ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17234

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.07.2018

Площадка написания ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	4	0	8	8	12	12	1	16	16	77	семьдесят семь	

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17234

①

$$A=\frac{\frac{1}{4}+1}{4-5\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}+4\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{4}}{3}+\frac{15}{4}=\frac{5}{12}+\frac{15}{4}^{13}=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}\Rightarrow\frac{6}{10}A=\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{6}_{2}}=2,5$$

$\frac{6}{10}A$ - ? Ответ: 2,5

③

Д-ать, что: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$

Д-во: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)(\sin^2\alpha+1)+\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)(\cos^2\alpha+1)}$ ⊜

⊜ $\frac{-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{-\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2)}=+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot 2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot 3}=\frac{2}{3}$ ч.т.д.

~~$\sin^2\alpha\neq 0$~~ $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\neq 0$ т.к. данное условие ($\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0$) не подходит в условие задачи.

④

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$

$x\geq 1$ (корень ≥ 0)

1) $f_1(x)=\sqrt{x^3-3x+1}$

$f_2(x)=x-1$

$\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{d}{dx}(\sqrt{x^3-3x+1})=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3-3x+1}}\cdot(3x^2-3)$

$\frac{d}{dx}f_2(x)=\frac{d}{dx}(x-1)=1$

При $x\geq 1$ $f_1'(x)\geq 0\Rightarrow f_1(x)$ растет

$f_2'(x)>0\Rightarrow f_2(x)$ растет.

2) $x^3-3x+\cancel{1}=x^2-2x+\cancel{1}$

$x^3-x^2-x=0$ $|:x$ $(x\geq 1)$

$x^2-x-1=0$

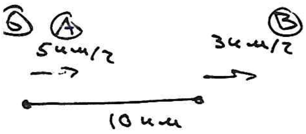
$D=\sqrt{1+4}$

$x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, но $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, значит этот корень не является решением уравнение

$\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1\Leftrightarrow 1+\sqrt{5}>2\right)$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

⑤



$V_{осы}=12$ км/ч

1) Найдем время, через которое встретятся пешеходы, для этого перейдем в систему отсчета впереди идущего, тогда скорость пешехода Ⓐ - 2км/ч (классический з-н сложения скоростей), тогда время δt, через которое встретятся пешеходы равно: $\delta t=\frac{10}{2}=5$ ч.

2) Т.к оса вылетела одновременно с пешеходом „А", то она его сразу и обогнала. Т.к. она летала со скоростью 12 км/ч до того момента, пока пешеходы не встретились, то $\delta S_{осы}=\upsilon_{осы}\cdot\delta t=12\cdot 5=60$ км

Ответ: 60 км.

⑦

$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$

$11-x\geq 0$

$x^2-8x+7\leq 0\Rightarrow\begin{cases}x\leq 11\\x\in[1;7]\\x\in[3;6]\end{cases}\Rightarrow x\in[3;6]$ (*)

$x^2-9x+18\leq 0$

2) $\cancel{8x-x^2-7}\geq\cancel{9x-x^2-18+11-x}+2\sqrt{(9x-x^2-18)(11-x)}$

$0\geq 2\sqrt{(9x-x^2-18)(11-x)}$ (Т.к. $\sqrt{a}\geq 0$, то нашему нер-ву удовлетворяет только „=")

$0=(9x-x^2-18)(11-x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\ \varnothing\ (\text{не подходит (*)})\\x=3\\x=6\end{array}\right.$

$\Downarrow$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=6\end{array}\right.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17234

9

$k>2017$, так, чтобы: $\sum_i \frac{1}{\sqrt[3]{(k_i-1)^2}+\sqrt[3]{k_i(k_i-1)}+\sqrt[3]{k_i^2}} \in R$

Рассмотрим самый последний член такой последовательности:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1}+\sqrt[3]{k^2-k}+\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2}} \ominus \Big/ A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2) \Big/ \ominus$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{(k-1)-k} = \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{-1} = \sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}$$

Заметим, что все члены $(<k)$ сокращаются $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots -\sqrt[3]{k-2}+\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k-1}+\sqrt[3]{k} \Rightarrow$ все наше выражение равно $\sqrt[3]{k}$.

Несложно заметить, что данное число будет рациональным в том случае, если из "k" берется рациональная степень $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 13 \\ \hline 51 \\ 17 \\ \hline 221 \end{array}$$

$12\cdot12\cdot12 = 144\cdot12 = 1440+288 = 1728$

$13\cdot13\cdot13 = 169\cdot13 = 17\cdot13\cdot10-13 = 2210-13 = 2197$

Т.к. $k>2017$ и k рационально, то $k = 2197$

Ответ: 2197

2

„Новатэк" – x

„Роснефть" – y

„Лукойл" – z

„Газпром" – α

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \\ \frac{y}{z} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = \frac{5}{1} \\ \alpha = \frac{3}{10}y \\ y = 8+x+z+\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$y = 8+\frac{2y}{5}+\frac{y}{5}+\frac{3}{10}y$

$y-\frac{9}{10}y=8$

$y=80 \Rightarrow$ $x = 80\cdot\frac{2}{5} = 32$

$z = \frac{1}{5}\cdot80 = 16$

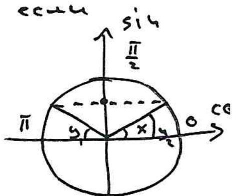
$\alpha = \frac{3}{10}\cdot80 = 24$

Ответ: „Новатэк" – 32; „Роснефть" – 80; „Лукойл" – 16; „Газпром" – 24

8

$$\begin{cases} \sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y & // \sin x\neq0 \\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y & // \cos x\neq0 \end{cases}$$ (условие задачи)

1) Допустим $\sin y=0$, тогда $\sin^2x=1 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow \cos x=0$, что противоречит условию $(\cos x\neq0)$. Аналогично если предположить, что $\cos y=0$.



2)
$$\begin{cases} \frac{\sin^2x-1}{\sin x}=\sin y \\ \frac{\cos^2x-1}{\cos x}=\cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\cos^2x}{\sin x}=\sin y \\ -\frac{\sin^2x}{\cos x}=\cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{\cos^2x\cdot\sin^2x}{\sin x\cos x}=\sin y\cos y \Rightarrow \sin 2x=\sin 2y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2y=2x+2\pi k \\ 2y=\pi-2x+2\pi k \end{array}\right. \\ k\in N \\ 2x\neq\frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x+\pi k \\ y=\frac{\pi}{2}-x+\pi k \end{array}\right. \\ x\neq\frac{\pi k}{4} \\ k\in N \end{cases}$

10

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$

$1<a<3$

$4x^2-2ax^2+13ax-27x+33-13a>0$

$4x^2-27x+33>a(2x^2-13x+13)$

$\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13}>a \Rightarrow$ (*)

1) $\begin{cases} 1<\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} \\ 3>\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} \end{cases} \Rightarrow$

а) $2x^2-13x+13<4x^2-27x+33$

$2x^2-14x+20>0$

$x^2-7x+10>0$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$

б) $6x^2-39x+39>4x^2-27x+33$

$2x^2-12x+6>0$

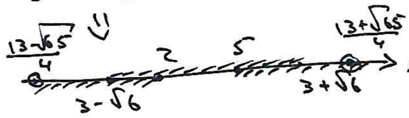
$x^2-6x+3>0$

$D=\sqrt{36-12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$x_{12}=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$

2) $3+\sqrt{6}>5 \Leftarrow \sqrt{6}>2 \Leftarrow \sqrt{6}>\sqrt{4}$

$3-\sqrt{6}<2$



$x \Rightarrow x\in(3-\sqrt{6};2)\cup(5;3+\sqrt{6})$

$\sqrt{65}>8$ $\sqrt{48}<7$

3) (*)

$2x^2-13x+13\neq0$

$D=\sqrt{169-104}=\sqrt{65}$

$x_{12}\neq\frac{13\pm\sqrt{65}}{4}$

$\frac{13-\sqrt{65}}{4}<3-\sqrt{6} \Leftarrow 13-\sqrt{65}<12-\sqrt{48} \Leftarrow 1-\sqrt{65}<-\sqrt{48} \Leftarrow \sqrt{65}>\sqrt{48}+1$

$\frac{13+\sqrt{65}}{4}>3+\sqrt{6} \Leftarrow 13+\sqrt{65}>12+\sqrt{48} \Leftarrow 1+\sqrt{65}>\sqrt{48}$

$\sqrt{65}>8$; $\sqrt{48}<7$

Ответ: $x\in(3-\sqrt{6};2)\cup(5;3+\sqrt{6})$

3