ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654

Класс 9 **Вариант** 1-1 **Дата Олимпиады** 10.02.18.

Площадка написания МГТУ им. Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	~~4~~ 5	~~4~~ 5	~~4~~ 5	~~8~~ 5	~~8~~ 5	—	~~8~~ 8	~~12~~ 12	~~1~~ 1	~~2~~ 2	~~51~~ 48	~~пятьдесят один~~ сорок восемь	

№1.

$$\frac{5\frac{1}{5}-4{,}1}{3\frac{2}{3}} = \frac{5{,}2-4{,}1}{3\frac{2}{3}} = \frac{1{,}1}{3\frac{2}{3}} = \frac{11}{10} : \frac{11}{3} =$$

$$= \frac{11\cdot 3}{10\cdot 11} = \boxed{0{,}3}$$

~~4~~ 5

№2.

Всего - 366 станков

Пусть x (станков) - изготовила 1-ая бригада, тогда 0,85x (станков) - изготовила 2-ая бригада, значит 1,2x (станков) - изготовила 3-я бригада.

По усл. зад. всего изготовили 366 станков. Получаем уравнение:

$$x+0{,}85x+1{,}2x = 366.$$

$$3{,}05x = 366$$

$$\frac{305}{100}x = 366$$

$$\frac{61}{20}x = 366$$

$$x = 366 : \frac{61}{20}$$

$$x = \frac{366\cdot 20}{61}$$

x = 120 (станков)

Ответ: 120.

~~4~~ 5

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654

№4

$\sqrt{5-3x} > 1.$

т.к. $\sqrt{5-3x} \geq 0$ и $1>0$, то можем в нер-ве обе части возвести в квадрат.

$5-3x > 1.$

$-3x > -4.$

$3x < 4.$

$x < \frac{4}{3}$

$x < 1\frac{1}{3}.$

Наибольшее целое решение = 1.

~~8~~ 5

Ответ: 1.

№7.

$\sqrt{-x^2+2x+35} = -x-5.$

Возведем обе части р-ва в квадрат:

$-x^2+2x+35 = (-x-5)^2$

$-x^2+2x+35 = x^2+10x+25$

$-x-5\geq 0$

$-x^2+2x+35 = x^2+10x+25$

$-2x^2-8x+10 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$2x^2+8x-10 = 0 \quad |:2$

~~8~~ 8

$x^2+4x-5 = 0$

$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 4+5=9$

$x_{1;2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2+3}{1} = 1. \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Ответ: -5; ~~1~~.

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 14654

№5.

$$\frac{13-x}{6-2x} > 4.$$

$$\frac{13-x}{6-2x} - 4 > 0$$

$$\frac{13-x-24+8x}{6-2x} > 0.$$

$$\frac{7x-11}{6-2x} > 0.$$

~~[illegible]~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x-11>0 \\ 6-2x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x-11<0 \\ 6-2x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x>11 \\ 2x<6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1\frac{4}{7} \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow 1\frac{4}{7}<x<3. \\ \begin{cases} 7x<11 \\ 2x>6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1\frac{4}{7} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет } \varnothing. \end{array}\right.$$

8 5

Зн. ~~на~~ считать сумму целых решений надо в интервале: $1\frac{4}{7} < x < 3$.

Здесь: $x = 2$ только подходит

Зн. ответ: 2.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654.

№3.

$$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$$

Упростим отдельно числитель и отдельно знаменатель:

Числитель:

$$\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}=x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-$$
$$-y\sqrt{y}=x(\sqrt{x}-\sqrt{y})+y(\sqrt{x}-\sqrt{y})=$$
$$=(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

Знаменатель:

$$\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}=y\sqrt[4]{y}+x\sqrt[4]{y}-y\sqrt[4]{x}-$$
$$-x\sqrt[4]{x}=x(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})+y(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})=$$
$$=(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})$$

Вся дробь:

$$\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})}=-\frac{\cancel{(x+y)}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\cancel{(x+y)}(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})}=$$
$$=-\frac{\cancel{(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})}(\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x})}{\cancel{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}}=-(\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}),\quad x\neq -y$$

При $x=81$ и $y=10^{-4}$: $-\sqrt[4]{10^{-4}}-\sqrt[4]{81}=$
$$=-10^{-1}-3=-0{,}1-3=-3{,}1.$$

Ответ: $-3{,}1$.

~~4~~ 5

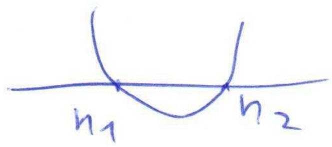
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654

№8.

$n^2 - 287n + 7252 < 0$



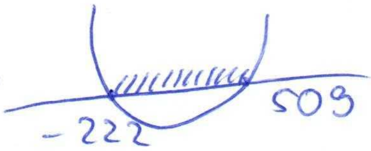
Найдем n_1 и n_2:

$n^2 - 287 + 7252 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 82369 - 29008 = \overset{2}{\cancel{7}}31^2$

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{287+731}{2} = \dfrac{1018}{2} = \cancel{509} \\ n_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{287-731}{2} = -\dfrac{444}{2} = \cancel{-222} \end{cases}$$

Область, которая нам подходит:



1-ый член в этой области, который $\vdots\, 7$ равен -217, а последний $= 504$ (a_n). Нам нужна сумма первых n членов арифм. прогрессии, где $a_1 = -217$; $a_n = 504$; $d = 7$, т.к. нужны целые числа $\vdots\, 7$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$504 = -217 + 7(n-1)$

$721 = 7(n-1)$

$n - 1 = 103.$

$n = 104.$

$a_{104} = 504.$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654

Сумма членов арифм. прогрессии от 1-го до n-го членов $= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Подставляем наши значения:

$$\frac{(-217+504)\cdot 104}{2} = 52 \cdot 287 =$$

$$= \boxed{14924}$$

12

Ответ: 14924

№10.

Сумма цифр в однозначных числах = сумме однозначных чисел, т.к. они состоят из 1-ой цифры.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$$ – сумма цифр в однозначных числах.

+

В двузначных:

Здесь нам поможет комбинаторика.
Фиксируем в числе определенную цифру на определ. позиции и смотрим, сколько таких чисел (с этой цифрой на опред. позиции) существует.

Фиксируем цифру на 1-ой позиции, тогда вариантов для 2-ой позиции: 9 (не считая зафиксированной)
всего таких чисел: $9\cdot 1$, т.е. 9.
~~Для второй позиции~~: Когда фиксируем цифру на 2-ой позиции: для 1-ой позиции 8 вариантов (т.е. кроме 0 и зафиксированной цифры), а для 2-ой цифры – вариант 1, т.к. мы её зафиксировали

Отраслевая олимпиада школьников Газпром

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654.

~~В~~. Зн. всего зафиксированные цифра участвует ~~8+8=16~~ $9+8=17$ раз. И не важно какую цифру фиксируем, т.е. не важно: 1 или 9; 2 и 9 и т.д. 0 мы никогда не фиксируем, т.к. он не повлияет на сумму.

~~Т.е. сумм~~ каждая цифра (кроме 0) повторяется 17 раз в двузнач. числах, т.е. общ сумма цифр в них $= 17\cdot1+17\cdot2+\ldots+17\cdot9 =$
$= 17\cdot(1+2+3+\ldots+9) = 17\cdot45 = 785$, в тех числах, где цифры различны

нет учета
10, 20, ..., 90
11, 22, ..., 99
$\Rightarrow 19\cdot45 = 855$

и т.д.

Далее смотрим для трехзначных чисел:

Здесь делаем то же самое: если фиксируем цифру на 1 позиции, то таких чисел:

$$\underbrace{1}_{\text{вариантов на 1 поз.}}\cdot\underbrace{9}_{\text{вариантов на 2 поз. (кроме зафиксир. цифры)}}\cdot\underbrace{9}_{\text{вариантов на 3 поз.}} = 81$$

Для 2-ой цифры:

$$\underbrace{8}_{\text{кроме зафикс. цифры и 0}}\cdot\underbrace{1}_{\text{зафикс. цифра}}\cdot\underbrace{9}_{\text{кроме зафикс. цифры}} = 72$$

Для 3-ей цифры аналог., как и для 2-ой цифры и $= 72$. $(8\cdot9\cdot1)$

Т.е. всего $81+72+72 = 81+144 = 225$, но это только в тех числах, где цифры разные, сумма $= 225(1+2+3+\ldots+9) = 225\cdot45$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14654

Но мы не посчитали цифры в числах, где ~~…~~ хотя бы 2 цифры совпадают или все совпадают.

В двузначных:

не посчитали 11; 22; 33; 44; ...; 99.

Их сумма цифр:

$2\cdot1+2\cdot2+\ldots+2\cdot9=90$.

Для трехзначных:

не посчитали числа, где 1-ая и 2-ая позиц. совпадают, 2-ая и 3-ья позиции совпадают, 1-ая и 3-я позиции совпадают, все позиции совпадают. Числа вида (пример для 1):

$\overline{11X}$; $\overline{X11}$; 111; $\overline{1X1}$

Если 1-ая 2-ая совпадают (не считаем) – таких чисел 10, т.к X от 0 до 10.

Т.е сумма: $10\cdot45=450$

Если 2-ая и 3-я совп. (не считаем), то таких 9, т.к. X ~~…~~ от 1 до 9.

Сумма $=9\cdot45=405$.

Если 1-ая и 3-я – аналогично 1-ой и 2-ой, т.е. сумма $=450$.

Если все совпадают, то сумма $=3\cdot1+3\cdot2+\ldots+3\cdot9=$

$=3\cdot45=135$.

~~Итог: …~~

Итог: $45+785+225\cdot45+90+135+405+450+405=$

$=\cancel{830}+\cancel{\ldots}\;\cancel{10125}+\cancel{1488}=12440$

Ответ: ~~12440~~.

2

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 14654

№9.

Пусть x_1(конфет) - съел Миша в первый день, тогда $2x_1$(конфет) - съела Настя в первый день, тогда $3x_1$(конфет) - съел Гриша в первый день.

Тогда x_2(конфет) - съел Миша во 2-ой день, зн. x_2(конфет) - съела Настя во 2-ой день, зн. $2x_2$(конфет) - съел Гриша во 2-ой день.

По усл. зад. у Насти ост. 8 конфет, а у Миши в 5 раз больше, чем у Гриши осталось. Также знаем, что сначала у всех было одинак. кол-во конфет.

1

У Насти: $2x_1 + x_2 + 8$.

Т.к. у Миши осталось в 5 раз больше, чем у Гриши и кол-во общее подарка Гриши = Миши, то Гриша съел в 5 раз больше, чем Миша, т.е.

Гриша съел $= 3x_1 + 2x_2$

Миша съел $= x_1 + x_2$

$3x_1 + 2x_2 = 5x_1 + 5x_2$

$2x_1 + 3x_2 = 0$

?