменатель примут след. вид!

$$\frac{1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{1 - \cos^6 \alpha - 3\cos^2 \alpha + 3\cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{-2\cos^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{-3(-3\cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha))}$$

$$= \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{чтг.} \quad \checkmark \quad (8)$$

N 6. Скорость движения путешественника - $(5-3) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

$\Leftrightarrow V_{\text{ср}} = 2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Им втр. герц. $t_{\text{вср}} = \frac{L}{V} = 5 \text{ ч}$.

~~Путь~~, ~~расстояние~~ $S_{\text{ср}}$, $V = 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$,

пробегет расстояние $S = t_{\text{вср}} \cdot V = 5 \cdot 12 = 60 \text{ км}$.

Имб: 60 км.

(12)