ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30780

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания СПбГЭТУ „ЛЭТИ"

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	0	8	8	12	12	16	16	0	80	восемьдесят	[signature]

№ 1.

$$A=\frac{2^{-2}+2018^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75=\frac{\frac{1}{4}+1}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+4{,}75=\frac{\frac{5}{4}}{5}+4{,}75=0{,}25+4{,}75=5$$

60% от A: $5\cdot 0{,}6=3$.

Ответ: 3.

№ 2.

Пусть компании „Новатэк"; „Роснефть"; „Лукойл" и „Газпром нефть" добыли N; P; L; G млрд куб м газа соответственно.

Тогда:
$$\begin{cases} \frac{N}{P}=\frac{2}{5} \\ \frac{P}{L}=5 \\ \frac{N}{L}=2 \end{cases}$$

Т.к Роснефть добыла на 8 млрд. куб больше чем все компании, то $P=N+L+G+8$.

Т.к „Газпром нефть" добыла 30% „Роснефти", $0{,}3P=G$

Получаем систему:
$$\begin{cases} 2P=5N \\ P=5L \\ N=2L \\ P=N+L+G+8 \\ G=0{,}3P \end{cases} \Rightarrow$$

$$P=\frac{2}{5}P+\frac{P}{5}+\frac{3}{10}P+8.$$

$$P=\frac{9}{10}P+8;\quad 0{,}1P=8;\quad P=80$$

$$N=\frac{2}{5}P=32$$

$$L=\frac{N}{2}=16$$

$$G=0{,}3P=\frac{80\cdot 3}{10}=24.$$

Ответ: Роснефть: 80; Газпром: 24; Новатэк: 32; Лукойл: 16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30780

N 4

$$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$$

$$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^3-3x+1=(x-1)^2 \end{cases} \begin{cases} x\geq 1 \\ x^3-3x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \begin{cases} x\geq 1 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x(x^2-x-1)=0 \end{cases} \begin{cases} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

~~$x\geq 1$~~ Решим ур-е $x^2-x-1=0$:

$D=1+4=5$

$x_{1;2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x=0 \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

N 5.

Док-ть: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$

Док-во:

1) $2\sin^6\alpha-2\sin^4\alpha+2\cos^6\alpha-2\cos^4\alpha+1 = 2\sin^4\alpha(\sin^2\alpha-1)+2\cos^4\alpha(\cos^2\alpha-1)+1=$

$=-2\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha\cdot\sin^2\alpha+1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$

2) След:

$2\sin^6\alpha-2\sin^4\alpha+2\cos^6\alpha-2\cos^4\alpha+1=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha.$

$2\sin^6\alpha+2\cos^6\alpha+1=3\sin^4\alpha+3\cos^4\alpha$

$2\sin^6\alpha+2\cos^6\alpha-2=3\sin^4\alpha+3\cos^4\alpha-3$; $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1)=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)$

$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$, что

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30780

№6.

Оса летала все время пока путешественники не встретились.
Посчитаем время до их встречи: за час они сближаются на $5-3=2$ км. => время их пути: $\frac{10}{2}=5$ ч.

Путь осы: $12\cdot5=60$ км

Ответ: 60 км.

№8.

$$\begin{cases} \sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y \\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y \end{cases}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} \sin x\neq0 \\ \cos x\neq0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x-1=\sin y\sin x \\ \cos^2 x-1=\cos y\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin y\sin x+\cos y\cos x=-1 \\ \cos y\cos x-\sin y\sin x=\cos 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y)=-1 \\ \cos(x+y)=\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-\pi+2\pi n \\ \left[\begin{array}{l} x+y=2x+2\pi k \\ x+y=-2x+2\pi k \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-\pi+2\pi n \\ \left[\begin{array}{l} -x+y=2\pi k \\ 3x+y=2\pi k \end{array}\right. \end{cases} \quad n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}$$

1) $$\begin{cases} x-y=-\pi+2\pi n \\ -x+y=2\pi k \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} 2x=-\pi+2\pi n-2\pi k \\ -2y=-\pi+2\pi n+2\pi k \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2}+\pi(n-k) \\ y=\frac{\pi}{2}+\pi(n+k) \end{cases}}$$ ~~не удов. ОДЗ~~

~~Т.к. sinx Сущ. ОДЗ: ∅~~

$\Rightarrow -\pi+2\pi n=-2\pi k$

~~2)~~ $\cancel{\begin{cases} x-y=-\pi+2\pi n \\ 3x+y=2\pi k \end{cases} \Rightarrow}$

$\pi(2n-1)=\pi\cdot 2k$; $2n-1=2k$.
$2k$ - четное, $2n-1$ - нечетное => ∅

2) $$\begin{cases} x-y=-\pi+2\pi n \\ 3x+y=2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=-\pi+2\pi n+2\pi k \\ 4y=2\pi k+3\pi-6\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi(n+k)}{2} \\ y=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi(k-3n)}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi(n+k)}{2};\ \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi(k-3n)}{2}\right)$; $n\in\mathbb{Z}$; $k\in\mathbb{Z}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

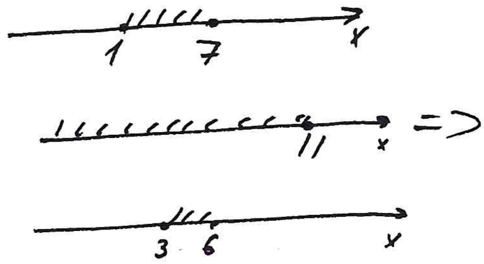
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30780

№ 7.

$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geqslant \sqrt{9x-x^2-18}$

ОДЗ: $\begin{cases} 8x^3-x^2-7 \geqslant 0 \\ 11-x \geqslant 0 \\ 9x-x^2-18 \geqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)(x-7) \leqslant 0 \\ x \leqslant 11 \\ (x-6)(x-3) \leqslant 0 \end{cases}$



$\Rightarrow$

$3 \leqslant x \leqslant 6.$

$\sqrt{8x-x^2-7} \geqslant \sqrt{9x-x^2-18} + \sqrt{11-x}$, обе части больше 0, мож возвести в квадрат.

$8x-x^2-7 \geqslant 9x-x^2-18+11-x+2\sqrt{-(11-x)(x-6)(x-3)}$

$-\sqrt{(x-11)(x-6)(x-3)} \leqslant 0.$

Т.к. корень неотрицателен, то

$(x-11)(x-6)(x-3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \text{ - не удв. ОДЗ.} \\ x=6 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ответ 6; 3.

№ 9.

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{k^{\cancel{2}}}-\sqrt[3]{(k-1)^{\cancel{2}}}}{(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2})} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k})^3-(\sqrt[3]{k-1})^3} = \dfrac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}{k-(k-1)} = \sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}.$

2) Теперь рассмотрим всю последовательность:

$\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k-2}+\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1} =$

$= \cancel{\sqrt[3]{k}}-\cancel{\sqrt[3]{k}}-1.\ \sqrt[3]{k}-1. \Rightarrow k=x^3;\ x\in N$

$x^3>2017 \Rightarrow x_{наим}=13;\ k=13^3=2197$ Ответ: 2197.

№ 10.

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0.$

$\cancel{(4-2a)x^2>(27-13a)x+13a-33}$. $a(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33>0$

~~Построим левую и правую часть в осях (a;x).~~

$\cancel{a(-2x^2+13x-13)>-4x^2+27x-33;\ a=\frac{-4x^2+27x-33}{-2x^2+13x-13}=2+\frac{x-7}{-2x^2+13x-13}}$

$f(a)=a(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33.$

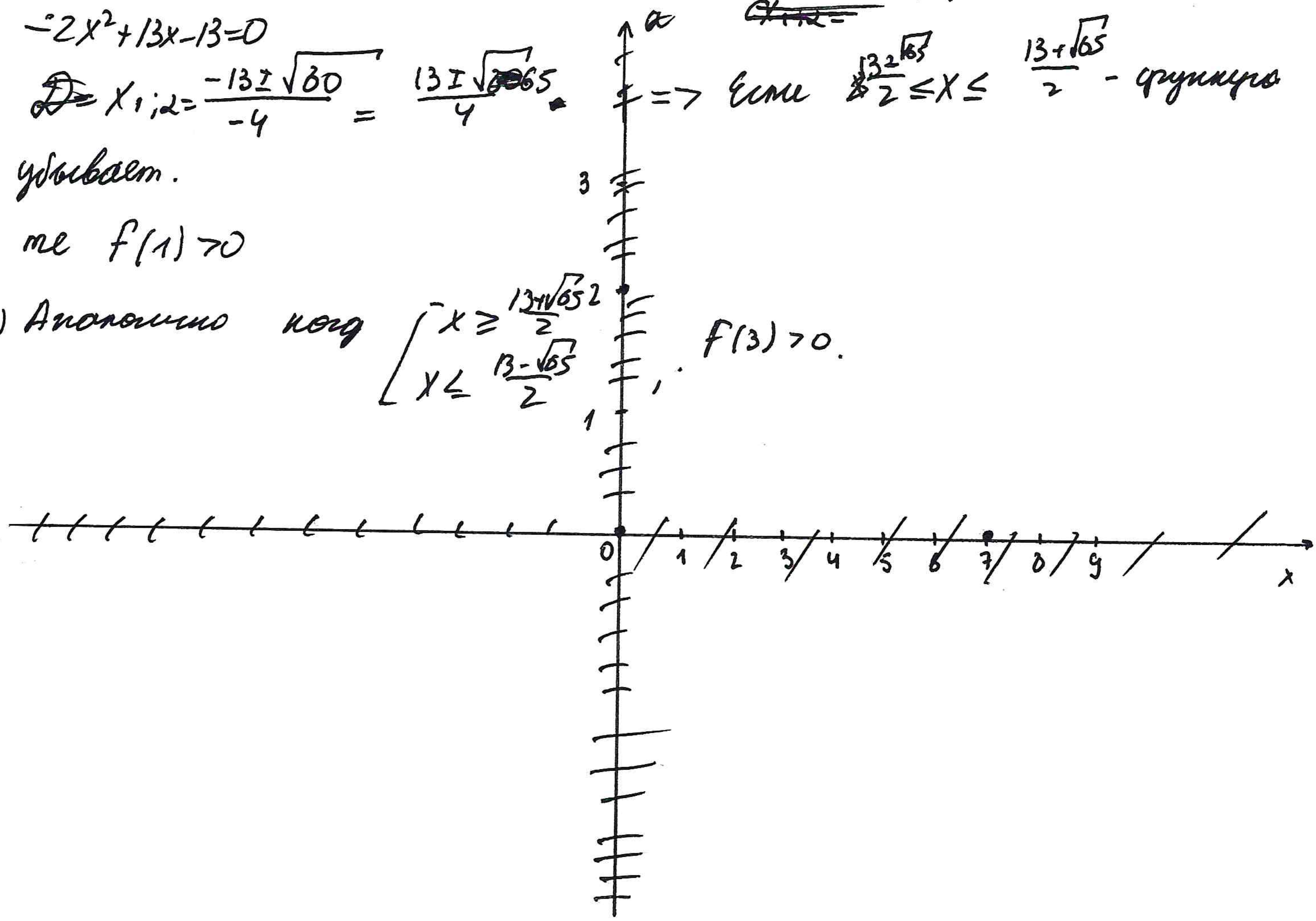
$f'(a)=-2x^2+13x-13.$; $\cancel{-2x^2+13x-13=0}$; $\cancel{D=13\cdot13-8\cdot13=5\cdot13}$

$-2x^2+13x-13=0$

$x_{1;2}=\frac{-13\pm\sqrt{80}}{-4}=\frac{13\pm\sqrt{65}}{4}$ => Если $\frac{13-\sqrt{65}}{2}\le x\le\frac{13+\sqrt{65}}{2}$ - функция убывает.

1) те $f(1)>0$

2) Аналогично когда $\left[\begin{array}{l} x\ge\frac{13+\sqrt{65}}{2} \\ x\le\frac{13-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$, $f(3)>0.$



№ 3.

Т.к расстояние между деревьями не меньше (не менее) 12 м, то у каждого дерева есть ~~своя~~ область с радиусом 6 м, куда не попадают другие области. => ~~Эти~~ Таких областей и соответственно деревьев не больше: $\frac{S_{рощи}}{S_{обл}}=\frac{\pi\cdot 258^2}{\pi\cdot 6^2}=43^2$ => деревьев $\le 43^2<2018$ что.