

Класс 11

Вариант 11

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	3	0	4	8	12	12	12	0	16	70 69	семьдесят	

N1 Ответ: 3

Решение: 1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

2) $208^0 = 1$

3) $(0,5)^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

4) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

5) $(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

$$A = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4\frac{3}{4} = \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = 5$$

Тогда 60% от A = $1 \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3$

Анализ: шестьдесят
девять
башков -

N2 Ответ: 152 млрд куб. м газа

Решение: Пусть Новатэк добыл $\frac{1}{5}x$ млрд. куб. м газа
(дальше будем опускать ед. изм-я). Тогда по условию
Р добыл $\frac{1}{2}x$ и Л добыл $\frac{1}{10}x$. Также, Г добыл 0,3 от
добычи Р, то есть $0,3 \cdot \frac{1}{2}x$ и $P - 8 = H + L + G$,
то есть $\frac{1}{2}x - 8 = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + 0,3 \cdot \frac{1}{2}x$

$$0,7 \cdot \frac{1}{2}x - 8 = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x$$

$$\frac{7}{20}x - 8 = \frac{4}{20}x + \frac{2}{20}x = \frac{6}{20}x$$

$$\frac{1}{20}x = 8$$

$$x = 160$$

$$\begin{aligned} H + L + G + P &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}x + 0,3 \cdot \frac{1}{2}x = \\ &= 80 + 16 + 32 + 24 = 152 \end{aligned}$$

См. усл. задачи.

2

№5. Решение: Пусть $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$. Тогда $a^2 + b^2 = 1$.

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1^2 - 2a^2b^2. \text{ Значит,}$$

$$a^4 + b^4 - 1 = -2a^2b^2. \text{ Также, } a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4 = 1 - 3a^2b^2(a^2 + b^2) = 1 - 3a^2b^2$$

$$\text{Значит, } a^6 + b^6 - 1 = -3a^2b^2$$

$$\text{Тогда, } \frac{a^4 + b^4 - 1}{a^6 + b^6 - 1} = \frac{-2a^2b^2}{-3a^2b^2} = \frac{2}{3}, \text{ т.т.т.}$$

№8. Решение: $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} =$

$$= \frac{\sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x} = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

УЗ: $\sin x \neq 0$
 $\cos x \neq 0$

$$\text{Аналогично, } \cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} -\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \sin y \\ -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \\ -\sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y = -\cos^2 x - \sin^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1. \text{ Значит, } x-y = 2\pi k + \pi$$

$$\text{где } k \in \mathbb{Z}. \text{ Тогда, } \sin x = \sin((x-y) + y) = \sin(2\pi k + \pi + y)$$

№8 Продолжение: $\sin(y + \pi) = -\sin y$. Также, ~~$\sin x = \sin y$~~
 $\cos x = \cos(y + \pi) = -\cos y$. Значит, исходная система
 имеет вид
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = -\sin x \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = -\cos x \end{cases}$$
 Откуда $2\sin x =$

$$= \frac{1}{\sin x}, \text{ т.е. } 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично $|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Откуда получаем решения

$$\begin{cases} y = 2\pi k_1 + \frac{\pi}{4}, & x = 2\pi k_1 + \frac{5\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi k_2 + \frac{3\pi}{4}, & x = 2\pi k_2 + \frac{7\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi k_3 + \frac{5\pi}{4}, & x = 2\pi(k_3+1) + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi k_4 + \frac{7\pi}{4}, & x = 2\pi(k_4+1) + \frac{3\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

← ОТВЕТ

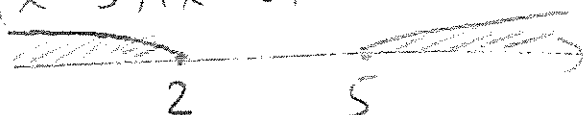
Покажем, что все они подходят, потому что $\sin^2 x - 1 =$
 $= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = \left(\text{т.к. } |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{2}$ и $\sin x \cdot \sin y = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$
 $= -\frac{1}{2}$ (т.к. $|\sin y| = |\sin x|$ и они разных знаков). Аналогично
 и $\cos^2 x - 1 = -\frac{1}{2} = \cos x \cdot \cos y$. Значит, все такие
 x и y подходят, а другие не подходят, мы
 это доказали

N10. ~~Решение~~ Решение: Рассмотрим функцию $f(a) = (4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a = a(-2x^2+13x-13) + (4x^2-27x+33)$. Зафиксируем x . Нам известно, что $f(a) > 0$ для $\forall 1 < a < 3$. Заметим, что $f(a)$ — линейная функция $\Rightarrow$ она принимает свой минимум на $[1, 3]$ одним из его концов. Рассмотрим $f(1)$ и $f(3)$:

$$f(1) = -2x^2 + 13x - 13 + 4x^2 - 27x + 33 = 2x^2 - 14x + 20$$

Решим нерав-во $f(1) \geq 0$, т.е. $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

$$(x-5)(x-2) \geq 0$$



Заметим, что если x не принадлежит $(-\infty; 2] \cup [5; \infty)$, то ~~то есть~~ $\exists 1 < a < 3$, при котором $f(a) \leq 0$ (например $a = 1 + \epsilon$, где $\epsilon \rightarrow 0$). Значит, $x \in (-\infty; 2] \cup [5; \infty)$

$$f(3) = -6x^2 + 39x - 39 + 4x^2 - 27x + 33 = -2x^2 + 12x - 6$$

Решим нерав-во $f(3) \geq 0$, т.е. $-x^2 + 6x - 3 \geq 0$



$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{-2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

Аналогично вышесказанному $x \in [3-\sqrt{6}; 3+\sqrt{6}]$.
Т.к. $3-\sqrt{6} < 2$ и $3+\sqrt{6} > 5$ имеем, что

$x \in [3-\sqrt{6}; 2] \cup [5; 3+\sqrt{6}]$. Докажем, что все

такие x подходят. Ну действительно, $f(1) \geq 0$, $f(3) \geq 0$.
Для $\forall a \in (1, 3)$, $f(a) > f(1)$ или $f(a) > f(3) \geq 0$ (т.к. строгий максимум ~~не~~ линейной ф-ии достигается в концах отрезка)

№10 Предположение: Значит $f(x) > 0$, то и каго
Здесь мы пользовались тем, что f — неконстанта,
т.е. коэффициент при $x \neq 0$. Если же f — константа, то

$$-2x^2 + 13x - 13 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{4}$$

то и на всём интервале $(\tau; 3)$ f строго положительна.

$$\frac{13 + \sqrt{65}}{4} > 5$$

$$13 + \sqrt{65} > 20$$

$$\sqrt{65} > 7$$

$$65 > 49$$

$$\frac{13 - \sqrt{65}}{4} < 2$$

$$13 - \sqrt{65} < 8$$

$$5 < \sqrt{65}$$

$$25 < 65$$

Значит,

$$\frac{13 \pm \sqrt{65}}{4} \in$$

$$(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$$

~~в этих точках~~
 ~~$\neq 0$~~

Докажем, что $3 - \sqrt{6} < \frac{13 - \sqrt{65}}{4}$

$$12 - 4\sqrt{6} < 13 - \sqrt{65}$$

$$\sqrt{65} < 1 + 4\sqrt{6}$$

$$65 < 1 + 96 + 8\sqrt{6}$$

$$\frac{13 + \sqrt{65}}{4} < 3 + \sqrt{6}$$

$$13 + \sqrt{65} < 12 + 4\sqrt{6}$$

$$1 + \sqrt{65} < 4\sqrt{6}$$

$$1 + 65 + 2\sqrt{65} < 96$$

Значит, $\frac{13 \pm \sqrt{65}}{4} \in [3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$, $2\sqrt{65} < 30$

то есть мы их уже рассмотрели. $2\sqrt{65} < 30$

Ответ: $x \in [3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$



ШИФР

24680

№6 Ответ: 60 км

Решение: Заметим, что 1-й и 2-й путешественники движутся независимо от асы и мы можем точно сказать когда они встретятся — через

$$\frac{10 \text{ км}}{(5 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}})} = \frac{10 \text{ км}}{2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 5 \text{ часов после начала}$$

их расстояние между ними, $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость сближения

Заметим также, что аса ~~летит~~ летит без перерывов всё это время с самого начала с постоянной скоростью. Значит аса пролетит $5 \text{ ч} \cdot 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60 \text{ км}$ (всёю аса будет летать 5 часов с постоянной скор-ю $= 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$).

14 Ответ: $x = 0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$QДЗ: \sqrt{x^3 - 3x + 1} \geq 0$$

$$x - 1 \geq 0$$

или проверка в границах

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \text{обе части} \geq 0. \text{ Возводим в квадрат}$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{только } \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Проверяем QДЗ: Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1 \geq 0$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{12 + 12\sqrt{5}}{8} + 1 = \frac{4 - 4\sqrt{5} + 8}{8} = \frac{12 - 4\sqrt{5}}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \geq 0$$

т.к. $3 > \sqrt{5}$, т.к. $9 > 5$.

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{12 - 12\sqrt{5}}{8} + 1 = \frac{4 + 4\sqrt{5} + 8}{8} \geq 0$$

К7 Ответ: $X = 3; 6$

Решение: ОДЗ:
$$\begin{cases} -x^2 + 8x - 7 \geq 0 & (1) \\ -x + 11 \geq 0 & (2) \\ -x^2 + 9x - 18 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{11 - x} + \sqrt{9x - x^2 - 18} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{обе части нр.ва} > 0 \\ \text{поэтому можно возвести} \\ \text{в кв.}$$

$$\begin{aligned} 8x - x^2 - 7 &\geq 11 - x + 9x - x^2 - 18 + 2\sqrt{(11 - x)(9x - x^2 - 18)} = \\ &= 8x - x^2 - 7 + 2\sqrt{(11 - x)(9x - x^2 - 18)} \end{aligned}$$

$$0 \geq 2\sqrt{(11 - x)(9x - x^2 - 18)}$$

$$\sqrt{A} \leq 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Значит, $(11 - x)(9x - x^2 - 18) = 0 \Leftrightarrow 11 - x = 0$ или $9x - x^2 - 18 = 0$

$$x = 11$$

$$\begin{aligned} D &= 81 - 4 \cdot (-18) \\ x &= \frac{9 \pm 3}{-2} = \\ &= 6; 3 \end{aligned}$$

$$x = 3, 6, 11$$

$$= 6, 3$$

Проверяем ОДЗ: (2) верно для всех, (1) не верно

для $x = 11$ $-121 + 88 - 7 < 0$, но верно для $x = 3$ и

$-9 + 74 - 7 \geq 0$ и $-36 + 48 - 7 \geq 0$. (3) верно для

$x = 3$ и 6 (это просто корни). Значит, под ОДЗ

подходят только $x = 3$ или 6



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

10

ШИФР

24680

N 9

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{m^2-2m+1} + \sqrt[3]{m^2-m} + \sqrt[3]{m^2}}$$

1

$$\sqrt[3]{(m-1)^2} + \sqrt[3]{m(m-1)} + \sqrt[3]{m^2}$$