

$$D \quad C_1 = \sqrt{24 + 3a^2} = 2R$$

$$AC^2 = AC_1^2 - C_1^2 = 4(R^2 - 9) - 4a^2 = 4R^2 - 36 - 4a^2 =$$

$$= 4R^2 + 3a^2 - 36 - 4a^2 \quad \text{НЕПРАВИЛЬНО}$$

$$AC_1 = 2\sqrt{R^2 - 9} = 2\sqrt{4R^2 - 36} = \sqrt{24 + 3a^2 - 36} =$$

$$= \sqrt{3a^2 - 12}$$

НЕ

105
не до конца!



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика,
Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	1	5	1	5	1	5	1

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

7	0	семьдесят	Иванов
---	---	-----------	--------

$$① \quad x^6 - 2022x^2 - \sqrt{2021} = 0$$

$$t = x^2 \quad (t \geq 0)$$

$$t^3 - 2022t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t^3 - 2021t - t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t(t^2 - 2021) - (t + \sqrt{2021}) = 0$$

$$(t + \sqrt{2021})(t(t - \sqrt{2021}) - 1) = 0$$

5б.

$$\left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2021} \text{ - не подходит м.к. } t \geq 0 \\ t^2 - t\sqrt{2021} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$t^2 - t\sqrt{2021} - 1 = 0$$

$$D = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2} \text{ - подходит}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2021} - 45}{2} \quad (t_2 < 0 \text{ - не подходит м.к.})$$

$$t \geq 0$$

Значит подходит
только $t = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2}$

$$x^2 = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант Ч 2 Дата 19.02.2022



$$(2) \quad m \sqrt{m} (x^2 - 6x + 9) + \frac{\sqrt{m}}{(x^2 - 6x + 9)} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad m_{\max} - ? \quad \text{хотя бы одно реш-е}$$

$$m \sqrt{m} (x-3)^2 + \frac{\sqrt{m}}{(x-3)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad x \neq 3 \quad m \geq 0$$

$$m \sqrt{m} (x-3)^2 + \frac{\sqrt{m}}{(x-3)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad | : \sqrt{m}$$

$$m (x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} \leq m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$$

$$1 \geq \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \geq -1$$

$$1 \geq \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \geq 0$$

$$\frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \leq m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$$

$$m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| - \frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \geq 0$$

Чем больше $\left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$, тем m может принимать большее значение, чтобы имелся хотя бы один корень. Значит, чтобы m был максимален

$$\left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| = 1 :$$

$$m^{\frac{1}{4}} - \frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$t = (x-3)^2 \quad (t > 0)$$

$$m^{\frac{1}{4}} - \frac{m t^2 + 1}{t} \geq 0$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



$$\frac{m^{\frac{1}{4}} \cdot t - m t^{\frac{2}{3}}}{t} \geq 0$$

$$\frac{m t^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{4}} t + 1}{t} \leq 0$$

допускаем

~~Решим~~ кер-во на t ($t > 0$)

$$m t^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{4}} t + 1 \leq 0$$

$$D = \left(m^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 4m \geq 0$$

(чтобы был хотя бы один корень)

$$D \geq 0, \text{ т.к. } m \geq 0,$$

$m t^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{4}} t + 1$ — парабола с ветвями вверх

При $m=0$:

$$1 \leq 0 - \text{ не верно } \Rightarrow$$

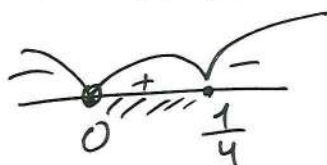
$$\Rightarrow m \neq 0$$

$$D = m^{\frac{1}{2}} - 4m \geq 0$$

$$m^{\frac{1}{2}} (1 - 4m^{\frac{1}{2}}) \geq 0$$

$$k = m^{\frac{1}{2}} \quad (k > 0)$$

$$k(1 - 4k) \geq 0$$



$$k \in (0; \frac{1}{4}]$$

$$k = m^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m \in (0; \frac{1}{16}]$$

$$m_{\max} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = \frac{1}{16}$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



14) $v = 4 \text{ (км/ч)}$
 $t = 1 \text{ (ч)}$

A - расстояние между геологами через час не менее 6 км.

$P(A) = ?$

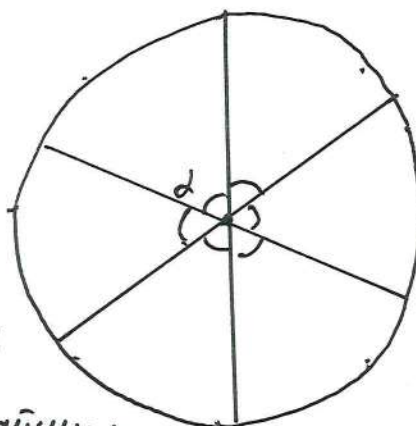
a - Расстояние, которое пройдут $\forall$ геологов через час:

$$a = v \cdot t = 4 \cdot 1 = 4 \text{ (км)}$$

Т.к. поле разделено на 6 равных

секторов, то угол между ближайшими

друг к другу дорогами одинаков: $\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



Пусть β - угол между прямыми на которых идут геологи; Тогда расстояние между геологами:

$$S = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \beta} = a \sqrt{2 - 2 \cos \beta} = 4 \sqrt{2 - 2 \cos \beta}$$

β может равняться $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$

Найдём β при котором $S \geq 6$:

1) $\beta = 0$

$$S = 4 \cdot \sqrt{2 - 2 \cos 0} = 0 - \text{не подх.}$$

2) $\beta = 60^\circ$

$$S = 4 \cdot \sqrt{2 - 2 \cos 60^\circ} = 4 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = 4 - \text{не подх.}$$

3) $\beta = 120^\circ$

$$S = 4 \sqrt{2 - 2 \cos 120^\circ} = 4 \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 4 \sqrt{3}$$

$$\frac{4 \sqrt{3} \sqrt{6}}{\sqrt{48}} > \sqrt{36}$$

Стр. 4



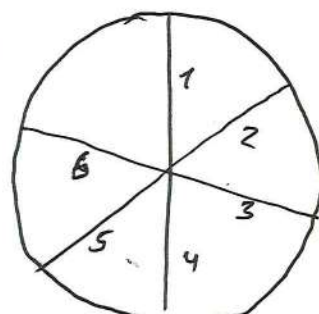
$4\sqrt{3} > 6$ Значит случай №3 подходит
 $4) \beta = 180^\circ \quad S = 4\sqrt{2-2\cos 180} = 4 \cdot 2 = 8$ - тоже

Значит случай №4 подходит

150

Предположим, что геолог выбрал дорогу
№1. Рассмотрим все варианты выбора
2-ого геолога:

перв. геол	2-ой геол	S (км)
1	1	< 6
1	2	< 6
1	3	> 6
1	4	> 6
1	5	< 6 ✓
1	6	< 6



Из 6-ти вар-ов
подходит 3 случая

Но первый геолог мог выбрать
6 разных дорог, поэтому

всего подходящих случаев: $2 \cdot 6 = 12$ ✓
 А всего возможных случаев $6 \cdot 6 = 36$

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{3}$



$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

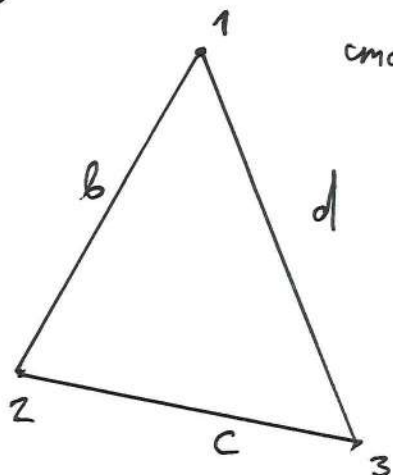
Национальный исследовательский Томский политехнический университет (Физика, Математика)

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



25



Расстояние между 1-ой и 2-ой станцией = b , между 1-ой и 3-ей = d ,
между 3-ей и 2-ой = c

По условию:

$$\begin{aligned} 2d &= b + c \\ b + d &= d + c \\ b + d &= 75 \end{aligned}$$

Возьмем расстояние между станциями при $d = 15$:

$$\begin{cases} 2d = b + c \\ b + 15 = d + c \\ b + d = 75 \end{cases}$$

$$b = d + c - 15$$

$$d + c - 15 + d = 75$$

$$2d + c = 75 + 15 = 90$$

$$2d = d + c - 15 + c$$

$$d = 2c - 15$$

$$2d = 4c - 30$$

$$90 - c = 4c - 30$$

$$5c = 90 + 30 = 120$$

$$c = 24$$

$$d = 2c - 15 = 2 \cdot 24 - 15 = 48 - 15 = 33$$

$$b = d + c - 15 = 24 + 33 - 15 = 57 - 15 = 42$$

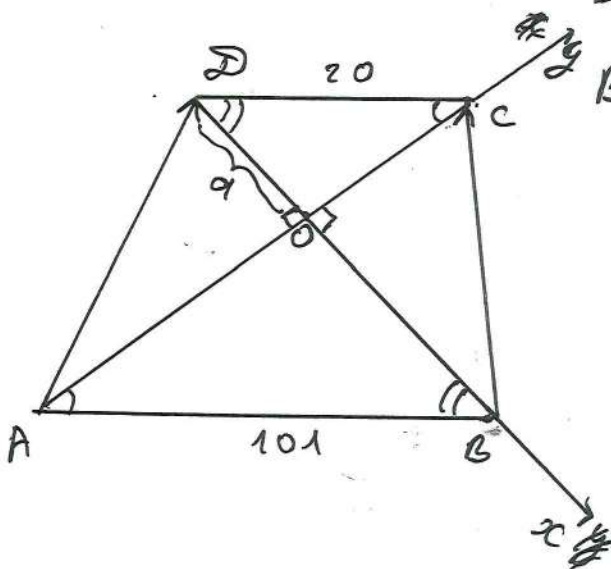
$$2d = 90 - c$$

150.

Нет оценки для a !

Ответ: 24; 33; 42

3



$$BD \cap AC = O$$

Введём систему координат,
как показано на рисунке:
(O - начало отсчёта)

$$DO = a \quad D(-a; 0)$$

$$OC = \sqrt{400 - a^2}$$

$$\triangle DCO \sim \triangle BAO \text{ (по 2-м } \angle \text{)}:$$

$$\frac{DO}{OB} = \frac{20}{101} \quad OB = \frac{101}{20} \cdot DO = \frac{101}{20} \cdot a$$

$$B\left(\frac{101}{20} \cdot a; 0\right)$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} =$$

$$= \sqrt{101^2 - \frac{101^2}{400} a^2}$$

$$A(0; -AO)$$

$$OC = \sqrt{DC^2 - DO^2} = \sqrt{400 - a^2}$$

$$C(0; OC)$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-a; AO\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0; OC\}$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-a - 0; 0 - (-AO)\}$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-a; AO\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0 - \frac{101}{20}a; OC - 0\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{-\frac{101}{20}a; OC\}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (-a) \cdot \left(-\frac{101}{20}a\right) + AO \cdot OC = \\ &= \frac{101}{20}a^2 + \sqrt{\left(101^2 - \frac{101^2}{400}a^2\right)(400 - a^2)} = \frac{101}{20}a^2 + \sqrt{\left(101^2 - \frac{101^2}{400}a^2\right)(400 - a^2)} \end{aligned}$$

Дано:

$$AB = 101 \quad \text{ABCD - параллелограмм}$$

$$CD = 20$$

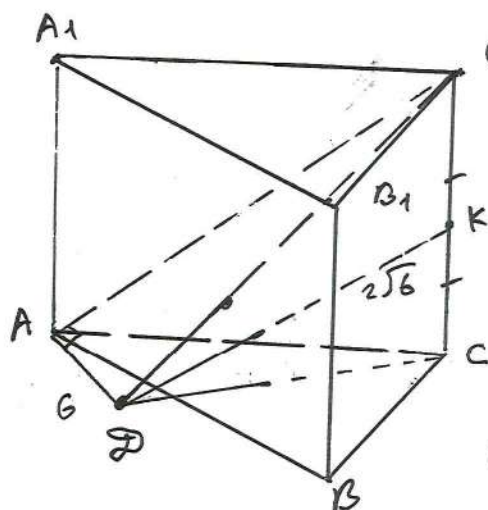
$$AC \perp BD$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = ?$$

155.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{101}{20} a^2 + 101 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{400} a^2\right)(400 - a^2)} = \frac{101}{20} a^2 + 101 \sqrt{\frac{(400 - a^2)^2}{400}} \\
 &= \frac{101}{20} a^2 + 101 \cdot \frac{(400 - a^2)}{20} = \frac{101}{20} a^2 + \frac{101 \cdot 400}{20} - \frac{101 a^2}{20} = \\
 &= \frac{101 \cdot 400}{20} = 101 \cdot 20 = 2020, \quad \text{Ответ: } 2020
 \end{aligned}$$

6



O - центр сферы, R - радиус сферы

Точки A, D, C_1 - лежат на сфере, через них можно провести сечение сферы - окружность; q
 DC_1 - диаметр сферы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow DC_1$ будет диаметром сечения (окружности) $\Rightarrow$

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - прав. трехгр. призма
 CC_1 - диаметр сферы
 $(O; R)$ - опис. сфера
 K - серед. CC_1
 $DK = 2\sqrt{6}$
 $DA = 6$

$\Rightarrow \angle DAC_1$ в сечении опирается на $V_{пр}?$

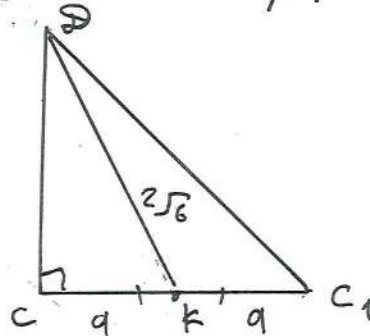
DC_1 - диаметр $\Rightarrow \angle DAC_1 = 90^\circ$

$$DC_1 = 2R \Rightarrow AC_1 = \sqrt{4R^2 - 36} = 2\sqrt{R^2 - 9}$$

Пусть $KC = C_1K = a \Rightarrow AA_1 = CC_1 = BB_1 = 2a$

Точки D, C, C_1 - лежат на сфере, DC_1 - диам. сф. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCC_1 = 90^\circ$



$$DC = \sqrt{24 - a^2}$$

$$DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} =$$

$$= \sqrt{24 - a^2 + 4a^2} =$$

$$= \sqrt{24 + 3a^2} \quad \text{ср } \delta$$



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика,
Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	1	5	1	5	1	5	1

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

7	0	семьдесят	Иванов
---	---	-----------	--------

$$① \quad x^6 - 2022x^2 - \sqrt{2021} = 0$$

$$t = x^2 \quad (t \geq 0)$$

$$t^3 - 2022t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t^3 - 2021t - t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t(t^2 - 2021) - (t + \sqrt{2021}) = 0$$

$$(t + \sqrt{2021})(t(t - \sqrt{2021}) - 1) = 0$$

5б.

$$\left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2021} \text{ - не по } x \text{ м.к. } t \geq 0 \\ t^2 - t\sqrt{2021} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$t^2 - t\sqrt{2021} - 1 = 0$$

$$D = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2} \text{ - по } x \text{ по } x \text{ м.к.}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2021} - 45}{2} \quad (t_2 < 0 \text{ - не по } x \text{ м.к.})$$

$$t \geq 0$$

Значит по } x \text{ по } x \text{ м.к.}

$$\text{только } t = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022



$$(2) \quad m \sqrt{m} (x^2 - 6x + 9) + \frac{\sqrt{m}}{(x^2 - 6x + 9)} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad m_{\max} - ? \text{ хотя бы одно реш-е}$$

$$m \sqrt{m} (x-3)^2 + \frac{\sqrt{m}}{(x-3)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad x \neq 3, m \geq 0$$

$$m \sqrt{m} (x-3)^2 + \frac{\sqrt{m}}{(x-3)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \quad | : \sqrt{m}$$

$$m (x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} \leq m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$$

$$1 \geq \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \geq -1$$

$$1 \geq \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| \geq 0$$

$$\frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \leq m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$$

$$m^{\frac{1}{4}} \left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| - \frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \geq 0$$

Чем больше $\left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right|$, тем m может принимать большее значение, чтобы имелся хотя бы один корень. Значит, чтобы m был максимален

$$\left| \cos \frac{\sqrt{x}}{5} \right| = 1 :$$

$$m^{\frac{1}{4}} - \frac{m (x-3)^4 + 1}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$t = (x-3)^2 \quad (t > 0)$$

$$m^{\frac{1}{4}} - \frac{m t^2 + 1}{t} \geq 0$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский политехнический университет (Физика, Математика)

Шифр 85268 Класс 11

Вариант 42 Дата 19.02.2022

$$\frac{m^{\frac{1}{4}} \cdot t - m t^2 - 1}{t} \geq 0$$

$$\frac{m t^2 - m^{\frac{1}{4}} t + 1}{t} \leq 0$$

допускаем

~~Решим~~ кер-во на t ($t > 0$)

$$m t^2 - m^{\frac{1}{4}} t + 1 \leq 0$$

$$D = \left(m^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 4m \geq 0$$

(чтобы был хотя бы один корень)

$$D \geq 0, \text{ т.к. } m \geq 0,$$

$m t^2 - m^{\frac{1}{4}} t + 1$ — парабола с ветвями вверх

При $m=0$:

$$1 \leq 0 - \text{ не верно } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0$$

$$D = m^{\frac{1}{2}} - 4m \geq 0$$

$$m^{\frac{1}{2}} (1 - 4m^{\frac{1}{2}}) \geq 0$$

$$m \neq 0$$

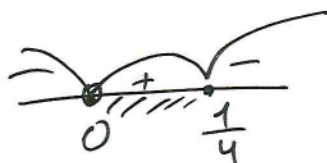
$$m \neq \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$$

$$k = m^{\frac{1}{2}} \quad (k > 0)$$

$$m \in (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{16}) \cup (\frac{1}{16}; \infty)$$

$$k(1 - 4k) \geq 0$$

$$m \in (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{16}) \cup (\frac{1}{16}; \infty)$$



$$k \in (0; \frac{1}{4}] \quad k = m^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m \in (0; \frac{1}{16}]$$

$$m_{\max} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = \frac{1}{16}$$