ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30579

Класс 10 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 10.02.18

Площадка написания СПбГЭТУ ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	0	8	8	12	8	6	16	0	66	шестьдесят шесть	[signature]

①

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0{,}5)^{-2} - 5\cdot(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4{,}75 =$$

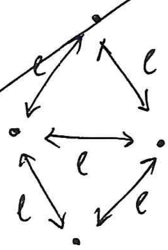
$$= \frac{\frac{1}{4}+1}{4 - 5\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} + \frac{19}{4} = \frac{5/4}{\frac{16-5+9}{4}} + \frac{19}{4} = \frac{19}{4} + \frac{5}{20} = 5$$

$\boxed{\text{Ответ: } \{5\}}$

③ $R = 258$ м
$l \geq 12$ м
$?\, N \leq 2018$

Пусть в роще > 2018 деревьев.
При наиболее плотной упаковке деревьев на единицу площади они будут располагаться на расстоянии 12 метров (l) друг от друга:

вот таким образом:



Тогда свободным пространством вокруг каждого дерева будет шестиугольник со стороной l, то есть на каждое дерево будет приходиться площадь, равная площади шестиугольника со стороной $l/2$.
Эта площадь равна $S = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 12^2 = 36\cdot 3\sqrt{3}$ м^2

Общая площадь рощи равна $S_0 = \pi R^2 = 258^2\cdot\pi$
Тогда число деревьев, которое там поместится, точно ~~больше~~ меньше $N = \left[\frac{S_0}{S}\right] =$
$= \left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{258}{6}\right)^2\right] = \left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot 43^2\right]$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30579

ЛИСТ 2/6

5 Обозначим $\sin^2\alpha = t$, тогда

$\cos^4\alpha = (1-t)^2$

$\cos^6\alpha = (1-t)^3$

Тождество примет вид:

$$\frac{t^2+(1-t)^2-1}{t^3+(1-t)^3-1} = \frac{2t^2-2t}{3t^2-3t} = \frac{2}{3}$$

т.к. $t^2+(1-t)^2-1 = t^2+1+t^2-2t-1 = 2t^2-2t$

$t^3+(1-t)^3-1 = t^3+1-3t+3t^2-t^3-1 = 3t^2-3t$

$\boxed{\text{Доказано}}$

8 $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$

Сразу заметим

$\sin x \neq 0$ — эти условия

$\cos x \neq 0$ должны выполняться.

$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cdot \cos x \end{cases}$

$\begin{cases} \cos^2 x = \sin y \cdot \sin x \\ \sin^2 y = \cos y \cos x \end{cases}$?

(1) $\begin{cases} \sin^2 y = \cos y \cos x \\ 1 = \cos(x-y) \end{cases}$ (2) т.к. $\cos y \cos x + \sin y \sin x = \cos(x-y)$

Рассмотрим (2):

$\cos(x-y) = 1 \iff x-y = 2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \cos x = \cos y$

$\sin x = \sin y$

Рассмотрим (1):

$\sin^2 y = \cos y \cos x = \cos^2 y \iff \cos^2 y - \sin^2 y = 0$

$\iff \cos 2y = 0$

$\cancel{2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n\in\mathbb{Z}}$

$\cancel{y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z}}$

~~Тогда итоговый ответ:~~

$\cancel{x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}}$

$\cancel{y \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}}$

Продолжение на другом листе. ЛИСТ 3

(8) Продолжение

$\cos 2y = 0$

$\Rightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n;\ n \in \mathbb{Z}$; $x = y + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Тогда ответ:

$$\boxed{\left\{ (t;\ t + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4} \right\} \right\}}$$

это пары чисел $(x; y)$

(4) $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$; выполняется $x^3 - 3x + 1 \geqslant 0$

$x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2$; $x - 1 \geqslant 0$

$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^3 - x^2 - x = 0$

$x(x^2 - x - 1) = 0$ $D = 5$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{array} \right. \\ x^3 - 3x + 1 \geqslant 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

$x = 0$ не подх.

$x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ не подх.

$x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ подх., т.к. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \geqslant 1$

и $\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})^3 - 3\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + 1 > 0$

Ответ: $\left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

(9) Рассмотрим число $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}} = f(k)$

$$f(k) = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})\left[\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{(k-1)k} + \sqrt[3]{k^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{k - (k-1)} = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

Тогда наше число имеет вид $x = \sum\limits_{i=2}^{i=k} f(i) = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \ldots + \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1} = \sqrt[3]{k} - 1$

Продолжение на (лист 4)

(9) Продолжение.

мы получили $x = \sqrt[3]{k} - 1$

x будет рациональным, если $k = a^3$; $a \in \mathbb{Z}$

а тоже такое, что $a > 10$ и $a < 20$

т.к. тогда ~~x~~ $k = 1000$ и $k = 8000$ соответственно.

Подберем k.

Пусть $a = 15$, тогда $k = 15^3 = 225 \cdot (10+5) = 3375$

$a = 14$, $k = 14^3 = 196 \cdot 14 = 2744$

$a = 13$, $k = 13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 \Longrightarrow \min k = 2197$

$a = 12$, $k = 12^3 = 144 \cdot 12 = 1728$

$\boxed{\text{Ответ: } k = 2197 = 13^3}$

(10) $a \in (1;3)$;

$f(x) = (4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$

при $a = 2$ (отдельно рассматриваем этот случай):

$f(x) = 0 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + 33 - 26 = 7 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 7}$

при $a \neq 2$ посчитаем, где $f(x) = 0$

$D_f = (13a-27)^2 - 4(33-13a)(4-2a) = 13^2a^2 - 13 \cdot 27 \cdot 2a + 27^2 - 4(33 \cdot 4 - 66a - 52a$

$+ 26a^2) = 169a^2 - 4 \cdot 26a^2 + a(4(66+52) - 13 \cdot 27 \cdot 2) + 27^2 - 33^2 \cdot 4^2 =$

$= 65a^2 + a \cdot 2 \cdot (236 - 351) + (27 - 33 \cdot 4)(27 + 33 \cdot 4) =$

$= 65a^2 + a \cdot 2 \cdot 115 + 159 \cdot (-105) = 5 \cdot (13a^2 + 23 \cdot 2a - 159 \cdot 21) = g(a) \cdot 5$

$D_g = (23 \cdot 2)^2 + 4 \cdot 159 \cdot 21 \cdot 13 = 4(46 + 159 \cdot 21 \cdot 13) > 0.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30579

ЛИСТ 5/6

(6) Пусть $v_1 = 3$ км/ч скорость I путешественника
$v_2 = 5$ км/ч скорость II путешественника.

Тогда относительная скорость движения II отн. I равна $v_2 - v_1 = 2$ км/ч ; $l = 10$ км - расстояние между ними.

Значит II догонит I за время $t = \frac{l}{v_2 - v_1} = \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}} = 5$ ч.

Все это время оса находилась в движении. Пусть $v = 12$ км/ч - скорость осы.

Тогда пройденный его путь $S = v \cdot t = 5\text{ч} \cdot 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60$ км

Ответ: 60км

(7) $\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geqslant \sqrt{9x - x^2 - 18}$

Должны выполняться условия: $\begin{cases} 9x - x^2 - 18 \geqslant 0 \\ 11 - x \geqslant 0 \end{cases}$, тогда $\sqrt{8x - x^2 - 7} \geqslant 0$

$\begin{cases} x \leqslant 11 \\ x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \end{cases}$ $D = 81 - 4 \cdot 18 = 9$ $x_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6; 3$

$\begin{cases} x \leqslant 11 \\ x \in [-\infty; 3] \cup [6; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\infty; 3] \cup [6; 11]$

$\underset{\geqslant 0}{\sqrt{8x - x^2 - 7}} \geqslant \underset{\geqslant 0}{\sqrt{9x - x^2 - 18}} + \underset{\geqslant 0}{\sqrt{11 - x}}$ $\Rightarrow$ обе части $\geqslant 0$, можно возвести в квадрат, НУО.

$8x - x^2 - 7 \geqslant 9x - x^2 - 18 + 11 - x + 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)}$

$\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)} \leqslant 0 \Rightarrow (9x - x^2 - 18)(11 - x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 6 \\ x = 11 \end{array}\right.$

Ответ: $\{3; 6; 11\}$

(2) Пусть x – объем „Новатэк"

y – объем „Роснефть" [млрд. куб. м]

z – объем „Лукойл" t – объем „Газпром нефть"

Тогда $y+8=x+z+t$

$t=0{,}3y$

$x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{10}=2:5:1$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{5}y \\ x=\frac{2}{5}y \\ t=\frac{3}{10}y \\ y+8=x+z+t \end{cases}$$

$y+8=0{,}2y+0{,}4y+0{,}3y=0{,}9y$

$\Rightarrow 0{,}1y=8 \Rightarrow y=80$

$t=24$

$x=32$

$z=16$

Ответ: „Новатэк" добыла 32 млрд $м^3$ нефти,
„Роснефть" добыла 80 млрд $м^3$ нефти,
„Лукойл" добыла 16 млрд $м^3$ нефти,
„Газпром нефть" добыла 24 млрд $м^3$ нефти.