



ШИФР 3 2 2 5 2

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания СПБГЭТУ ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	8	8	12	2	8	0	0	46	сорок шесть	

$$1) 0.6 \cdot A = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2^{-2} + 2018^0}{(0.5)^2 - 5(-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} + 4.75 \right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - 5 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + 4.75 \right) =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{4} : \left(4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) + 4.75 \right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{4} : 5 + 4.75 \right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + 4.75 \right) = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

Ответ: 3

2) $\square$ n - кол-во млрд. куб. м. добычи "Новатек", π - "Газпром", l - "Лукойл", g - "Газпром", тогда из условия:

$$\frac{n}{\pi} = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\pi = 5n; \quad \frac{\pi}{l} = \frac{1}{2} : \frac{1}{10} = 5 \Leftrightarrow 5l = \pi; \quad \frac{n}{l} = \frac{1}{5} : \frac{1}{10} = 2 \Leftrightarrow 2l = n;$$

$$g = 0.3\pi \Leftrightarrow 10g = 3\pi; \quad n + l + g + 8 = \pi \Leftrightarrow 2l + l + \frac{3}{10}\pi + 8 = 5l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3l + 1.5l + 8 = 5l \Leftrightarrow 0.5l = 8 \Leftrightarrow l = 16 \Rightarrow \pi = 5 \cdot l = 80,$$

$$n = 2 \cdot l = 32, \quad g = \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10} \cdot 80 = 24$$

Ответ: "Новатек": 32 млрд. куб. м.; "Газпром": 80 млрд. куб. м.; "Лукойл": 16 млрд. куб. м.; "Газпром": 24 млрд. куб. м.

4) $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - x - 1) = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0, D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

5) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}$$



ШИФР

32 252

$$= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

2W(12)

6) Дано: $S = 10 \text{ км}$, $V_1 = 3 \text{ км/ч}$, $V_2 = 5 \text{ км/ч}$, $V_1 \uparrow V_2$, $V_0 = 12 \text{ км/ч}$
Найти: $S_0 = ?$



$$t_{\text{встр.}} = \frac{S}{V_{\text{сум.}}} = \frac{10 \text{ км}}{V_2 - V_1} = \frac{10 \text{ км}}{5 \text{ км/ч} - 3 \text{ км/ч}} = \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}} = 5 \text{ ч}$$

На протяжении этих 5-ти часов она будет летать туда и обратно со своей V_0 . Очевидно, что ей ничто не мешает, а значит она всё время летит с V_0 . Тогда:

$$S_0 = t \cdot V_0 = 5 \text{ ч} \cdot 12 \text{ км/ч} = 60 \text{ км}$$

Ответ: $S_0 = 60 \text{ км}$

7) $\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} \quad (A)$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ x^2 + 9x - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x \leq 11 \\ x^2 - 9x + 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ x \leq 11 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 6]$$

справочник, или, если
не удовлетворено условие
возвести в квадрат

(A) $\Leftrightarrow$

$$8x - x^2 - 7 - 2\sqrt{11 - x}\sqrt{8x - x^2 - 7} + 11 - x \geq 9x - x^2 - 18$$

$$\Leftrightarrow 7x + 4 - 2\sqrt{11 - x}\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq 9x - 18 \Leftrightarrow 2\sqrt{11 - x}\sqrt{8x - x^2 - 7} \leq -x + 22$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{11 - x}\sqrt{8x - x^2 - 7} \leq \frac{(-x + 22)^2}{4} \quad \text{так как } \sqrt{11 - x} > 0, \text{ то } x \in [3; 6]$$

по корням
поделили

$$\Leftrightarrow 8x - x^2 - 7 \leq 11 - x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3; 6]$$

Ответ: $[3; 6]$

8) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y(1) \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \sin^2 y \quad (A) \\ \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \cos^2 y \quad (B) \end{cases} \Rightarrow$



ШИФР

32252

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$\begin{cases} (A) + (B) \\ (A) - (B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 - 2 = \sin^2 y + \cos^2 y \\ \sin^2 x - \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - 2 - (-2) = \sin^2 y - \cos^2 y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - 4 = 1 \\ 2 \sin^2 x - 1 + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 2 \sin^2 y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \quad (d) \\ 2 \sin^2 x + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 \sin^2 y \end{cases}$$

$$(d) \rightarrow (B): 2 \sin^2 x + 4 - 8 \sin^2 x = 2 \sin^2 y \Leftrightarrow 2 - 3 \sin^2 x = \sin^2 y \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (A): \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = 2 - 3 \sin^2 x, \quad 1/t = \sin^2 x$$

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 2 - 3t \quad \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 y = 2 - 3 \sin^2 x = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}, \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \\ \sin^2 y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}$$

Подставим в исходную систему
для проверки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, y = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

32252

$$\Leftrightarrow X = \frac{\widehat{jc}}{4} + \frac{\widehat{jc}k}{2} ; Y = \frac{3\widehat{jc}}{4} + \frac{\widehat{jc}k}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\widehat{jc}}{4} + \frac{\widehat{jc}k}{2}, \frac{3\widehat{jc}}{4} + \frac{\widehat{jc}k}{2} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$