



ШИФР 32202

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания СПБГЭТУ „ЛЭТИ“

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	8	8	12	6	8	16	1	67	шестьдесят семь	

№1 Коэффициент 60% от значения А

$$\frac{2^{-2} + 2018^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{2^2 - 5 \cdot \frac{1}{(-2)^2} + \frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{4 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} + (-5(-2)^{-2}) + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 = 0,25 + 4,75 = 5$$

$$\frac{6}{10} A = \frac{6}{10} \cdot 5 = \frac{6}{2} = 3$$

Ответ: 3

Пусть объем добычи „Коватэк“ – V_k , „Роснефть“ – V_r , „ЛУКОЙЛ“ – V_l , „Газпром нефть“ – V_g , то

Дано:

$$V_k : V_r : V_l = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10}$$

$$V_g = 0,3 V_r$$

$$V_r = V_k + V_g + V_l + 8$$

Найти:

$$V_k, V_r, V_l, V_g$$

Решение:

$$\text{Пусть } V_l = x, \text{ то } V_r = 5x, V_k = 2x$$

$$V_g = \frac{3}{10} \cdot 5x = 1,5x$$

составим и решим ур-е:

$$5x = 2x + 1,5x + x + 8$$

$$5x = 4,5x + 8$$

$$0,5x = 8$$

$$x = 16, \text{ то } V_l = 16 \text{ (млрд. куб.м)}$$

$$V_k = 2 \cdot 16 = 32 \text{ (млрд. куб.м)}$$

$$V_g = 1,5 \cdot 16 = 24 \text{ (млрд. куб.м)}$$

$$V_r = 5 \cdot 16 = 80 \text{ (млрд. куб.м)}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 32202

№ 4 Решить уравнение

$$\text{О.Д.З. } x^3 - 3x + 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = -1$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x + (-1)$$

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}; \begin{cases} x^3 - x^2 - x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x(x^2 - x - 1) = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}; \quad D = 1 + 4 = 5 \quad \begin{cases} \sqrt{5} > 2 \\ \sqrt{5} > \sqrt{1}, \text{ то } \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \geq 1 \end{array} \right| \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Проверка: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 =$
 $= \frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1 =$
 $= \frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{4+2\sqrt{5}-3-3\sqrt{5}+2}{2} =$
 $= \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{2} > 0, \text{ тк } \sqrt{9} > \sqrt{5}$

Следовательно удовлетворяет О.Д.З

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Доказать: $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

Доказательство:

1) $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$
 $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1 = -2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

2) $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha =$
 $= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$
 $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1 = -3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$



ШИФР 32202

Левая часть

$$3) \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}$$

Правая часть $\frac{2}{3}$

Верное числовое равенство, что и требовалось доказать

Пусть скорость первого - V_1 , скорость второго - V_2 , скорость аэ - V_3 , расстояние между ними - x , расстояние, которое пролетела аэ - $S_{\text{аэ}}$

Дано:

$$V_1 = 3 \text{ км/ч}$$

$$V_2 = 5 \text{ км/ч}$$

$$V_3 = 12 \text{ км/ч}$$

$$x = 10 \text{ км}$$

Найти: $S_{\text{аэ}}$

Решение:

Скорость сближения первого и второго

$$V_{\text{сбл}} = V_2 - V_1 = 5 \text{ км/ч} - 3 \text{ км/ч} = 2 \text{ км/ч}$$

$$t = \frac{x}{V_{\text{сбл}}} = \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}} = 5 \text{ ч} - \text{время до встречи}$$

По условию аэ летела до встречи путешественников с постоянной скоростью, то

$$S_{\text{аэ}} = V_3 t = 12 \text{ км/ч} \cdot 5 \text{ ч} = 60 \text{ км}$$

Ответ: 60 км

N7 Решить неравенство

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

О.Д.З. $\begin{cases} 8x - x^2 - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ 9x - x^2 - 18 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-7) \leq 0 \\ x \leq 11 \\ (x-6)(x-3) \leq 0 \end{cases}$

$$(\sqrt{-x^2 + 8x - 7} - \sqrt{11 - x})^2 \geq -x^2 + 9x - 18$$

$$-x^2 + 8x - 7 + 11 - x - 2\sqrt{(-x^2 + 8x - 7)(11 - x)} \geq -x^2 + 9x - 18$$

$$-2x + 22 \geq 2\sqrt{(-x^2 + 8x - 7)(11 - x)} \quad | :2$$

$$11 - x \geq \sqrt{-x^2 + 8x - 7} \cdot \sqrt{11 - x}$$

Так как по О.Д.З. $11 - x > 0$, разделим обе части на $\sqrt{11 - x} > 0$

$$\sqrt{11 - x} \geq \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$$

$$11 - x \geq -x^2 + 8x - 7$$

$$x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

$$(x-3)(x-6) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 6 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases} \right. \quad 3 \leq x \leq 6$$

Проверка:

$$x=3: \sqrt{24-9-7} - \sqrt{11-3} \geq \sqrt{27-9-18}$$

$$\sqrt{8} - \sqrt{8} \geq 0$$

$$0 \geq 0 \quad \text{Верное неравенство}$$

$$x=6: \sqrt{48-36-7} - \sqrt{11-6} \geq \sqrt{54-36-18}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{5} \geq 0$$

$$0 \geq 0 \quad \text{Верное неравенство}$$

Ответ: $3 \leq x \leq 6$



ШИФР 32202

N8 Решить систему

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y & | \cdot \sin x \neq 0 \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y & | \cdot \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$0.0.3 \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases} ; \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases} ; \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ \sin x \sin y - \cos x \cos y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} - \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ -\cos(x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ \cos(x+y) = -1 \end{cases} ; \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ x+y = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} ; \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ y = \pi - x + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) \text{, тогда } \sin x = \sin(\pi - x) = \sin y$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \sin^2 x \\ y = \pi - x + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} ; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ y = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} ; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} ; \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right)$$

при котором число
будет рациональным

N9 Найти минимальное значение $k \geq 2017$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}}$$

Решение:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2})} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{\sqrt[3]{k^3} - \sqrt[3]{(k-1)^3}} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{k - (k-1)} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{1} = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

$$a_{k+1} = \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}$$

$$a_1 = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1-1} = 1$$

$$a_{k+1} + a_k = \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k-1}$$

Таким образом сумма всех элементов будет равняться $\sqrt[3]{k}$, так как остальные слагаемые сократятся, следовательно необходимо найти минимальное $k \geq 2017$ такое, что

$$\sqrt[3]{k} = n, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

ШИФР 32202

$$2017 > 1000 = 10^3$$

$$11^3 = 121 \cdot 11 = 1331 < 2017$$

$$12^3 = 144 \cdot 12 = 1728 < 2017$$

$$13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 > 2017$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 112 \\ \hline 288 \\ 1440 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ 1690 \\ \hline 2197 \end{array}$$

Ответ: 2197

найти все a , при которых
неравенство выполняется для всех $1 < a < 3$

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33 - 13a > 0$$

$$4x^2 - 2x^2a + 13xa - 27x + 33 - 13a > 0$$

$$a(-2x^2 + 13x - 13) > -4x^2 + 27x - 33$$

$$a \cdot (-(-2x^2 + 13x + 13)) > -(-4x^2 + 27x + 33) \quad | :(-1)$$

$$(2x^2 - 13x + 13)a < 4x^2 - 27x + 33$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 > 0 \\ a < \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 > 0 \\ \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \geq 3 \\ 2x^2 - 13x + 13 < 0 \\ \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \leq 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 13x + 13 = 0$$

$$D = 169 - 8 \cdot 13 = 5 \cdot 13 = 65$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{4}$$

$$x^2 + 6x + 3 \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3 = 6$$

$$x = -3 \pm \sqrt{6} = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{4}$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 27x + 33 \geq 6x^2 - 39x + 39 \\ x < \frac{13 - \sqrt{65}}{4} \\ x > \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \\ 4x^2 - 27x + 33 \geq 2x^2 - 13x + 13 \\ \frac{13 - \sqrt{65}}{4} < x < \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 12x + 6 \leq 0 \\ x < \frac{13 - \sqrt{65}}{4} \\ x > \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \\ 2x^2 - 14x + 20 \geq 0 \\ \frac{13 - \sqrt{65}}{4} < x < \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 - \sqrt{6} \leq x \leq -3 + \sqrt{6} \\ x < \frac{13 - \sqrt{65}}{4} \\ x > \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \end{cases}$$

$$1) \frac{-12 + \sqrt{96}}{4} - (13 - \sqrt{65}) = -25 + \sqrt{96} - \sqrt{65} < 0$$

$$\frac{13 + \sqrt{65}}{4} \geq \frac{13 + 7}{4}, \sqrt{65} > \sqrt{49}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x > 5 \\ \frac{13 - \sqrt{65}}{4} < x < \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \end{cases} \quad \text{Ответ: } [-3 - \sqrt{6}; -3 + \sqrt{6}]$$