ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

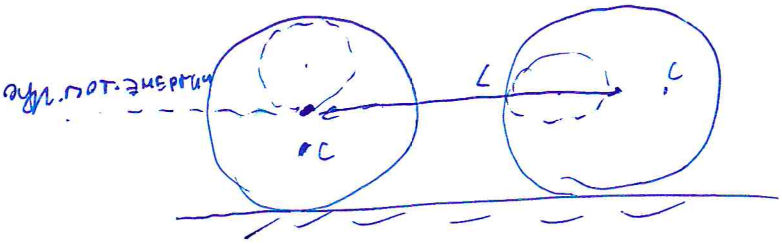
ШИФР 19167

Класс 11 **Вариант** 2 **Дата Олимпиады** 03.03.2018

Площадка написания ГЭТУ „ЛЭТИ"

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	2	5	5	5	5	5	27	двадцать семь	

①



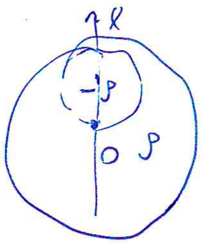
1) Найдём центр масс цилиндра.

~~$V_{ц} = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{R^3}{8} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{7}{8}$ - объём без~~

$V_ц = \pi R^2 H - \frac{\pi R^2}{4} H = \frac{3\pi R^2 H}{4}$ - объём без полости.

2) $\rho = \frac{m}{V_ц} = \frac{4m}{3\pi R^2 H}$ - плотность цилиндра

3)



Пусть плотность полости $-\rho$, а всего цилиндра ρ.

Тогда $x_C = \frac{0 \cdot \rho \cdot \pi R^2 H + \frac{R}{2}\left(-\rho \cdot \frac{\pi R^2 H}{4}\right)}{\rho \cdot \pi R^2 H - \rho \cdot \frac{\pi R^2 H}{4}} = -\frac{\frac{4m}{3\pi R^2 H} \cdot \frac{R \cdot \pi R^2 H}{4 \cdot 2}}{m} =$

$= -\frac{R}{6}$ - расстояние от центра масс до центра цилиндра. +

4) Свяжем L и угол поворота α. Т.к. проскальзывания нет, то

$L = \alpha \cdot R \Rightarrow \alpha = \frac{L}{R} = \frac{1{,}5\pi R}{R} = 1{,}5\pi$ - угол, на к-рый повернулся цилиндр.

5) $W_0 + A = W_1$ - з. сохр. энергии.

$W_0 = -\frac{mgR}{6}$ $\qquad A = W_1 - W_0 = 0 - \left(-\frac{mgR}{6}\right) = \frac{mgR}{6}$ - min работа

$W_1 = 0 \cdot mg = 0$

Ответ: $\boxed{\frac{mgR}{6}}$

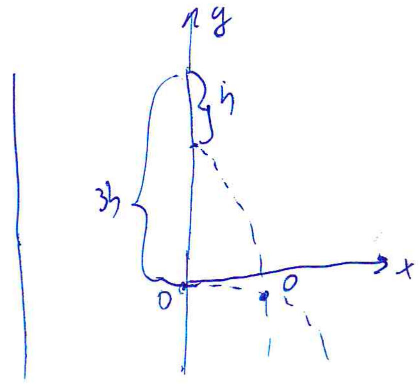
②

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19167



1) $p=\rho g h$ - давл. ж-сти

2) $\vec{F_2}=m\vec{a}$ (II з. Ньютона)

3) OX: ① $\rho g h \cdot dS = dm \cdot \frac{v}{dt}$, где dS - площ. отверстия, dm - масса вытекающей воды, dt - время вытекания порции; v - скорость в конце вытекания

$\rho g h dS dt = \underbrace{\rho\left(\frac{v}{2}\right)\cdot dt}_{dm} v$

$\left(\frac{v}{2} \text{ - т.к. } v \sim t\right)$

$2gh=v^2 \Rightarrow v_1=\sqrt{2gh}$ - скорость верхней струи

② $v_2=\sqrt{6gh}$ - скорость нижней струи.

4) $\begin{cases} y_1=2h-\frac{gt^2}{2} \\ y_2=-\frac{gt^2}{2} \end{cases}$ $t_1=\frac{x}{v_1}$ $t_2=\frac{x}{v_2}$

$\begin{cases} y_1=2h-\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_1^2} \\ y_2=-\frac{gx^2}{2v_2^2} \end{cases}$, для точки O: $y_1=y_2$

$2h-\frac{gx^2}{2v_1^2}=-\frac{gx^2}{2v_2^2}$

$2h-\frac{gx^2}{2\cdot 2gh}=-\frac{gx^2}{2\cdot 6gh}$

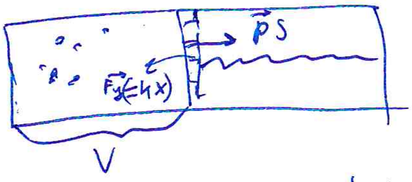
$\frac{gx^2}{gh}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=2h$

$x^2\left(\frac{3-1}{12}\right)=2h^2$

$x^2=12h^2 \Rightarrow x=2\sqrt{3}h$ - искомое расстояние

Ответ: $\boxed{2\sqrt{3}h}$ +

③



1) т.к. в отсутствие газа $\Delta x=0$ у пружины, то $F_y=k_0 x$ и $F_y=pS$ (где p - давление газа) в равновесии. (S - площадь попереч. сечения)

$p(x)=\frac{kx}{S}$, если $V'=nV$, то $x'S=n\cdot xS \Rightarrow x'=nx$

2) $dA=F\cdot dx=pS\cdot dx=p\,dV$ - элементарная работа.

3) $A=\sum dA=\sum p\,dV$ - суммарная работа

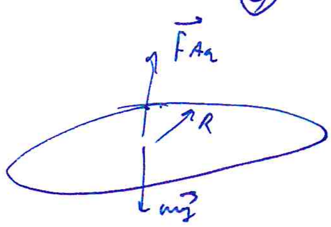
4) $A=\sum p\,dV=\sum\frac{kx}{S}\cdot S\,dx=\sum kx\,dx=\frac{kx^2}{2}\Big|_x^{nx}=\frac{kn^2x^2}{2}-\frac{kx^2}{2}=\frac{kx^2}{2}(n^2-1)$.

5) $\begin{cases} p=\frac{kx}{S} \\ V=x\cdot S \end{cases}$ $pV=kx^2 \Rightarrow A=\frac{pV}{2}(n^2-1)=\frac{10^6\,Па\cdot 4\cdot 10^{-3}м^3}{2}(3^2-1)=4\cdot 4\cdot 10^3\,Н\cdot м=16$ (кДж)

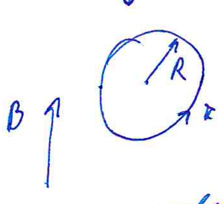
Ответ: $\boxed{16 кДж}$

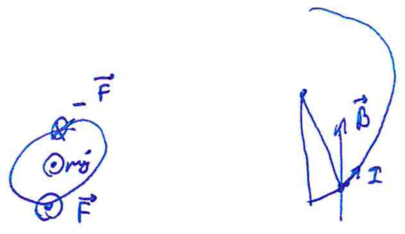
ШИФР 19167

4



вид сверху

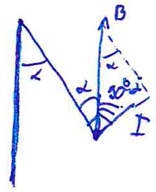




1) Рассмотрим одну из половин кольца.

$dF_A = BIdl\sin\beta$ – сила Ампера на элементарный участок с током (β – угол между B и I).

2)



$dF_A = BIdl\cdot\cos\alpha$

$dl = d\alpha\cdot R$

$dF_A = BIR\cos\alpha d\alpha$

$F_{A\frac{1}{4}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dF_A = BIR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha d\alpha = BIR\sin\alpha\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= BIR(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = BIR$ – от одного сектора. ~~т.к. таких 4 сектора, то $F_{A\Sigma} = 4F_{A\frac{1}{4}} = 4BIR$ больше на вылет~~

~~3) $F_{A\Sigma} = mg$ – т.к. равновесие~~

~~$4BIR = mg \Rightarrow m = \frac{4BIR}{g}$~~

~~Ответ: $\frac{4BIR}{g}$~~

3) Как видно, силы Ампера, действующие на кольцо, компенсируются.

Посчитаем моменты сил отн-но оси γ (где кольцо касается пола)

$dM = (R - R\cos\alpha)\cdot BIR\cos\alpha d\alpha =$

$= BIR^2(-1+\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha \Rightarrow$

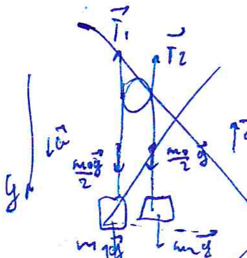
$\Rightarrow M_\Sigma = \int dM = BIR^2\int_0^{2\pi}(-1+\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha =$

$= BIR^2\left(\int_0^{2\pi}-\cos\alpha d\alpha + \int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha\right) = BIR^2\left(-\sin\alpha\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}d\alpha\right) = BIR^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{2\pi} + 2\pi - 0\right)\right) =$

$= \frac{2\pi}{2}BIR^2$ – момент силы.

4) $mg\cdot R = \pi BIR^2 \Rightarrow m = \frac{\pi BIR}{g}$

5) Ответ: $\boxed{\frac{\pi BIR}{g}}$



~~1) $\vec{F}_\Sigma = m\vec{a}$ (II з. Ньютона)~~

~~2) Если положить, что $R \ll l$, (где R – радиус блока, l – длина веревки) то $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ – т.к. две половины веревки одинаково действуют друг на друга (III з. Ньютона)* $a = a_2$, т.к. нить нерастяжима.~~

~~3) Oy: ① $\frac{m_0}{2}g + m_1g - T_1 = (\frac{m_0}{2} + m_1)a$~~

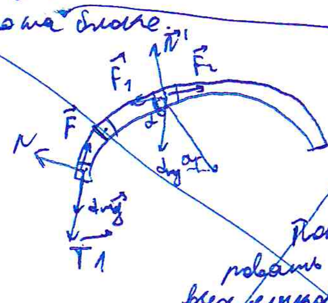
~~② $\frac{m_0}{2}g + m_2g - T_2 = -(\frac{m_0}{2} + m_2)a$~~

~~①-②: $(m_1 - m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a$~~

~~$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_0 + m_1 + m_2}$~~

~~Ответ: $\frac{(m_1 - m_2)g}{m_0 + m_1 + m_2}$~~

~~2) Пусть радиус блока R. Рассмотрим часть веревки, лежащую на блоке.~~



~~Разобьём веревку на много маленьких частей. Запишем II з. Ньютона на тангенциальную ось.~~

~~$F_1 - F_2 + dmg\cos\alpha = dm\,a$~~

~~Понятно, что если просуммировать все такие выражения для всех кусков, то будем выражение вида $T_1 - T_2 + \int_0^{\pi}dmg\cos\alpha = ma$, т.к. $\vec{F}_i = \vec{F}_{i-1}$ – по III з. Ньютона кусочки одинаково действуют друг на друга.~~

~~$\int_0^{\pi}dmg\cos\alpha = \int_0^{\pi}\rho dl g\cos\alpha = \int_0^{\pi}\frac{m_0}{l}d\alpha Rg\cos\alpha =$~~

~~$= -\frac{2m_0Rg}{l}$~~

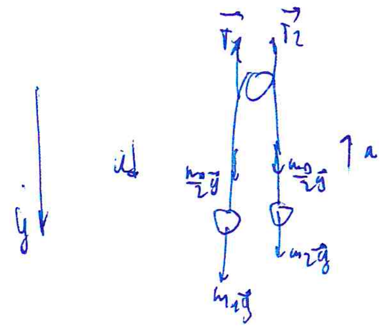
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19167

5



1) $\vec F_\Sigma = m\vec a$ (II з. Ньютона)

2) При $R \ll L$ (R - радиус блока; L - длина веревки) можно полагать, что $|\vec T_1| = |\vec T_2| = T$, т.к. на блоке лежит пренебрежимо малая часть верёвки

3) $a_1 = a_2$ - т.к. нить нерастяжима.

4) Oy: $(\frac{m_0}{2}+m_1)g - T = (\frac{m_0}{2}+m_1)a$

$(\frac{m_0}{2}+m_2)g - T = -(\frac{m_0}{2}+m_2)a$

$\Rightarrow (m_1-m_2)g = (m_0+m_1+m_2)a$

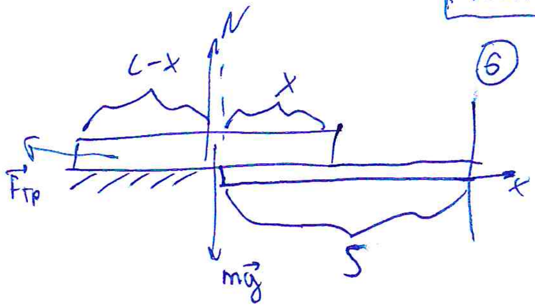
$\Downarrow$

$a = \frac{(m_1-m_2)g}{m_0+m_1+m_2}$

Ответ: $\boxed{\frac{(m_1-m_2)g}{m_0+m_1+m_2}}$

+

6



1) $\vec F_\Sigma = m\vec a$ (II з. Ньютона)

2) Найдём зависимость силы трения от x, где x - часть бруска, заехавшая в зону S.

3) $F_{тр} = \mu N$ - з. Кулона-Амонтона

4) для части x: $N_1 = \frac{mxg}{L}$; $F_{тр} = \mu N_1 = \frac{\mu mg}{L}x$

+

5) Ox: $F_{тр} = ma_x$

$ma_x = -\frac{\mu mgx}{L}$

$m\ddot x = -\frac{\mu mgx}{L}$

$\ddot x = -\frac{\mu g}{L}x$ - ур-ние гармонических колебаний

$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$.

6) $\frac{mv^2}{2} + A = \frac{mv_k^2}{2}$ - з. сохр. энергии (v - нач. скорость; v_k - конеч. скорость).

$\frac{mv^2}{2} - \int_0^S \frac{\mu g x m}{L}dx = \frac{mv_k^2}{2}$

$v^2 - 2\int_0^S \frac{\mu g x\,dx}{L} = v_k^2$

$v_k^2 = v^2 - 2\frac{\mu g}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_0^S = v^2 - \frac{\mu g S^2}{L}$

7) $v(t) = v\cdot\cos(\omega t)$

$\begin{cases} v(0) = v \\ v(t_0) = v_k = v\cdot\cos(\omega t_0) \end{cases}$, где t_0 - время прохождения уч-ка S.

$v_k = v\cdot\cos(\omega t_0)\ |(\ )^2$

$v_k^2 = v^2\cdot\cos^2(\omega t_0)$

$v^2 - \frac{\mu g S^2}{L} = v^2\cos^2(\omega t_0)$

+

$v^2(1-\cos^2(\omega t_0)) = \frac{\mu g S^2}{L}$ =>

=> $v^2 = \frac{\mu g S^2}{L\sin^2(\omega t_0)}$ => $v = \sqrt{\frac{\mu g}{L}}\frac{S}{\sin(\sqrt{\frac{\mu g}{L}}t_0)} = \sqrt{\frac{0,15\cdot 10\frac{м}{с^2}}{1,5 м}}\cdot\frac{0,5 м}{\sin(\sqrt{\frac{0,15\cdot 10}{1,5}}\frac{1}{с}\cdot 0,34 с)} \approx 0,74\frac{м}{с}$

Ответ: $\boxed{0,74\frac{м}{с}}$

+