



ШИФР 28458

Класс 11

Вариант 11

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания СПбГТУ ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	2	8	8	12	12	16	0	0	66	шестьдесят шесть	

$$1. A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + (\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{5}{4} : 5 + 4,75 = 5$$

Найдём 60% от A:

$$A \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3.$$

Ответ: 3.

$$5. \text{Д-тв: } \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Док-во: } \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 1} =$$

$$= \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x - 1} = \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{-3 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2}{3}, \text{ ч.т.д.}$$

6. Исходя из усл. задачи, оса будет лететь столько времени, сколько второй путь. догоняет первого:

- 1) $5 \text{ км/ч} - 3 \text{ км/ч} = 2 \text{ км/ч}$ - скорость сближ. путей - ков.
- 2) $10 \text{ км} : 2 \text{ км/ч} = 5 \text{ ч.}$ - столько потреб. второму, чтобы догнать первого
- 3) $12 \text{ км/ч} \cdot 5 \text{ ч} = 60 \text{ км}$ - пролетела оса

Ответ: оса пролетела 60 км.

$$7. \sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{11 - x}$$

$$8x - x^2 - 7 \geq 9x - x^2 - 18 + 11 - x + 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)}$$

$$2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)} \leq 0 \Leftrightarrow (9x - x^2 - 18)(11 - x) = 0$$

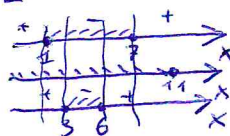
$$9x - x^2 - 18 = 0 \text{ или } 11 - x = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

$x = 11$ - не удовл. ОДЗ

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 8x - x^2 - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ 9x - x^2 - 18 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x \leq 11 \\ x^2 - 9x + 18 \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in [3; 6]$$

В силу того, что ответом на неравенство являются одиночные значения, проведём проверку:



ШИФР 28458

а) если $x=3$: $\sqrt{24-9-7} - \sqrt{11-3} \geq \sqrt{27-9-18} \Leftrightarrow \sqrt{8} - \sqrt{8} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$ - верно.
б) если $x=6$: $\sqrt{48-36-7} - \sqrt{11-6} \geq \sqrt{54-36-18} \Leftrightarrow \sqrt{5} - \sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$ - верно.

Ответ: $x=3$ или $x=6$.

2. Пусть x млрд. куб. м добыча „Роснефть“, тогда „Новатэк“ добыча $(\frac{2}{5})x$ млрд. куб. м, „ЛУКОЙЛ“ - $(\frac{1}{5})x$ млрд. куб. м, „Газпром Нефть“ - $(\frac{3}{10})x$ млрд. куб. м. Т.к. „Роснефть“ добыча на 8 млрд. куб. м. больше, чем остальные вместе, то:

$$x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}x + 8 = x$$

$$4x + 2x + 3x + 80 = 10x$$

$$x = 80$$

„Роснефть“: 80 млрд. куб. м.

„Газпром Нефть“: $80 \cdot 0,3 = 24$ млрд. куб. м.

„ЛУКОЙЛ“: $80 \cdot \frac{1}{5} = 16$ млрд. куб. м.

„Новатэк“: $80 \cdot \frac{2}{5} = 32$ млрд. куб. м.

Ответ: „Новатэк“: 32 млрд. куб. м; „Роснефть“: 80 млрд. куб. м; „Газпром Нефть“: 24 млрд. куб. м; „ЛУКОЙЛ“: 16 млрд. куб. м.

3) Т.к. расстояние между двумя деревьями в роще не меньше 12 м, то в радиусе 12 м от каждого дерева нет других деревьев. Соответственно если разбить всю рощу ($S_{\text{рощи}} = (258^2 \cdot \pi) \text{ м}^2$) на круги с радиусом 12 м ($S_{\text{кр.}} = (12^2 \cdot \pi) \text{ м}^2$) - именно столько занимает одно дерево исходя из усл. задачи, то чтобы разместить в роще более 2018 деревьев должно выполняться условие:

$$\frac{258^2 \pi}{12^2 \pi} \geq 2019 \Leftrightarrow \frac{258 \cdot 258}{144} \geq 2019 \Leftrightarrow 66564 \geq 290736 - \text{неверно!}$$

значит в роще находится не более 2018 деревьев, ч.т.д.

4) $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1, x \geq 1 (*)$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 - \text{не удовл. (*)} \quad \text{или} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \text{не удовл. (*)}$$



ШИФР 28458

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$ $H-C-H$

Сделаем проверку:

$$\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} + 1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

$$\sqrt{\frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{5} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$$

$$6-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5} - \text{верно.}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$-1 = \cos(x-y)$$

$$(x-y) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - \pi - 2\pi n$$

$$-\cos^2 x = \sin x \cdot \sin(x - \pi - 2\pi n)$$

$$-\cos^2 x = -\sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - 2\pi n\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

10. $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0, a \in (1;3); f(x) = (4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a = 0$

1) Если $a=2$, то ур-не квдр.: $-x+7 > 0$ $f(x)$

$$-x+7 > 0$$

$$x < 7$$

2) Если $a \neq 2$, то:

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a = 0$$

$$D = (13a-27)^2 - (16-8a)(33-13a) = 169a^2 - 702a + 729 - 528 + 472a - 104a^2 = 65a^2 - 230a + 201$$

$$65a^2 - 230a + 201 = 0; \text{ ур. им. корни, если } D \geq 0$$

$$D = 13225 - 3065 = 10160$$

$$a_1 = \frac{115 + \sqrt{10160}}{65} \approx 3.1; a_2 = \frac{115 - \sqrt{10160}}{65} \approx 0.9; \dots; \text{ т.к. } a \in (1;3) \text{ тогда, то на пер-во имеем корни}$$