ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16445

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания СПбГЭТУ ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	6	8	12	0	0	16	4	~~62~~	шестдесят два	

58 пятьдесят восемь

№1

$$B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0,2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2,017)^0\cdot\sqrt{0,36}=$$

$$=\frac{3^{10}\cdot 3^{-9}+5^4\cdot 5^{-4}+4}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{4-3}}\cdot 1\cdot 0,6=\frac{3+1+4}{6}\cdot 0,6=0,8$$

$B=0,1\cdot A \Rightarrow A=10B \Rightarrow A=0,8\cdot 10=8$

Ответ: 8 + 4б

№2

Пусть x – произв-ть одного насоса
V_1 – объём 1-го танкера; V_2 – объём второго танкера

Тогда, если $t\cdot x=V$, то по усл-ию:

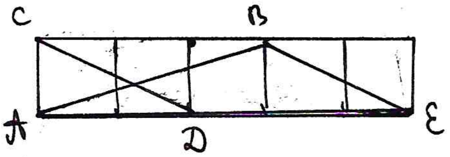
$$\begin{cases}4x\cdot 11=V_1+\frac{1}{3}V_2\\ \frac{V_1}{3x}+\frac{\frac{1}{4}V_2}{x}=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}44x=V_1+\frac{1}{3}V_2\\ 54x=V_1+\frac{3}{4}V_2\end{cases}\Bigg|-$$

$10x=\frac{5}{12}V_2 \Rightarrow 24x=V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{3x}=8$ (часов)

Т.к. $\frac{V_2}{3x}$ – время, за кот.-ое 3 насоса наполнят второй танкер, то ответ 8 часов

Ответ: 8 + 4б

№3



Проведём $BE \parallel CD \Rightarrow \angle(AB;CD)=\angle(AB;BE)$

По теореме косинусов:

$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2\cdot AB\cdot BE\cdot \cos\angle ABE$

$AE=5$, по теореме Пифагора: $AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$BE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$25 = 10+5-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\angle ABE \Rightarrow \cos\angle ABE = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle ABE = 135^\circ \Rightarrow \angle(AB;CD)=45^\circ.$ 4б

Ответ: 45° +

№5

$\mathrm{tg}\,15^\circ\cdot\mathrm{tg}\,25^\circ\cdot\mathrm{tg}\,35^\circ\cdot\mathrm{tg}\,85^\circ=1$

$(\sin 15^\circ\cdot\sin 25^\circ)\cdot(\sin 35^\circ\cdot\sin 85^\circ)=(\cos 15^\circ\cdot\cos 25^\circ)\cdot(\cos 35^\circ\cdot\cos 85^\circ)$

/т.к. все cos-сы $\neq 0$/

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Тогда $\frac{(\cos 40^\circ-\cos 10^\circ)}{-2}\cdot\frac{(\cos 120^\circ-\cos 50^\circ)}{-2}=\frac{(\cos 40^\circ+\cos 10^\circ)}{2}\cdot\frac{(\cos 120^\circ+\cos 50^\circ)}{2}$

$-\cos 10^\circ\cdot\cos 120^\circ-\cos 40^\circ\cdot\cos 50^\circ=\cos 10^\circ\cdot\cos 120^\circ+\cos 40^\circ\cdot\cos 50^\circ$

$2\cos 10^\circ\cdot\cos 120^\circ+2\cos 40^\circ\cdot\cos 50^\circ=0$

$\cos 90^\circ+\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ=0$

$\cos 90^\circ=0$, тогда $2\cos 60^\circ\cdot\cos 50^\circ+\cos 130^\circ=0$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, тогда $\cos 50^\circ+\cos 130^\circ=0$

$2\cdot\cos 90^\circ\cdot\cos 40^\circ=0$

$\cos 90^\circ=0$, тогда $0=0.$

Тождество док-но.

+ 8б

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16445

№6

Заметим, что собака бегала то время, за которое велосипедисты доехали до места встречи.

$V_{общая} = V_1 + V_2$ (т.к. дв-ие встречное)

$V_{общая} = 12 + 13 = 25$ (км/ч)

$t = S/V_{общая}$ $t = 75/25 = 3$ (ч), т.е. собака бегала 3 часа.

S' — расстояние, которое пробежала собака.

$S' = V_{собаки} \cdot t$ $S' = 15 \cdot 3 = 45$ (км)

Ответ: 45 + 12б

№7

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geqslant \sqrt{8x-x^2-12}$$

Усл-ия: $\begin{cases} x^2-6x+5 \leq 0 \\ 2x-7 \leq 0 \\ x^2-8x+12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1;5] \\ x \in (-\infty; 3,5] \\ x \in [2;6] \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 3,5]$

Т.к. справа корень ($\geqslant 0$), то левая часть тоже $\geqslant 0$ (по нер-ву)

Тогда возведём в квадрат.

$6x - x^2 - 5 + 7 - 2x - 8x + x^2 + 12 \geqslant 2\sqrt{(x^2-6x+5)(2x-7)}$

$-2x + 7 \geqslant \sqrt{2x^3 - 12x^2 + 10x - 7x^2 + 42x - 35}$

$2x^3 - 19x^2 + 52x - 35 \leq 4x^2 + 49 - 28x$

$2x^3 - 23x^2 + 80x - 84 \leq 0$

$(x-2)(2x^2 - 19x + 42) \leq 0$

$(x-2)(x-6)(x-3,5) \leq 0$

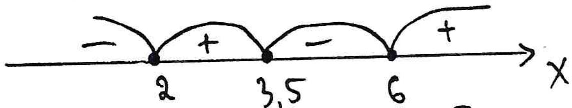
Рассм $f(x) = 2x^2 - 19x + 42$

$2x^2 - 19x + 42 = 0$

$D = 361 - 8 \cdot 42 = 25$

$x_1 = \frac{19+5}{4} = 6$

$x_2 = \frac{19-5}{4} = 3,5$



$x \in (-\infty; 2] \cup [3,5; 6]$

12б +

Но т.к. по усл-ям $x \in [2; 3,5]$, то $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3,5. \end{array}\right.$ Ответ: 2; 3,5

3

№8

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=\sin^2 x\\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x\end{cases}$$

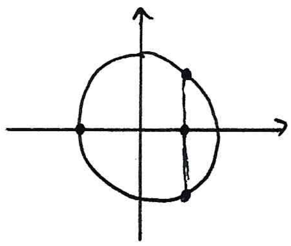
Усл-ия: $\sin x \geqslant \cos y$

$$\begin{cases}\cos y = 1-\cos^2 x-\cos x\\ \sqrt{\sin x-1+\cos^2 x+\cos x}=\cos x\end{cases}$$

$$\sin x+\cos x=1$$

т.к. $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, то $\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$

$$2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$



$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\left[\begin{aligned}x&=2\pi k\\ x&=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{aligned}\right.$$, где $k\in\mathbb{Z}$

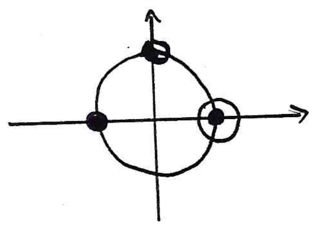
Если $x=2\pi k$, то $\cos y=1-1-1=-1$

$y=\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$

Если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, то $\cos y=1-0-0=1$

$y=2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=2\pi k\\ y=\pi+2\pi n\end{cases}\\ &\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ y=2\pi n\end{cases}\end{aligned}\right. \quad \Big/ \begin{matrix}k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}\end{matrix}\Big/$$



Но $\sin x\geqslant\cos y$ по усл-ям.

$\sin 2\pi\geqslant\cos\pi$ $(0>-1)$

$\sin\frac{\pi}{2}\geqslant\cos 2\pi$ $(1=1)$

Ответ: $\begin{cases}x=2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\\ y=\pi+2\pi n, & n\in\mathbb{Z}\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\\ y=2\pi n, & n\in\mathbb{Z}\end{cases}$

№4

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$$

Усл-ия: $\begin{cases}1+x\geq 0\\1-x\geq 0\end{cases}$

$x\in[-1;1]$ (*)

$$\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)\cdot(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{4}x.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

, т.к. $\sqrt{1+x}+1>0$ при любых x, то

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\ 4\sqrt{1-x}+4=\sqrt{1+x}+1\end{array}\right.$$

$$4\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}-3$$ ($x\geq 8$!)

$$16-16x=1+x+9-6\sqrt{1+x}$$

$$6\sqrt{1+x}=17x-6$$

$$36+36x=289x^2+36-204x$$

$$289x^2-240x=0$$

$$x\cdot(289x-240)=0$$

$$\left[\begin{array}{ll}x=0 & \text{уд. усл. (*)}\\ x=\dfrac{240}{289} & \text{уд. усл. (*)}\end{array}\right.$$

6б.

Ответ: 0; $\cancel{\frac{240}{289}}$

№9

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

$$x+2014=t$$

$$\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}+\frac{1}{(t+2)(t+3)}+\frac{1}{(t+3)(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{1}{t+1}\cdot\frac{(t+2+t)}{t(t+2)}+\frac{1}{t+3}\cdot\frac{(t+2+t+4)}{(t+2)(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{t(t+2)}+\frac{2}{(t+2)(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

(см. продолжение далее.)

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16445

№ 9 (продолжение)

$$\frac{2}{t+2}\cdot\frac{t+4+t}{t(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{t^2+4t}=\frac{1}{999\,999}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 3999996 \\ 4 \\ \hline 15999984 \end{array}$$

$$t^2+4t-3999996=0$$

$$D=16+15999984=16000000$$

$$t_1=\frac{-4+4000}{2}=\frac{3996}{2}=1998$$

$$t_2=\frac{-4-4000}{2}=-2002$$

$$x=t-2014$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-4016 \\ x=-16 \end{array}\right.$$

Нулей в знаменателях не получается.

Ответ: $-16;\ -4016$

16б

№10

$a\in(2;4)$

$$(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$$

$$2a\cdot x^2-6x^2+32x-10ax-a-8<0$$

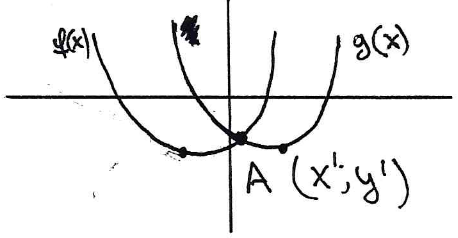
$$a(2x^2-10x-1)<6x^2-32x+8$$

$$f(x)=a\cdot(2x^2-10x-1)$$

$$g(x)=6x^2-32x+8$$

Нули $f(x)$: $\dfrac{5\pm3\sqrt3}{2}$ Нули $g(x)$: $\dfrac{8\pm2\sqrt{19}}{3}$

При этом $0<\dfrac{5+3\sqrt3}{2}<\dfrac{8+2\sqrt{19}}{3}$; $\dfrac{5-3\sqrt3}{2}<\dfrac{8-2\sqrt{19}}{3}<0.$



$g(x)>f(x)$

см. продолжение.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16445

№ 10 (прод-ие)

$g(x) > f(x)$ при $x \in (-\infty; x')$

1) Узнаем знак y'

При изменении a y' не меняет знак, тогда возьмём $a=3$

$6x^2-30x-3 = 6x^2-32x+8$

$2x = 11$

$x = 5{,}5 > 0$

Тогда при ув-ии a от 2 к 4 точка пересечения сдвигается влево.

Тогда крайний случай — при $a=4$

$8x^2-40x-4 = 6x^2-32x+8$

$2x^2-8x-12=0$

$x^2-4x-6=0$

...

4