ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 20489

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания СПГЭУ "ЛЭТИ"

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	0	12	12	16	16	12	88	восемьдесят восемь	[illegible]

№1

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2{,}017)^0\cdot\sqrt{0{,}36}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3} = 3^{10}\cdot 3^{-9} = 3$; $\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$;

$0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2} = 5^4\cdot 5^{-4} = 1$; $(2{,}017)^0 = 1$; $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$;

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3} = 4+2\sqrt{4-3} = 6$

исходя из этого, $B = \frac{3+1+4}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{8}{10}$

$B = 0{,}1A$, следовательно $A = 10B$; $A = 8$ 4б

Ответ: 8 +

№2

Пусть x - производительность каждого насоса; y и z - вместительности I и II бака соответственно ($x; y; z > 0$ по условию задачи)

тогда: $\begin{cases} \frac{y}{4x}+\frac{z}{3\cdot 4x}=11 \\ \frac{y}{3x}+\frac{z}{4\cdot x}=18 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3y+z}{12x}=11 \\ \frac{4y+3z}{12x}=18 \end{cases}$ $(3y+z)18 = 11(4y+3z)$

$54y+18z = 44y+33z$; $10y = 15z$;

$y = \cancel{3/2z}\ 1{,}5z$

Искомая величина: $\frac{z}{3x}$ - ? Зная что $y=\frac{3}{2}z$ из I-го ур-я:

$\frac{1{,}5z}{4x}+\frac{z}{12x}=11$; $\frac{5{,}5z}{12x}=11$; $\frac{z}{12x}=2$; $\frac{z}{3x}=8$ 4б

Ответ: 8 часов ✓

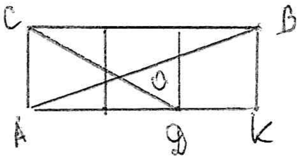
№3

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 20489



Пусть $CD \cap AB = O$; сторона квадрата каждого — x; $\angle COA$ — искомый

тогда $CB = 3x$; $AD = 2x$; $AB = x\sqrt{10}$; $CD = x\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора из прям-х треуг-в ACD и ABK.)

$\angle CBO = \angle BAD$ (как накрест-лежащие при пересечении параллельных прямых CB и AK секущей AB) $\Rightarrow \triangle CBO \sim \triangle AOD$ (по I-му):

1) $\angle CBO = \angle BAD$ 2) $\angle AOD = \angle COB$ (как вертикальные); $k = \frac{3}{2}$

Отсюда следует, что $\frac{CO}{OD} = \frac{3}{2} = \frac{OB}{OA}$

$OB = \frac{3x\sqrt{10}}{5} = \frac{3x\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $OC = \frac{3x\sqrt{5}}{5} = \frac{3x}{\sqrt{5}}$

Из $\triangle COB$ по теореме косинусов: $9x^2 = \frac{9x^2}{5} + \frac{2\cdot 9x^2}{5} - \frac{2\sqrt{2}\cdot 9x^2}{5}\cdot \cos \widehat{COB}$

$\cos \widehat{COB} = -\frac{2\cdot 9x^2\cdot 5}{5\cdot 2\sqrt{2}\cdot 9x^2} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle COB = 135^\circ$

$\angle COA$ — смежный с $\angle COB \Rightarrow \angle COA = 45^\circ$

Ответ: 45° + (4б)

№4

$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = \frac{1}{4}x$ ОДЗ: $[-1;1]$; ~~заметим, что $\sqrt{1-x}+1 > 0$ всегда~~

тогда $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{4}x$; $\frac{(1+x-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{4}x$

$x\left(\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{1}{4}\right) = 0$, 1) $x = 0$ — корень

2) ~~$\frac{4\sqrt{1-x}+3}{4(\sqrt{1+x}+1)} = 0$~~ $\frac{4\sqrt{1-x}+4-\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} = 0$; $\sqrt{1+x}+1 > 0$, следовательно,

$4\sqrt{1-x}+3 = \sqrt{1+x}$, $16-16x+24\sqrt{1-x}+9 = 1+x$

✓ $17x - 24 = 24\sqrt{1-x}$; ~~$x \geq$~~, отсюда $x > \frac{24}{17}$, т.к. справа число > 0,

но по ОДЗ $|x| \leq 1$, след-но, нет решений

Ответ: 0 ✓ 8б

№5

Рассчитаем время движения велосипедистов до встречи:

$\frac{75}{12+13} = 3$ (ч). Собака бежит все это время, поэтому расстояние, которое она пробежит $3\cdot 15 = 45$ (км)

Ответ: 45 км (12б)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 20489

№7

$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)(x-1)\leq 0\\ 2x-7\leq 0\\ (x-6)(x-2)\leq 0\end{cases}$ $\begin{cases}1\leq x\leq 5\\ x\leq 3{,}5\\ 2\leq x\leq 6\end{cases}$

ОДЗ: $2\leq x\leq 3{,}5$

$\sqrt{6x-x^2-5}\geq\sqrt{7-2x}+\sqrt{8x-x^2-12}$

т.к. обе части ≥ 0, то возв. в квадрат

$6x-x^2-5=7-2x+8x-x^2-12+2\sqrt{7-2x}\cdot\sqrt{8x-x^2-12}$

$2\sqrt{7-2x}\cdot\sqrt{8x-x^2-12}\geq 0$

$\left[\begin{array}{l}x=3{,}5\\ x=2\\ x=6\end{array}\right.$; но с уч. ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}x=3{,}5\\ x=2\end{array}\right.$

Ответ: 2; 3,5 + 12б

№8

$\begin{cases}\cos x+\cos y=\sin^2 x\\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x\end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases}\cos x+\cos y\geq 0\\ \sin x-\cos y\geq 0\\ \cos x\geq 0\end{cases}$

1) из II-го: $\cos^2 x=\sin x-\cos y$; $\cos y=\sin x-\cos^2 x$, подставим в I-ое уравнение,

2) $\sin x-\cos^2 x+\cos x=\sin^2 x$; $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$

~~$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$~~ $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.$ $n\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l}x=2\pi n\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.$; $n\in\mathbb{Z}$

тогда для $\cos y$: (из 1-го п.1) 1) $\cos y=0-1$; $y=\pi+2\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos y=1-0$; $y=2\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$

~~Ответ~~: проверкой установлено, что ОДЗ выполняется при каждой паре $(x;y)$

Ответ: $(2\pi n;\pi+2\pi k)$; $(\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi k)$; где ~~m~~; $n;k\in\mathbb{Z}$ 16б.

№9

$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(2017+x)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq -2014\\ x\neq -2015\\ x\neq -2016\\ x\neq -2017\\ x\neq -2018\end{cases}$

пусть $x+2016=y$, тогда: $\frac{1}{(y-2)(y-1)}+\frac{1}{(y+2)(y+1)}+\frac{1}{y(y-1)}+\frac{1}{y(y+1)}=\frac{1}{10^6-1}$

$\frac{y^2+3y+2+y^2-3y+2}{(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)}+\frac{y+1+y-1}{y(y-1)(y+1)}=\frac{1}{10^6-1}$; $\frac{2y^2+4}{(y^2-4)(y^2-1)}+\frac{2}{(y^2-1)}=\frac{1}{10^6-1}$

$\frac{2y^2+4+2(y^2-4)}{(y^2-4)(y^2-1)}=\frac{1}{10^6-1}$; $\frac{4y^2-4}{(y^2-4)(y^2-1)}=\frac{1}{10^6-1}$; $\frac{4}{y^2-4}=\frac{1}{10^6-1}$; $4\cdot 10^6-4=y^2-4$; $y^2=4\cdot 10^6$

$y=\pm 2000$

$\left[\begin{array}{l}x+2016=2000\\ x+2016=-2000\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-16\\ x=-4016\end{array}\right.$

Ответ: -16; -4016 + 16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 20489

№10

~~Дано~~ ~~пер~~ данное задание эквивалентно заданию: найти все a, при которых $(2x-6)a^2+(32-10x)a-x-8<0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию: $2<x<4$

$x\cdot 2a^2-6a^2+32a-x\cdot 10a-x-8<0$

$x(2a^2-10a-1)<6a^2-32a+8$

$2a^2-10a-1=0$

$D=108$

$a_{12}=\frac{10\pm\sqrt{108}}{4}$ промеж. 1

следовательно, $\left[\frac{10-\sqrt{108}}{4};\ \frac{10+\sqrt{108}}{4}\right]$;

где $\frac{10-\sqrt{108}}{4}<0$; $\frac{10+\sqrt{108}}{4}>5$) $2a^2-10a-1<0$

(~~примерно~~ $-0{,}2$ до $5{,}2$)

1) допустим, что a ~~положительно~~ $\in$ промежуток 1 $(\cancel{-0{,}2};\cancel{5{,}2})$

тогда $x>\frac{6a^2-32a+8}{2a^2-10a-1}$ – верно

~~от~~ для любого $x\in(2;4)$, следовательно,

$\frac{6a^2-32a+8}{2a^2-10a-1}\geq 2$; $6a^2-32a+8=4a^2-20a-2$

$2a^2-12a+10=0$

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$a=1;5\in$ области $(-0{,}2;5{,}2)$ выполняется для любого

2) при $a\notin$ промежуток 1 $(\cancel{-0{,}2};\cancel{5{,}2})$: $x<\frac{6a^2-32a+8}{2a^2-10a-1}$

$x\in(2;4)$, следовательно,

$\frac{6a^2-32a+8}{2a^2-10a-1}\geq 4$; $6a^2-32a+8=8a^2-40a-4$

$2a^2-8a-12=0$

$a^2-4a-6=0$

$D=40$; $a_{12}=2\pm\sqrt{10}$

Ср-м $2+\sqrt{10}$ и $\frac{10+\sqrt{108}}{4}$

$8+4\sqrt{10}$ и $10+\sqrt{108}$

$\cancel{2+}4\sqrt{10}$ и $2+2\cdot\sqrt{27}$

$\cancel{1+}2\sqrt{10}$ и $1+\sqrt{27}$

40 и $1+27+2\sqrt{27}$

~~$1+4\sqrt{10}+40$ и 27~~

12 и $2\sqrt{27}$

~~$4\sqrt{10}>14$,~~ 6 и $\sqrt{27}$; $6>\sqrt{27}$

следовательно ~~27~~; $2+\sqrt{10}$ не принадлежит промежутку (1)

Ср-м $2-\sqrt{10}$ и $\frac{10-\sqrt{108}}{4}$

$8-4\sqrt{10}$ и $10-2\sqrt{27}$

$2\sqrt{27}$ и $2+4\sqrt{10}$

$\sqrt{27}$ и $1+2\sqrt{10}$

27 и $1+40+4\sqrt{10}$

$-14<4\sqrt{10}$, следовательно,

$2-\sqrt{10}$ не принадлежит промежутку (1)

Ответ: $[2-\sqrt{10};\ 1]$, $[5;\ 2+\sqrt{10}]$

12б

№5

$tg15^\circ\cdot tg25^\circ\cdot tg35^\circ\cdot tg85^\circ$ ~~...~~ $tg75^\circ$ ~~$tg65^\circ\cdot tg55^\circ$~~ $tg5^\circ$ $tg15^\circ\cdot tg25^\circ\cdot tg35^\circ=tg5^\circ$

2 ш.г