ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22155

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания СПбГЭТУ „ЛЭТИ"

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	4	0	8	8	0	12	16	0	14	62	шестьдесят два	

№1.

$$A=\frac{2^{-2}+2018^{0}}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}\overset{+4,75}{\vee}=\frac{\frac{1}{4}+1}{4+\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+4\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{16+5+9}{4}}+4\frac{3}{4}=\frac{5}{30}+\frac{19}{4}=\frac{1}{6}+\frac{19}{4}=$$

$$=\frac{2+57}{12}=\frac{59}{12}$$

Найдём 60% от значения выражения A

$$\frac{59\cdot 60}{12\cdot 100}=\frac{59}{20}=2,95$$

Ответ: 2,95.

№2.

Пусть объём добычи газа компанией „Новатэк" за первое полугодие 2017 года равен x млрд. куб. м, тогда компанией „Роснефть" — $\frac{5x}{2}$ млрд. куб. м, компанией „ЛУКОЙЛ" – $\frac{x}{2}$ млрд. куб. м, компанией „Газпром нефть" — $\frac{3x}{4}$ млрд. куб. м. Зная, что компания „Роснефть" добыла на 8 млрд. куб. м больше, чем остальные компании вместе, составим и решим уравнение, где $x>0$:

$$\frac{5x}{2}=x+\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}+8$$

$$10x=4x+2x+3x+32$$

$$x=32$$

Объём добычи газа компанией „Новатэк" – 32 млрд. куб. м, компанией „Роснефть" – 80 млрд. куб. м, компанией „ЛУКОЙЛ" – 16 млрд. куб. м, компанией „Газпром нефть" – 24 млрд. куб. м.

Ответ: 32 млрд. куб. м, 80 млрд. куб. м, 16 млрд. куб. м, 24 млрд. куб. м.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22155

№4.

$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$

$\begin{cases} x^3-3x+1=x^2-2x+1 \quad (1) \\ x-1\geq 0 \end{cases}$

(1): $x^3-3x+1=x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x=0$

$x(x^2-x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-1=0 \quad (2) \end{array}\right.$

(2): $x^2-x-1=0$

$D=1+4=5$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{cases}$

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

№5.

Выпишем числитель дроби и преобразуем его

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-\cos^2\alpha=$

$=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=-2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

Выпишем знаменатель дроби и преобразуем его

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1=$

$=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ воспользуемся результатом преобразования числителя дроби

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22155

№5.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1=-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-(\sin\alpha\cos\alpha)^2=$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}=\frac{2}{3}$$

№6.

Пусть оса летела x часов. Время полёта осы равно времени, которое потребовалось второму путешественнику, чтобы встретиться с первым путешественником. Зная скорости движения путешественников и расстояние между ними, составим и решим уравнение, где $x>0$:

$5x=3x+10$

$2x=10$

$x=5$

Чтобы узнать, сколько километров пролетела оса, умножим скорость её полёта на время её полёта:

$12\cdot 5=60$ (км).

Ответ: 60 км.

№7.

$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$

$\sqrt{8x-x^2-7}\geq\sqrt{9x-x^2-18}+\sqrt{11-x}$

Обе части неравенства неотрицательны, возведём обе части неравенства в квадрат, сохранив знак неравенства

$8x-x^2-7\geq 9x-x^2-18+2\sqrt{(x-11)(x-6)(x-3)}+11-x$

$2\sqrt{(x-11)(x-6)(x-3)}\leq 0$

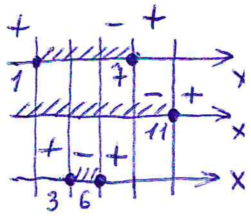
$(x-11)(x-6)(x-3)=0$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=11\\x=6\\x=3\end{array}\right.\\3\leq x\leq 6\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=6\end{array}\right.$

ОДЗ

$\begin{cases}8x-x^2-7\geq 0\\11-x\geq 0\\9x-x^2-18\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}(x-1)(x-7)\leq 0\\x-11\leq 0\\(x-3)(x-6)\leq 0\end{cases}$



$3\leq x\leq 6$

Ответ: $\{3\};\{6\}$.

№8.

ОДЗ

$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$x \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^2 y + \cos^2 y \quad (1) \\ \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \end{cases}$$

(1): $\quad 1 - 4 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1$

$-4 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{1 - \sin^2 x} = 0$

$t = \sin^2 x$, $0 < t < 1$ (с учётом ОДЗ)

$-4 + \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} = 0 \quad | \cdot t(1-t) \neq 0$

$-4t(1-t) + 1 - t + t = 0$

$4t^2 - 4t + 1 = 0$

$(2t-1)^2 = 0$

$2t - 1 = 0$

$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 0 < t < 1 \end{cases}$

$t = \frac{1}{2}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$

$1 - \cos 2x = 1$

$\cos 2x = 0$

ШИФР 22155

№8.

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} \\ x\neq\frac{\pi k}{2} \end{cases}$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$

1) ~~или~~ если $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$ или $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z$

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y$

$\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sin y$

$\sin y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left[\begin{array}{l} y=-\frac{\pi}{4}+2\pi p,\ p\in Z \\ y=-\frac{3\pi}{4}+2\pi q,\ q\in Z \end{array}\right.$

2) если $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$ или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\sin y$

$\sin y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{4}+2\pi p \\ y=\frac{3\pi}{4}+2\pi q \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2\pi m \\ y=-\frac{\pi}{4}+2\pi p \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2\pi m \\ y=-\frac{3\pi}{4}+2\pi q \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m \\ y=-\frac{\pi}{4}+2\pi p \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m \\ y=-\frac{3\pi}{4}+2\pi p \end{cases} \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m \\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi p \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m \\ y=\frac{3\pi}{4}+2\pi q \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m \\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi p \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m \\ y=\frac{3\pi}{4}+2\pi q \end{cases} \end{array}\right.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 22155

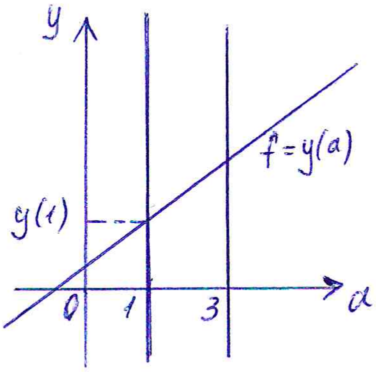
№10.

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$

$4x^2-2ax^2+13ax-27x+33-13a>0$

$a(13x-2x^2-13)+4x^2-27x+33>0$

$y(a)=a(13x-2x^2-13)+4x^2-27x+33$



$\begin{cases}13x-2x^2-13>0\\ y(1)>0\end{cases}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13>0\\ 13x-2x^2-13+4x^2-27x+33>0\end{cases}$

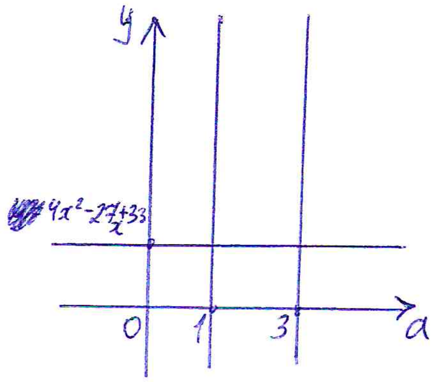
$\cancel{\begin{cases}13x-2x^2-13>0\\ -6x^2-14x+20>0\end{cases}}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13>0\\ 2x^2-14x+20>0\end{cases}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13>0\\ x^2-7x+10>0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{13-\sqrt{65}}{4}<x<\frac{13+\sqrt{65}}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x<2\\ x>5\end{array}\right.\end{cases}$

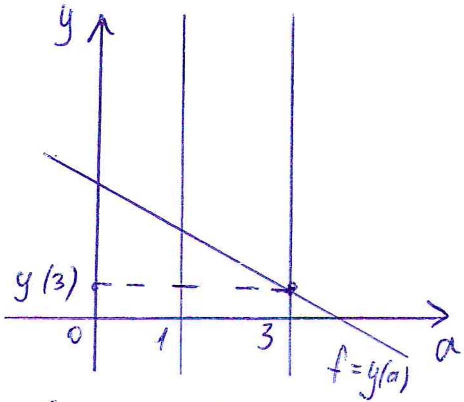
$\left[\begin{array}{l}\frac{13-\sqrt{65}}{4}<x<2\\ 5<x<\frac{13+\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.$



$\begin{cases}13x-2x^2-13=0\\ 4x^2-27x+33>0\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{13+\sqrt{65}}{4}\\ x=\frac{13-\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<\frac{27-\sqrt{201}}{8}\\ x>\frac{27+\sqrt{201}}{8}\end{array}\right.\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{13+\sqrt{65}}{4}\\ x=\frac{13-\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.$



$\begin{cases}13x-2x^2-13<0\\ y(3)>0\end{cases}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13<0\\ 39x-6x^2-39+4x^2-27x+33>0\end{cases}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13<0\\ -2x^2+12x-6>0\end{cases}$

$\begin{cases}13x-2x^2-13<0\\ x^2-6x+3<0\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<\frac{13-\sqrt{65}}{4}\\ x>\frac{13+\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.\\ 3-\sqrt{6}<x<3+\sqrt{6}\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}3-\sqrt{6}<x<\frac{13-\sqrt{65}}{4}\\ \frac{13+\sqrt{65}}{4}<x<3+\sqrt{6}\end{array}\right.$

Ответ: $(3-\sqrt{6};2)\cup(5;3+\sqrt{6})$.