



ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible][illegible][illegible]

Номер варианта	2	1	
----------------	---	---	--

10-31

ШИФР

10-38

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ	Подпись
							Цифрой			Прописью	
Оценка	4	4	4	-	8	6	12	8	0	0	сорок шесть 8

7. Докажем утверждение по индукции. База верна. Тогда пусть $1+2^3+3^3+\dots k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, тогда докажем, что $1+2^3+3^3+\dots k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

Заметим $1+2^3+3^3+\dots k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$. Тогда требуется доказать, что $\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Разделим на 4. Тогда

$k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3 = (k+1)^2(k+2)^2$. Вынесем $(k+1)^2$ за скобку:

$(k+1)^2(k^2+4k+4) = (k+1)^2(k+2)^2$. Значит $k^2+4k+4 = (k+2)^2$, а значит

$(k+1)^2(k^2+4k+4) = (k+1)^2(k+2)^2$, Тогда $1+2^3+3^3+\dots k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

Значит $1+2^3+3^3+\dots n^3 = \frac{n(n+1)^2}{2}$.

Ответ: ч.т.д.

5. Заметим, что $8\sin^2\alpha - 8 = -8\cos^2\alpha$, тогда $2\sin^2\alpha = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Тогда $2\sin^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 8 = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 8\cos^2\alpha =$

$= 8\cos^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) = -8\cos^4\alpha$. Тогда нужно доказать, что $1 - 8\sin^2\alpha - \cos^4\alpha = -8\sin^4\alpha$. Т.е. $1 - \cos^4\alpha = 8\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 2\sin^22\alpha$.

Заметим, что $1 - \cos^4\alpha = 1 - (1 - 2\sin^22\alpha) = 2\sin^22\alpha$. Значит

$1 - 8\sin^2\alpha - \cos^4\alpha = -8\sin^4\alpha$. Тогда $\frac{2\sin^22\alpha + 8\sin^2\alpha - 8}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos^4\alpha} = \frac{-8\cos^4\alpha}{-8\sin^4\alpha} = \cot^4\alpha$.

Ответ: ч.т.д.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

ШИФР _____

6. Заметим, что второй путешественник в час проходит на 2 км первого путешественника ($6-4=2$). Тогда он догонит его за $\frac{6}{2}=4$ ч, значит, т.к. скорость собаки не меняется, она пройдет $4 \cdot 15 = 60$ км.
Ответ: 60 км

4. Пусть стороны треугольника будут $a-b, a, a+b$. Тогда $a > b > 0$. Тогда, т.к. угол 120° -тупой, то $a+b$ будет летать напротив него. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$a^2 + (a-b)^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot a(a-b) = (a+b)^2$$

$$a^2 + a^2 - 2ab + b^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (a^2 - ab) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2a^2 = 5ab$$

$$2a = 5b$$

$$\text{Тогда } b = \frac{2a}{5}$$

65

Тогда стороны треугольника равны $\frac{3}{5}a, a, \frac{7}{5}a$. Они подходят по неравенству треугольника.

Ответ: треугольник со сторонами $\frac{3}{5}a, a, \frac{7}{5}a$.

№1.

$$A = \left(\frac{1}{10} \right)^{-3} \left(\left(\frac{10}{3} \sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4} \sqrt{\frac{4}{5}} + 5 \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10 \sqrt{0,2} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{10}{7} \right) = \frac{\text{данный множитель}}{\text{и знаменатель на } \sqrt{2}}$$

$$= 10^3 \left(\left(\frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 20} - \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 5} + \frac{5}{5} + 1 - 10 \cdot 0,1 \right) \cdot 2 + 1,017 \right) = 10^3 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + 1 - 1 \right) \cdot 2 + 1,017 \right) =$$

$$= \left(\frac{20}{2} + 1,017 \right) \cdot 10^3 = 10,017 \cdot 10^3 = 10017$$

Ответ: 10017

ШИФР

$$= \frac{\left(\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{20} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{5} + 2 - 10 \cdot 0,1 \right) \cdot 2}{\left(7 \cdot 4 - 3 + \frac{2}{2} + \frac{6 \cdot 2}{3} - 140 \cdot 0,2 \right)} + 1,017 \cdot 10^3 = \left(\frac{2}{2} + 1,017 \right) \cdot 10^3 = 2017$$

2017

Ответ: 2017.

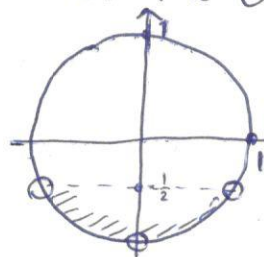
2. Пусть первая цистерна будет объема V_1 , вторая V_2 , третья V_3 . Тогда $\frac{V_1}{100} = \frac{V_2}{60} = \frac{V_3}{80}$. Тогда $\frac{V_2}{V_1} = 0,6$, т.е. изначально первая цистерна была заполнена на 40%. Аналогично $\frac{V_3}{V_1} = 0,8$, значит третья цистерна была заполнена на 20%. Тогда $\frac{V_3}{V_2} = 2$.

Ответ: в 2 раза

3. Заметим, что $x \cdot \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, знаменателем является суммой геометрической бесконечно убывающей прогрессии, тогда воспользуемся формулой подбора такой суммы и получим $x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^2 = 16$, т.е. $x = 4$
- 40

Ответ: 4.

9. Пусть $3x = \alpha$. Тогда $2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha < -1$. $2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 < -1$. Тогда $4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha < 0$, $2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha < 0$. Сопоставим на $\cos \alpha$, при этом заметим, что $\cos \alpha \neq 0$. Тогда $2 \sin \alpha + 1 < 0$, значит $\sin \alpha < -\frac{1}{2}$. Т.е. так как $\cos \alpha \neq 0$, то $-\frac{1}{2} < \sin \alpha < -1$. Тогда получим такие углы α



Т.е. $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $\alpha \notin \frac{3\pi}{2} + \pi k$, т.е.

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k < \alpha < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, \text{ значит } \frac{7\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

Ответ: $\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, где k - целое

205

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ШИФР

10. Заметим, что данное выражение является суммой радиусов каких-то двух окружностей $\forall x$ с центрами в точках $(0; 5)$ и $(12; 0)$. Тогда по т. Пифагора найдем, что расстояние между двумя этими точками равно 13. Минимум этого выражения достигается когда эти 2 окружности касаются, тогда точка касания будет лежать на прямой, соединяющей эти центры этих окружностей. Построим прямую, проходящую через центры этих окружностей. Это будет прямая $y = -\frac{5}{12}x + 5$. Тогда подставим это y в исходное уравнение.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \left(-\frac{5}{12}x + 5\right)^2} + \sqrt{\left(-\frac{5}{12}x + 5\right)^2 + (x-12)^2} &= \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} + \sqrt{\frac{25}{144}x^2 + 25 - \frac{25}{6}x + x^2 + 144 - 24x} = \\ &= \sqrt{\frac{169}{144}x^2 + 169} - \frac{169}{6}x + \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} = \sqrt{\left(\frac{13x}{12} - 13\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{13x}{12}\right)^2} = 13 \end{aligned}$$

Заметим, что $x > 0$. Рассмотрим случай, когда $\frac{13x}{12} - 13 > 0$. Тогда

$$\frac{13x}{12} - 13 + \frac{13x}{12} = 13$$

$$\frac{26x}{12} = 13$$

$$26x = 13 \cdot 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{13x}{12} - 13 < 0$. Тогда $13 - \frac{13x}{12} + \frac{13x}{12} = 13$. $13 = 13$.

Но $13 - \frac{13x}{12} \leq 0$, только при $x > 12$, чего не может быть.

Значит $x = 6$, тогда $y = -\frac{5 \cdot 6}{12} + 5 = 2,5$. При проверке удовлетворяется, что данные x и y подходят

Ответ: $(6; 2,5)$

05

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

ШИФР _____

8. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x .

$$2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 2x^2 + x(-7y + 13) + 3y^2 - 4y - 7 = 0.$$

$$D = 49y^2 - 182y + 169 - 24y^2 + 32y + 28y = 25y^2 - 150y + 225 = (5y - 15)^2.$$

$$\text{Тогда } x_3 = \frac{7y - 13 \pm (5y - 15)}{4} \quad x_1 = \frac{7y - 13 + 5y - 15}{4} = \frac{12y - 28}{4} = 3y - 7$$

$x_2 = \frac{7y - 13 - 5y + 15}{4} = \frac{2y + 2}{4} = \frac{y + 1}{2}$. Тогда подставим оба x во второе уравнение.

1) $x^2 + x\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)y + y^2 = 3$. Домножим на 4. 2) $9y^2 - 42 + 49 + 3y^2 - 7y + y^2 = 0$.

$$13y^2 + 7 - 7y = 0.$$

$$D < 0.$$

$$y^2 + 2y + 1 + 2y^2 + 2y + 4y^2 = 12$$

$$7y^2 + 4y - 11 = 0$$

$$D = 16 - 4(-11) \cdot 7 = 16 + 77 \cdot 4 = 324 = 18^2$$

$$y_1 = \frac{-4 + 18}{14} = 1 \quad \text{Тогда } x = 1.$$

$$y_2 = \frac{-4 - 18}{14} = \frac{-22}{14} = \frac{-11}{7} \quad \text{Тогда } x = \frac{\frac{-11}{7} + 1}{2} = \frac{-11 + 7}{14} = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}$$

Ответ: $(1; 1)$; $\left(\frac{-2}{7}; \frac{11}{7}\right)$; $\left(\frac{-2}{7}; \frac{-11}{7}\right)$

При подстановке $\frac{-2}{7}$ и $\frac{11}{7}$ в первое уравнение не получается ответа!

88