

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР

21004

 Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

 Площадка написания Санкт-Петербургский Горный у-т.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	8	12	12	8	—	—	52	шестьдесят два	АНН

 аннексия
Балеев

$$N^{\circ} \textcircled{1} 2^{-2} + 2018^0$$

$$\frac{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{0,25 + 1}{4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4}} + 4,75 =$$

$$= \frac{1,25}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{1,25}{5} + 4,75 = 4,75 + 0,25 = 5 = A;$$

$$60\% \text{ от } A = 0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3. \quad \text{Ответ: } 3. \quad +45$$

$$N^{\circ} \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10} \quad \text{— соотношение объёмов добычи газа;}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 Н-тек Рос-ть Л-йл.

Тогда в этой - же системе: добычи газа "Газпромнефтью" составляет $\frac{3}{20}$ части.

Согласно условию, составим ур-е: Пусть x - объём всего добытого газа, тогда:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}x - \frac{3}{20}x = 8.$$

$$\frac{10}{20}x - \frac{4}{20}x - \frac{2}{20}x - \frac{3}{20}x = 8.$$

$$\frac{1}{20}x = 8; \quad x = 160 \text{ (млрд. куб.м.) — добыто газа всего.}$$

№ 2 (продолжение)

Тогда найдём объёмы добычи каждой из компаний:

- 1) $160 \cdot \frac{1}{2} = 80$ (млрд. куб. м.) - Роснефть
- 2) $100 \cdot \frac{1}{5} = 32$ (млрд. куб. м.) - Новатек
- 3) $160 \cdot \frac{1}{10} = 16$ (млрд. куб. м.) - Лукойл
- 4) $\frac{3}{20} \cdot 160 = 24$ (млрд. куб. м.) - Газпромнефть.

Ответ: 80 (млрд. куб. м.) - "Роснефть"
 32 (млрд. куб. м.) - "Новатек"
 16 (млрд. куб. м.) - "Лукойл"
 24 (млрд. куб. м.) - "Газпром нефть".

+ 45

№ 4

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1.$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

Т.к. (по условию) обе части неотрицательны, введём их в квадрат:

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1.$$

$$x^3 - x^2 - x = 0.$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 - x - 1 = 0.$$

(не удовл. $D(f)$,
не явл. реш.).

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1, \text{ значит, не явл. реш.-ом;}$$

$$\text{Значит, решение: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (удовл. условию (*))}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

(Продолжение работы - см. ...)

+ 85

$$D(f): \begin{cases} x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 \geq 0 \text{ (Условие (*))}. \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Проверки условия (*):

$$\frac{(1 + \sqrt{5})^3}{8} - \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} + 1 \geq 0.$$

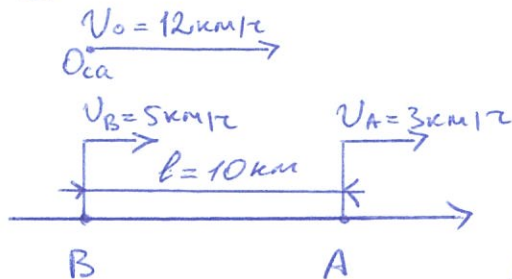
$$\frac{1 + 3\sqrt{5} + 3 \cdot 5 + 5\sqrt{5}}{8} - \frac{12 + 12\sqrt{5}}{8} + \frac{8}{8} \geq 0.$$

$$12 - 4\sqrt{5} \geq 0.$$

$$9 \geq 5(4), \text{ усл.-е (*)}$$

выполнено.

№ ⑥



Решение:

Т.к. один путешественник догоняет другого, расстояние между ними сокращается. Так как O_{ca} не останавливается, то время её полёта будет равно времени от начала путешествия пешеходов до их встречи.

Найдём это время: $V_{сбл.} = V_B - V_A = 2 \text{ (км/ч)}$; $t_{сбл.} = \frac{S_{AB}}{V_{сбл.}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (ч)}$

Значит, т.к. всё это время скорость O_{ca} была постоянна,

$$S_{O_{ca}} = V_{O_{ca}} \cdot t_{сбл.} = 12 \cdot 5 = 60 \text{ (км)}$$

Ответ: O_{ca} пролетела 60 км.

+125

№ ⑦

 O (по усл.)

 O (по св-ву)

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

Т.к. обе части (по св-ву и условию) неотрицательны, возведём их в квадрат

$$8x - x^2 - 7 - 2\sqrt{-(x-1)(x-7)(11-x)} + 11 - x \geq 9x - x^2 - 18$$

$$-2x + 22 \geq 2\sqrt{-(x-1)(x-7)(11-x)}$$

$$(11-x)^2 \geq -(x-1)(x-7)(11-x)$$

$$11-x \geq -(x-1)(x-7)$$

$$11-x \geq 8x - x^2 - 7$$

$$x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x = 6; x = 3 \text{ (удовл. усл-ю } 3 \leq x \leq 6)$$

Метод интервалов:

(Продолжение - см. далее)

ООМ:

$$\begin{cases} x \leq 11 \\ -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \\ -x^2 + 9x - 18 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} -x^2 + 8x - 7 \geq 0 & -x^2 + 9x - 18 \geq 0 \\ D = 64 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) & D = 81 - 4 \cdot (-1) \cdot (-18) \\ = 36; & = 9 \\ x_{1,2} = \frac{-8 \pm 6}{-2} & x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{-2} \\ x = 1; x = 7 & x = 6; x = 3 \end{array}$$

График - парабола, ветви вниз, $\Rightarrow$ решение: $1 \leq x \leq 7$

График - парабола, ветви вниз, значит, решение: $3 \leq x \leq 6$

Значит, общее условие (*)

$$3 \leq x \leq 6$$

№ 7 (Продолжение):

$$x^2 - 9x + 18 > 0$$



$f(0) > 0$, значит,

Но т.к. по условию (*) $x \in [3; 6]$, то
ответами являются $x = 3$ и $x = 6$.

Ответ: $x = 3$; $x = 6$.

+125

№ 5

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}.$$

Рассмотрим числитель:

$\sin^4 x + \cos^4 x - 1$; Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$$

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1;$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 1 = -2\sin^2 x \cos^2 x = -0,5 \sin^2 2x$$

Рассмотрим знаменатель:

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 1;$$

Из осн. триг. тождества:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1;$$

$$\sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = 1.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 1 = -3(\sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x) = -3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= -3\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= -\frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

В итоге:

$$\frac{-0,5 \sin^2 2x}{-\frac{3}{4} \sin^2 2x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

+85

№ ⑧

ооЗ?

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos^2 x = \sin y \sin x \\ -\sin^2 x = \cos y \cos x \end{cases}$$

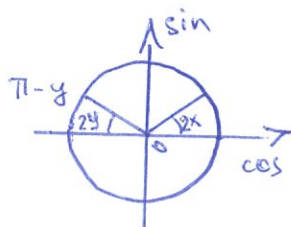
$$\begin{cases} -\cos x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin y \\ -\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos y \end{cases} \downarrow x$$

$$\cos x \cdot \sin x = \sin y \cdot \cos y$$

$$0,5 \sin 2x = 0,5 \sin 2y$$

$$\sin 2x = \sin 2y$$

Значит, $2x = 2y$ или $2x = \pi - 2y$.



$$\begin{cases} 2x = 2y \\ 2x = \pi - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = \frac{\pi}{2} - y \end{cases}$$

это зависимость
x от y,
а чему равно
x и y?

Ответ: ~~$\begin{cases} x = y \\ x = \frac{\pi}{2} - y \end{cases}$~~

Решение системы
не найдено !!!

??

~~± 80~~
оо
Баллов -

№ ③ Решение:

Т.к. расстояние между деревьями не менее 12 метров,
то при самой плотной посадке на радиусе любого круга ди-
аметром 12 м (радиусом 6 м) помещается не более 2х деревьев.

Тогда посчитаем площадь большого круга (всей рощи):

$$S_{\text{рощи}} = (258)^2 \pi \text{ (м}^2\text{)}.$$

+45

Тогда S каждого круга с двумя деревьями не менее $36\pi \text{ (м}^2\text{)}$

$$\text{Разделим: } \frac{(258)^2 \pi}{36 \pi} = \frac{43^2 \cdot 6^2}{6^2} = 43^2 = 1849 < 2018, \text{ значит,}$$

даже при самой плотной посадке в
роще не может быть больше 2018 деревьев.

(Конец работы)

