ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3101

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.17.

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	5	11	15	20	91	девяносто один	

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 3101

N1.

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5.$

1) Заменим $x^2+2x+2=t$, то: уравнение примет вид:

$t(t-4)=5.$

$t^2-4t-5=0.$ По теореме Виета находим корни уравнения (видно, что $t=-1$ - корень), то:

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1) x^2+2x+3=0 \\ 2) x^2+2x-3=0. \end{array}\right.$ 1) $D<0$, то: $x\in\varnothing$ 2) Видно, что $x=1$ - корень, по теореме Виета: $x=-3$ - корень, то:

Ответ: 1; -3.

+

N2.

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

1) Возведем в квадрат правую и левую части, то:

$\begin{cases} 1).\ 2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=x+2 \\ x\geq 0. \end{cases}$

2) возведем еще раз левую и правую части, то:

$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3)=x^2+4x+4. \\ x\geq 0 \\ x\geq -\frac{1}{2} \\ x\geq +3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-20x-12=x^2+4x+4 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ 7x^2-24x-16=0 \\ (2)\ x\geq 3 \end{cases}$

(1) $\frac{D}{4}=144+112=256=16^2$

$x=\frac{12\pm 16}{7}=4;\ -\frac{4}{7}.$ Проверим корни, подставив в (2), то: Ответ: 4.

+

N3.

$\frac{x^2-2}{x^2-1}<-2$

$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1}<0.$

$\frac{3x^2-4}{x^2-1}<0$ Решим с помощью метода интервалов

$f(x)=\frac{3x^2-4}{x^2-1}$

Сравним числа: $1 \vee \frac{2}{\sqrt{3}}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3101

$1^2 \vee \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$1 < \frac{4}{3}$, то: $1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то: $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Ответ: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

+

№4.

$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

$\begin{cases} \log_4((2x+3)(x-1)) = \log_4 3 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(x-1) = 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

+

№5.

$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$

1) Пусть $2^x = t$, то ~~уравнение~~ неравенство, примет вид:

$t^2 + 3t - 4 > 0$.

$(t-1)(t+4) > 0$. Решим неравенство методом интервалов: $f(t) = (t-1)(t+4)$ $\underset{-4 \quad\; 1}{\overset{+ \quad - \quad +}{\longrightarrow}} t$ – промежутки знакопостоянства функции, то: $t \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

2.1) $t < -4$

$2^x < -4$, то: $x \in \varnothing$.

2.2) $2^x > 1$

$2^x > 2^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Ответ: $(0; +\infty)$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3101.

№6.

Пусть $4x$ учеников должно было поступить на спец. А, то: $6x$ учеников — на спец. С и $3x$ учеников — на спец. В, то: $4x+6x+3x=100S$, где $S=1\%$.

А по условию сказано, что план превысили, причем: $(4x+4)$ уч. — на спец. А; $(3x+5)$ уч. — на спец. В; $(6x+6)$ уч. — на специальность С. ~~Это~~, то: $(13x+15)$ уч — стало на самом деле, то: по условию сказано, что план превышен на $7\frac{9}{13}\%$.

Составим и решим уравнение:

$$\cancel{13x+15-13x=107\tfrac{9}{13}S-100S=7\tfrac{9}{13}S}$$

$$\cancel{15=}$$

$$\frac{13x+15}{13x}=\frac{107\frac{9}{13}S}{100S}$$

$$13x+15=\frac{14\cdot 13x}{13}$$

$x=15$, то:

1) A: 64 ученика
2) B: 50 учеников
3) C: 96 учеников.

Ответ: A − 64; B − 50; C − 96.

+

№9.

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt3}{2} \\ \sin x\cdot\cos y=-\frac{\sqrt3}{4} \end{cases}$$

1) ~~По~~ теореме, обратной теореме Виета составим и решим уравнение вида: at^2+bt+c, где $a=1$; $b=-\frac{1-\sqrt3}{2}$; $c=-\frac{\sqrt3}{4}$, то:

$t^2+\frac{\sqrt3-1}{2}t-\frac{\sqrt3}{4}=0$.

~~2) По тео~~ 2) Не трудно заметить, что: $\left[\begin{array}{l} t=\frac12 \\ t=\frac{\sqrt3}{2} \end{array}\right.$ (по теореме Виета)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3101.

Система уравнений примет вид:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x = \frac{1}{2}\\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos y = \frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = +\frac{\pi}{6}(-1)^{n_1} + \pi n_1\\ y = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n_2,\ n_1 \in Z;\ n_2 \in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\frac{\pi}{6}(-1)^{k_1} + \pi k_1\\ y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2,\ k_1 \in Z;\ k_2 \in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

~~Ответ: $(\frac{\pi}{6}(-1)^{n} + \pi n_1;$ ±~~

Ответ: $(\frac{\pi}{6}(-1)^{n_1} + \pi n_1;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n_2);\ (-\frac{\pi}{6}(-1)^{k_1} + \pi k_1;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2);$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in Z$.

+

№10.

$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = ?$

1) Пусть $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = t$, то:

$t^3 = 20+\sqrt{392} + 20 - \sqrt{392} + 3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}(\sqrt{20+\sqrt{392}} + \sqrt{20-\sqrt{392}})$.

Пусть $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} = m$; $\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = n$, то:

$(m+n)^3 = 40 + 3mn(m+n)$.

2) Рассмотрим $mn = \sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \sqrt[3]{(20+\sqrt{392})(20-\sqrt{392})} = \sqrt[3]{\cancel{400}^{20^2} - 392} =$
$= \sqrt[3]{400-392} = \sqrt[3]{8} = 2$, то:

$(m+n)^3 - 6(m+n) - 40 = 0$ – кубическое уравнение относительно $(m+n)$

3) Делители свободного члена – возможные корни данного уравнения, проверим их подстановкой, то:
$(m+n) = 4$ – корень.

4) Найдем другие корни, поделив ур-ие с помощью схемы Горнера:

	1	0	−6	−40
4	1	4	10	0

, то: $(m+n-4)((m+n)^2 + 4(m+n) + 10) = 0$.

5) $(m+n)^2 + 4(m+n) + 10 = 0$ – квадратное ур-ие, то:
$D < 0$, т.е. нет корней, то: $m+n = 4$, а это искомое выражение, то:

+

№7.

1) $\left.\begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_5 + b_9 = 6 \end{matrix}\right]$ – по условию, а т.к. ~~b_n~~ $b_n = b_1 q^{n-1}$, то:

$b_5 = b_1 q^4 = q^4$

$b_9 = b_1 q^8 = q^8$, то:

$b_5 + b_9 = 6 = q^8 + q^4$; ~~За~~ Пусть $q^4 = x$, то: $q^8 = x^2$ и уравнение примет вид:

$x^2 + x - 6 = 0$.

$D = 1 + 24 = 25$.

$x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = -3 \\ x = 2 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} q^4 = -3 \\ q^4 = 2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow q^4 = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt[4]{2}$

±

2) $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ – сумма первых n чисел геометрической прогрессии, то:

$S_{13} = \frac{1(q^{13} - 1)}{q - 1} = \frac{\sqrt[4]{2^{13}} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{2^{13}} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$.

±

№8.

Дано:

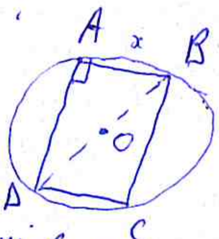
$R = 10$;

$2S_{пр} = S_{кр}$.

$a = ?$

$b = ?$

Решение:



1) DB – диаметр окружности, т.к. $\angle DAB$ – прямой и он вписанный, то: опирается на диаметр, т.е. $DB = 2R = 20$.

2) Пусть $AB = x$, то: По теореме Пифагора для $\triangle ABD$: $AD^2 = DB^2 - AB^2 = 4R^2 - x^2$, то: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

3) $S_{кр} = \pi R^2$, а т.к. по условию сказано, что $2S_{ABCD} = S_{кр}$, то:

$2x\sqrt{4R^2 - x^2} = \pi R^2$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3101

Т.к обе части уравнения неотрицательные, то возведём в квадрат:

$$4x^2(4R^2-x^2)=\pi^2R^4$$

$$4x^4-16x^2R^2+\pi^2R^4=0.$$

$\frac{D}{4}=$ 1 Пусть $x^2=t$, то:

$$4t^2-16tR^2+\pi^2R^4=0.$$

$$\frac{D}{4}=\overset{64}{16}R^4-4\pi^2R^4=4R^4(\overset{16}{4}-\pi^2)$$ ~~но: т.к. $\pi^2>9$, то:~~

$4-\pi^2<0$, т.е. $\frac{D}{4}<0$. Получается, что условие задачи не может быть выполнено ($2S_{ABCD}=S_{кр}$) независимо от радиуса окружности, т.е. $a\in\varnothing$ $b\in\varnothing$.

Ответ: Такого прямоугольника не существует.

$\frac{D}{4}=4R^4(16-\pi^2)$, то:

$$t=\frac{8\pm\sqrt{4R^4(16-\pi^2)}}{4}=x^2,$$ то: подставим значения в формулу:

$$x^2=2\pm\frac{2R^2\sqrt{16-\pi^2}}{4}=2\pm\frac{100\sqrt{16-\pi^2}}{2}=2\pm50\sqrt{16-\pi^2},$$ то: $2-\sqrt{16-\pi^2}\cdot50$

то: $x^2=2+50\sqrt{6{,}1404}$, если взять $\pi\approx3.14$, то:

$$a=\sqrt{2+50\sqrt{16-\pi^2}}$$

$$b=\sqrt{4\cdot100-2-50\sqrt{16-\pi^2}}=\sqrt{398-50\sqrt{16-\pi^2}}$$

Ответ: $a=\sqrt{2+50\sqrt{16-\pi^2}}$; $b=\sqrt{398-50\sqrt{16-\pi^2}}$

I