ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24442

Класс 9 Вариант 1-1 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	— ~~0~~	45 ~~80~~ 55	сорок пять пятьдесят пять	

10 10 15 6 86

апелляция: восемьдесят шесть.
Багаева—

1. $\frac{5\frac{1}{5}-4,1}{3\frac{2}{3}}=\frac{5,2-4,1}{\left(\frac{11}{3}\right)}=\frac{1,1\cdot3}{11}=\frac{11\cdot0,1\cdot3}{11}=0,3.$ +

2. Пусть первая бригада изготовила x станков. Тогда, по условию вторая бригада изготовила (100% − 15%) от x, т.е. $(1-0,15)x=0,85x$ станков, а третья − (100% + 20%), т.е. $(1+0,2)x=1,2x$ станков. Т.к. по условию всего они изготовили 366 станков, имеем:

$x+0,85x+1,2x=366;$

$x(1+0,85+1,2)=366;$

$x\cdot3,05=366;$

$x=\frac{366}{3,05};$

$x=120.$

$\frac{366}{3,05}=\frac{366\cdot100}{305}=\frac{61\cdot6\cdot100^{20}}{61\cdot5_1}=20\cdot6=120$

+

Проверим. $120\cdot0,85=12\cdot8,5=6\cdot2\cdot8,5=17\cdot6=102$ станка.

$120\cdot1,2=12\cdot12=144$ станка.

$120+102+144=366$ станков.

Ответ: первая бригада изготовила 120 станков.

$$\begin{array}{r}+120\\+102\\144\\\hline366\end{array}$$

3. $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$

Выражение имеет смысл => Подкоренные выражения неотрицательны. Т.е. $x^3\geq0$, $y^3\geq0$ => $x\geq0$, $y\geq0$.

Продолжение на следующей странице.

ШИФР 24442

3. $$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}} = \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{y}}{y\sqrt[4]{y}+x\sqrt[4]{y}-y\sqrt[4]{x}-x\sqrt[4]{x}} = \frac{(x+y)\sqrt{x}-(x+y)\sqrt{y}}{(x+y)\sqrt[4]{y}-(x+y)\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}} = -\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = -\frac{(\sqrt[4]{x})^2-(\sqrt[4]{y})^2}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = -\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} =$$

$= -\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$, где $x \neq -y$, $x \neq y$ (т.к. $\sqrt[4]{x} \neq \sqrt[4]{y}$), $x \geq 0$, $y \geq 0$.

При $x = 81 = 3^4$, $y = 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$, выражение равняется:

$-\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y} = -\sqrt[4]{3^4}-\sqrt[4]{\frac{1}{10^4}} = -3-\frac{1}{10} = -3-0,1 =$ ~~2,9.~~ $-3,1$

Ответ: ~~2,9.~~ $-3,1$

+

4. $\sqrt{5-3x} > 1$ Оба выражения неотрицательны, поэтому можем возвести в квадрат.

$\begin{cases}5-3x > 1^2\\5-3x \geq 0\end{cases}$ (т.к. выражение имеет смысл)

$\begin{cases}4 > 3x\\5 \geq 3x\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{4}{3} > x\\\frac{5}{3} \geq x\end{cases} \Rightarrow$ т.к. $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$, то $x \in (\frac{4}{3}; -\infty)$

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. $2 > \frac{4}{3} > 1$. Значит, $x<2$, т.е. наибольшее целое

решение меньше 2, т.е. максимум 1. +

При $x = 1$, $\sqrt{5-3} = \sqrt{2} > 1$ – верно.

Ответ: наибольшее целое решение – число 1.

5. $\frac{13-x}{6-2x} > 4$

$\frac{13-x}{6-2x} - 4 > 0$

$\frac{13-x-4(6-2x)}{6-2x} > 0$

$\frac{13-x-24+8x}{6-2x} > 0$

$\frac{7x-11}{6-2x} > 0$

~~$\frac{7x-11}{6-2x}$~~ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7x-11>0\\6-2x>0\end{cases}\\\begin{cases}7x-11<0\\6-2x<0\end{cases}\end{array}\right.$

Продолжение на следующей странице.

ШИФР 24442

5. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7x-11>0\\6-2x>0\end{cases}\\ \begin{cases}7x-11<0\\6-2x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{11}{7}\\x<3\end{cases}\ (1)\\ \begin{cases}x<\frac{11}{7}\\x>3\end{cases}\ (2)\end{array}\right.$$

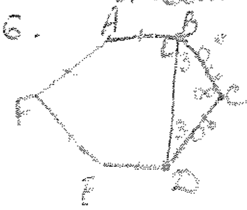
(1): $3>x>1\frac{4}{7}$ (2): $x<1\frac{4}{7}$ и $x>3$ – нет решений, т.к. $3>1\frac{4}{7}$

Значит, ~~$x\in(3;1$~~ $x\in(1\frac{4}{7};3)$.

$1<1\frac{4}{7}<2<3$. Значит, 2 – единственное целое число, входящее в этот промежуток.

Ответ: 2.

6.



Т.к. шестиугольник ABCDEF – правильный, то все стороны равны и все углы по $\frac{180°\cdot(6-2)}{6}=120°$

В $\triangle BCD$ $BC=CD \Rightarrow \angle CBD=\angle CDB=\frac{180°-\angle BCD}{2}=30°$.

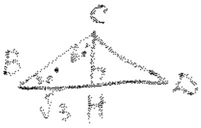
$\Rightarrow \angle ABD=\angle ABC-\angle CBD=120°-30°=90°$.

AD – гипотенуза в $\triangle ABD \Rightarrow AD>BD$.

Все диагонали, соединяющие вершины шестиугольника через одну (т.к. равны соответственные треугольники. (т.е. $\triangle ABC=\triangle BCD \Rightarrow AC=BD$ и т.д.)) и аналогично, равны диагонали, соединяющие вершины через 2. Т.е. $AD=BE$ и т.д.

Значит, BD – меньшая диагональ.

Опустим из точки C высоту CH на BD. Т.к. $\triangle BCD$ – равнобедренный, то CH – медиана. $BH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$



В $\triangle BCH$ $BH=BC\cdot\sin60°=BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. $\Rightarrow BC=2$.

Значит, сторона шестиугольника равна 2. Тогда, периметр в 6 раз больше, т.е. $2\cdot6=12$.

Ответ: 12

7. $\sqrt{-x^2+2x+35}=-x-5$.

Найдем область определения.

$-x-5\geq0$ и $-x^2+2x+35\geq0$ $|\cdot(-1)$

$-5\geq x$ $x^2-2x-35\leq0$.

По т. Виета, $x_1=7$, $x_2=-5$ являются корнями, т.к. $x_1+x_2=2=-\frac{2}{1}$, а $x_1x_2=-35=\frac{-35}{1}$

Значит, ~~$\left[\begin{array}{l}x\geq7\\x\leq-5\end{array}\right.$~~: $-5\leq x\leq7$

$$\begin{cases}-5\geq x\\ \left[\begin{array}{l}x\geq7\\x\leq-5\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x\leq-5.$$

~~Т.к. обе части уравнения неотрицательно, возведем их в квадрат~~

$$\begin{cases}-x^2+2x+35=x^2+10x+25\\x\leq-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x^2+8x-10=0 & |:2\\x\leq-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+4x-5=0\\x\leq-5\end{cases}$$

Значит, $\begin{cases}-5\leq x\leq7\\x\leq-5\end{cases}$

Единственный возможный корень – $x=-5$

Проверим.

Продолжение на следующей странице.

только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24442

7. $\begin{cases} x^2+4x-5=0 & (1) \\ x \le -5 & (2) \end{cases}$

(1) : $x^2+4x-5=0$.

По т. Виета $x_1=-5$, $x_2=1$ ~~являются корнями~~, т.к. $x_1x_2=-5\cdot1=-5$

$x_1+x_2=-5+1=-4$.

Имеем:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x \le -7 \end{cases}$ $x_2=1$ не входит ~~в область определения, а -5 входит.~~

Проверка. Проверим для $x=-5$:

$\sqrt{-(5)^2+2\cdot(-5)+35} = -(-5)-5$;

$\sqrt{-25-10+35} = 5-5$;

$\sqrt{0}=0$ – верно.

Ответ: $x=-5$.

8. Пусть x_0 – решение неравенства $n^2-287n+7252<0$, целое, кратное 7.

Пусть $x_0=7\cdot k$, где k – целое.

$49k^2-287\cdot7k+7252<0$

$49k^2-41\cdot7\cdot7\cdot k+148\cdot49<0 \quad |:49$

$k^2-41k+148<0$

$148=37\cdot4$

$41=37+4$

$\Downarrow$

$(k-37)(k-4)<0$.

$\Downarrow$

$4<k<37$. Т.к. k – целое, то $5\le k\le36$.

$$\begin{array}{r|l} 7252 & 49 \\ \underline{-49} & 148 \\ 235 & \\ \underline{-196} & \\ 392 & \\ \underline{-392} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 37 \\ \underline{4} \\ 148 \end{array}$$

Сумма чисел от 1 до 36 равна $\frac{36\cdot37}{2}=18\cdot37$ (объединим числа от 1 до 18 в пары с числами от 19 до 36 так, чтобы числа в паре давали 37)

$1+2+\ldots+36=S$

$36+35+\ldots+1=S$

$2S=(1+36)+(2+35)+\ldots+(35+2)+(36+1)=37\cdot36 \Rightarrow S=18\cdot37$.

Если мы вычтем из суммы чисел от 1 до 36 сумму чисел от 1 до 4, то получим сумму чисел от 5 до 36.

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ \underline{18} \\ +296 \\ \underline{37} \\ 666 \end{array}$$

$666-(1+2+3+4)=666-10=656$. Мы посчитали сумму целых корней, но деленную на 7. $656\cdot7=4592$ (т.к. все корни в 7 раз меньше)

Значит, искомая сумма в 7 раз больше, т.е. $656\cdot7$

Ответ: сумма целых решений, кратных 7, равна 4592.

$$\begin{array}{r} \times 656 \\ \underline{7} \\ 4592 \end{array}$$

10. Пусть $1+2+\ldots+1000=S$.

$1+2+\ldots+1000=S$

$1000+999+\ldots+2+1=S$

$\Downarrow$

$2S=(1+1000)+(2+999)+(3+998)+\ldots+(999+2)+(1000+1)=2S$.

$1001\cdot1000=2S$

Продолжение на след. странице.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24442

10. $2S = 1000 \cdot 1001$

$S = 500 \cdot 1001 = 500500$

Ответ: 500500.

9.

	Миша	Настя	Гриша
1 день	x	$2x$	$3x$
2 день	a	$y-a$	$2y$
оста-лось	$5z$	8	z

① Пусть Настя и Миша в сумме съели вдвое меньше конфет, чем Гриша во второй день. Тогда, пусть в первый день Миша съел x конфет, Настя – $2x$ конфет, а Гриша – $3x$ конфет.

Пусть во второй день Миша съел a конфет, Настя – $(y-a)$ конфет, т.е. в сумме они съели y конфет. Значит, Гриша съел $2y$ конфет. Пусть у Гриши осталось z конфет, тогда у Миши – $5z$ конфет. Имеем систему, т.к. в сумме у них поровну конфет.

$$\begin{cases} x + a + 5z = 2x + y - a + 8 & \mid +a - x \\ 3x + 2y + z = x + a + 5z & \mid -x - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 5z = x + y + 8 \\ a + 4z = 2x + 2y \end{cases}$$

Сложим.

$3a + 9z = 3x + 3y + 8$. Заметим, что $(3a + 9z) \vdots 3$, $(3x + 3y) \vdots 3$, $8 \not\vdots 3$, поэтому, в целых числах система не имеет решений.

~~А если в подарке кол-во конфет не целое, то и дети могли есть нецелое число конфет, то а мы можем брать любым в промежутке от 0 до y (т.к. y ≥ 1, противоречий нет. Тогда, ответ однозначно не восстанавливается, и ответов бесконечно много~~

② ПУСТЬ и НАСТЯ, и МИША во 2-ой день СЪЕЛИ в 2 РАЗА меньше КОНФЕТ, ЧЕМ ГРИША. (Тогда, ответ будет единственный, и они ели натуральное кол-во конфет).

~~Заменим~~ Пусть во 2-ой день Миша и Настя съели по y конфет, а Гриша – $2y$ конфет. В остальные дни переменные обозначим также.

	Миша	Настя	Гриша
1 день	x	$2x$	$3x$
2 день	y	y	$2y$
оста-лось	$5z$	8	z

Имеем:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 2x + y + 8 & \mid -x - y; \\ 2x + y + 8 = 3x + 2y + z & \mid -2x - y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z = x + 8 \\ 8 = x + y + z & \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z = x + 8 \\ 40 = 5x + 5y + 5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z = x + 8 \\ 40 = 5x + 5y + x + 8 \end{cases}$$

Продолжение на сле-

9. ② $\begin{cases} 5z = x+8 \\ 40 = 6x+5y+8 \end{cases}$

$\begin{cases} 5z = x+8 \\ 32 = 6x+5y \end{cases}$

Заметим, что $x+8 \vdots 5 \Rightarrow x \equiv -8 \equiv 2 \pmod 5$.

Значит, $x \geq 2$. Если $x > 2$, то хотя бы $5+2=7$ (т.к. 7 - наименьшее натуральное число, большее 2 и сравнимое с 2 по mod 5).

Но тогда, $6x+5y \geq 7 \cdot 6 = 42$. (т.к. $y \geq 0$), а $6x+5y = 32 < 42$. Значит, x может равняться только 2

При $x = 2$

$\begin{cases} 5z = 10 \\ 32 = 12+5y. \end{cases}$

$z = 2$

$y = 4.$

Проверим:

	Миша	Настя	Гриша
1 день	2	2·2=4	2·3=6
2 день	4	4	4·2=8
осталось	10	8	2
в сумме	2+4+10= =16	4+4+8= =16	6+8+2= =16

- у всех детей конфет поровну, а в сумме у всех троих $16 \cdot 3 = 48$ конфет.

Ответ: в подарке было 16 конфет.

Если условие „Настя с Мишей (съели) в 2 раза меньше, чем Гриша" трактуется, что они в сумме съели меньше, то читать решение ①, а если каждый в 2 раза меньше, то - решение ② (и еще, если все ели по натуральному (целому) числу конфет)

① Вернемся к случаю ① и докажем, что решений бесконечно много. Пусть есть решение $(x; y; z; a)$. Тогда, $(x-k; y; z-k, a+2k)$ тоже будет решением. Проверим. (~~k - любое~~ $k \leq x, k \leq z, k \leq y-a$) с

ШИФР 2442

9. ①

	Миша	Настя	Гриша
1 день	$x-k$	$2x-2k$	$3x-3k$
2 день	$a+2k$	$y-a-2k$	$2y$
осталось	$5z-5k$	8	$z-k$
всего	$x-k+a+$ $+2k+5z-$ $-5k=$ $=x+a+5z-4k$	$2x-2k+y-$ $-a-2k+8=$ $=2x+y-a-$ $-4k$	$3x-3k+$ $+2y+z-$ $-k=$ $=3x+2y+$ $+z-4k$

У каждого ребенка кол-во конфет уменьшилось на $4k$, поэтому у всех детей конфет поровну.

Значит, при условии, что во второй день Миша и Настя съели в сумме в 2 раза меньше конфет, чем Миша, решений бесконечно много, либо решений нет.

ШИФР 2444г

⑮. Посчитаем ~~сум~~ сумму ~~ц~~ цифр чисел от 1 до 9.

1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.

Посчитаем для двузначных чисел.

Во-первых, в каждом десятке по 1 цифре от 0 до 9 на последнем месте. ~~Всех~~ десятков всего 10. Т.е. 45·10.

в каждом десятке 10 одинаковых цифр на 1 месте. Т.е. еще 10 раз по 1, 10 раз по 2 и т.д. к сумме еще

10·1+10·2+...+10·9=10·45=450 + еще однозначн.

Значит, для двузначных и однозначных в сумме 450+45 ~~+45~~ ~~495~~ = 540

Теперь, посчитаем для чисел от 1 до 999.

На последних двух местах для каждой сотни мы считаем 10 раз по сумме ~~[illegible]~~ 4950 еще 45 ~~однозначных~~ двузначных и однозначных чисел. Т.е. ~~540~~ 495·10 = ~~5400~~ 4950 = ~~4950~~. В каждой 100тне по 100 цифр, которая стоит самой первой в 3-ех значном числе. (не считая двузначн. и однознач.)

Т.е. + ~~100·1+100·2+...+100·9=45·100~~ 540·10 = ~~54~~ 4500

У числа 1000 сумма цифр 1+0+0+0=1

Всего имеем 4950+4500+1=9451

~~5400~~ 4950 + ~~5400~~ ~~1~~ =

Ответ: 10351

 4950
+4501
 9451

+5400
 5400

+5400
 540
 1
 941

Вычислительная ошибка