ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16444

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	2	1	0	12	12	12	10	0	57	пятьдесят семь	[illegible]

№1 $A\cdot 0{,}1 = B \Rightarrow A = 10\cdot B = 10\cdot \dfrac{\left(\frac13\right)^{-10}:27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-4}+\left(64^{-\frac19}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt3}+\sqrt{2-\sqrt3}\right)^2}\cdot(2{,}017)^0\cdot\sqrt{0{,}36} = 10\cdot\dfrac{\left(\frac{3^{10}}{1^{10}\cancel{(3^3)^3}}+\frac{5^4}{\cancel{(5^2)^2}}+\left(\frac{1}{\sqrt[9]{4^3}}\right)^{-3}\right)}{2+\sqrt3+2-\sqrt3+2\left(\sqrt{2+\sqrt3}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt3}\right)}\cdot 1\cdot 0{,}6=$

$= \dfrac{10(3+1+\sqrt[9]{4^9})}{4+2(\sqrt{4-3})}\cdot\dfrac{6}{10}=\dfrac{10\cdot 8\cdot 6}{6\cdot 10}=8$ Ответ: $A=8$ 4

№2 ∃ x - производительность ~~того~~ одного насоса; V_1 - объём 1-ого танкера; V_2 -"- второго; y - время, за которое 3 насоса заполнили первый танкер;

Из условия и введённых мной обозначений получим систему ~~уравнени~~ уравнений:

$$\begin{cases} 11\cdot 4x = V_1+\frac13 V_2 & (\mathrm{I})\\ y\cdot 3x = V_1 & (\mathrm{II})\\ y\cdot 3x+\cancel{x}(8-y)x=\frac{1}{\cancel{3}4}V_2+V_1 & (\mathrm{III})\end{cases}$$

(из введённых обозначений) (II) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}18x-yx=\frac14 V_2 & (\mathrm{III}-\mathrm{II})\\ 44x=V_1+\frac13 V_2 & (\mathrm{I})\end{cases}$$

Надо найти:

$\dfrac{V_2}{3x}=?$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16444

$\Rightarrow (\text{I}): \frac{V_2}{3x} + \frac{V_1}{x} = 44 \Rightarrow \frac{V_2}{3x} = 44 - \frac{V_1}{x}$

$(\text{III}-\text{II}): \frac{V_2}{4x} = 18 - y \Rightarrow \frac{V_2}{3x} = \frac{4\cdot 18}{3} - \frac{4}{3}y = 24 - \frac{4}{3}y = 44 - \frac{V_1}{x}$

$(\text{II}): \frac{V_1}{3x} = y \Rightarrow 24 - \frac{4V_1}{9x} = 44 - \frac{V_1}{x} \Rightarrow 44 - 24 = \frac{V_1}{x}\left(1 - \frac{4}{9}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = \frac{5}{9}\frac{V_1}{x} \Rightarrow \frac{V_1}{x} = 36 \Rightarrow \frac{V_2}{3x} = 44 - 36 = 8$ часов

Ответ: 8 часов 4

№3 ~~Пусть~~ $]\, AC = x \Rightarrow CB = 3x \quad AD = 2x$

$\angle(AB;CD) = \angle AOC$, если за $(\cdot)O$ взять точку пересечения прямых.

$\cos(\angle ACD) = \frac{CA}{CD} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4x^2}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos(\angle BAC) = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$CD^2 = AD^2 + CA^2$
$AB^2 = AC^2 + CB^2$
по Th Пифагора

Сумма углов в треугольнике $= 180° \Rightarrow \angle CAO + \angle AOC +$
$+ \angle OCA = 180° \Rightarrow \angle AOC = 180° - \angle CAO - \angle OCA$

$\angle CAO = \angle CAB = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \qquad \angle ACD = \angle OCA = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

Ответ: $\angle(AB;CD) = 180° - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

2

№4 $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 & \text{(первая скобка)} \\ x \leq 1 & \text{(вторая скобка)} \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in [-1;1]$

? $\sqrt{1+x}^2-1^2=\frac{1}{4}x$

$1+x-1=\frac{1}{4}x \Rightarrow x(1-\frac{1}{4})=0 \Rightarrow x=0$ (подходит в ОДЗ)

Ответ: $x\in\{0\}$.

1

⑤ ~~$tg15°\cdot tg25°\cdot tg35°\cdot tg85° \stackrel{?}{=} 1$~~

~~$\frac{\sin15°}{\cos15°}\cdot\frac{\sin25°}{\cos25°}\cdot\frac{\sin35°}{\cos35°}\cdot\frac{\sin85°}{\cos85°}=$~~

⑥ $V_{сближения}=V_1+V_2=12\frac{км}{ч}+13\frac{км}{ч}=25\frac{км}{ч}$

$t_{встречи}=\frac{S}{V_{сближения}}=\frac{75км}{25\frac{км}{ч}}=3$ часа через 3 часа велосипедисты встретятся.

Не важно в каком направлении бегала собака, ведь от того что она пробегала из (·)B в (·)A или из (·)A в (·)B ~~нужны~~ расстояние, которое она пробежала будет $|AB|$. $\Rightarrow S_{собаки}=t_{встречи}\cdot V_{собаки}=3$ часа $\cdot 15км/ч=45$ км

Ответ: 45 км пробежала собака.

12

⑦ $\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x-x^2-5\geq0 \\ 7-2x\geq0 \\ 8x-x^2-12\geq0 \end{cases}$

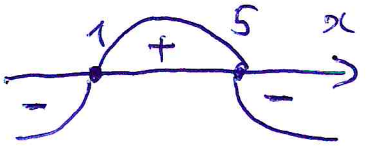
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16444

$\Rightarrow$ ① $7 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$

② $6x - x^2 - 5 \geq 0$

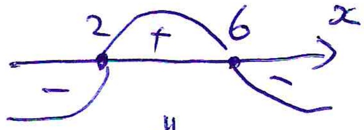
$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot(-1)(-5)}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} = 5; 1$



$\Rightarrow x \in [1; 5]$

③ $8x - x^2 - 12 \geq 0$

$\frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot(-1)(-12)}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = 6; 2$



$\Downarrow$

$x \in [2; 6]$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in [2; \frac{7}{2}]$.

$\sqrt{6x - x^2 - 5} \geq \sqrt{8x - x^2 - 12} + \sqrt{7 - 2x}$

$\cancel{6x} - \cancel{x^2} - 5 \geq \cancel{8x} - \cancel{x^2} - 12 + 7 - \cancel{2x} + 2\sqrt{7 - 2x}\sqrt{8x - x^2 - 12}$

$-5 + 12 - 7 \geq 2\sqrt{7 - 2x}\sqrt{8x - x^2 - 12}$

$0 \geq 2\sqrt{7 - 2x}\sqrt{8x - x^2 - 12}$: $2 \geq 0$, $\sqrt{7 - 2x} \geq 0$, $\sqrt{8x - x^2 - 12} \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{7 - 2x} \cdot \sqrt{8x - x^2 - 12} = 0$ (меньше быть не может)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 = 0 \ ?! \\ 7 - 2x = 0 \\ 8x - x^2 - 12 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{2} \ (+) \\ x = 2 \ (+) \\ x = 6 \ (-) \end{array}\right. \Rightarrow$ учитывая ОДЗ:

Ответ: $x \in \{2; \frac{7}{2}\}$.

12

(8) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin x - \cos y \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{array}$

$\cos x + \cos y = \sin^2 x$

$\sin x - \cos y = \cos^2 x$

складываем: $\cos x + \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x$
$= 1$ (основное тригонометр. тождество)

$\exists\ \cos x = a \quad \sin x = b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b = 1 - a \end{cases} \Rightarrow$

$a \in [-1;1]$; $b \in [-1;1]$

$\Rightarrow \begin{cases} (1-b)^2 + b^2 = 1 \\ (1-a)^2 + a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right. \end{cases}$ – согласованно: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k + \frac{1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

① $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x + \cos y = \sin^2 x$
$1 + \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2\pi k + \pi$, где $k \in \mathbb{Z}$

② $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 + \cos y = 1 \Rightarrow \cos y = 1 \Rightarrow y = 2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: (I) $x = 2\pi k + \frac{1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

(II) $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $y = 2\pi k + \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

12

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16444

9)
$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{99999}$$

$$\cancel{(x+2015)\frac{(x+2014)+(x+2016)}{(x+2014)(x+2015)(x+2016)}+\frac{(x+2018)+(x+2016)}{(x+2016)(x+2017)(x+2018)}}$$

$$\exists\, y = x+2016 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(y-2)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)y}+\frac{1}{y(y+1)}+\frac{1}{(y+1)(y+2)}=\frac{y(y+1)(y+2)+(y-2)(y+2)(y+1)+}{(y-2)(y-1)\,y\,(y+1)\cdot}$$

$$\frac{+(y-2)(y+2)(y-1)+(y-2)(y-1)y}{\cdot(y+2)}=\frac{y(y+1)(y+2)+(y^2-4)(y+1+y-1)+}{(y^2-4)(y^2-1)\,y}$$

$$\frac{+(y-2)(y-1)y}{}=\frac{y\left((y+1)(y+2)+(y^2-4)2+(y-1)(y-2)\right)}{(y^2-4)(y^2-1)\,y}=$$

$y\neq 0$ $\quad y\neq\pm 2$ $\quad y\neq\pm 1$

$$=\frac{(y+1)(y+2)+2(y+2)(y-2)+(y-1)(y-2)}{(y-2)(y+2)(y-1)(y+1)}=\frac{1}{999999}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^4-5y^2+4=999999\left(y^2+\cancel{3y}+2+2y^2-8+y^2-\cancel{3y}+2\right)\Rightarrow$$

$y^4-5y^2+4=999\,999(4y^2-4)$

$(y^2-1)(y^2-4)=999\,999\cdot 4(y^2-1)$

$y\neq\pm 1$ по ОДЗ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сократили

$(y^2-4)=999\,999$?

$y^2=1\,000\,003 \Rightarrow (x+2016)^2=1\,000\,003 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+4032x+2016^2-1000003=0$

$x^2+4032x+4064256-1000003=0$

$x^2+4032x+3064253=0$

$$x=\frac{-4032\pm\sqrt{4032^2-4\cdot1\cdot3064253}}{2\cdot 1}=-2016\pm\sqrt{2016^2-3064253}=$$

$$=-2016\pm\sqrt{4064256-3064253}=-2016\pm\sqrt{1000003}$$

корень не извлекли, так как
$1000^2=10^6$ и
$1001^2=1002001$

Под ОДЗ подходит:

$x\neq-2014$ $x\neq-2015$ $x\neq-2016$
$x\neq-2017$ $x\neq-2018$, а $x\notin\mathbb{Z}$

Ответ: $x=-2016\pm\sqrt{1000003}$.

10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16444

(10) Заменим x на a и a на x:

$(2x-6)a^2+(32-10x)a-x-8<0$

$2xa^2-6a^2+32a-10xa-x-8<0$

$x(2a^2-10a-1)<6a^2-32a+8$

?

$x<4$

$x>2$

(1) $x<\dfrac{6a^2-32a+8}{2a^2-10a-1} \Rightarrow x<3+\dfrac{-2a+11}{2a^2-10a-1} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \dfrac{-2a+11}{2a^2-10a-1} \leq 1 \Rightarrow -2a+11 \leq 2a^2-10a-1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 2a^2-8a-12=0 \Rightarrow a^2-4a-6=0 \quad a=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{40}}{2}=$~~

~~$=2\pm\sqrt{10}$~~ ~~$+\ 2-\sqrt{10}\ -\ 2+\sqrt{10}\ +\ a$~~

Далее можно дорешать и получить часть ответа.

~~(2) $x>6a^2$~~

Очевидно, что при $x=0$ $\forall a:(2<a<4)$ это неравенство удовлетворяется.

Ответ: $x=0$.

0