

ШИФР 15300

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	1	8	8	3	12	16	8	8	72	семьдесят два	Кеми

N 5

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$$

Рассмотрим левую часть тождества:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{(\sin^2 x)^2 + \cos^4 x - 1}{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 - 1} = \frac{(1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 1}$$

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 1} = \frac{-2\cos^2 x + 2\cos^4 x}{(\sin^2 x)^2 - (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-2\cos^2 x + 2\cos^4 x}{(1 - \cos^2 x)^2 - \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x - 1} = \frac{-2\cos^2 x + 2\cos^4 x}{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}$$

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-2\cos^2 x + 2\cos^4 x}{-3\cos^2 x + 3\cos^4 x} = \frac{2}{3}.$$

8

N 1

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + (\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{\frac{5}{4}}{4 + 1} + 4,75 = (\frac{5}{4} : 5) + 4,75 = \frac{5}{4 \cdot 5} + 4,75 =$$

$$= 0,25 + 4,75 = 5$$

$$60\% \text{ от } A = 5 \cdot 0,6 = 3$$

Ответ: 3.

4

ШИФР 15300

N10

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0.$$

1) $a=1$: $(4-2)x^2 + (13-27)x + (33-13) > 0.$

$$2x^2 - 14x + 20 > 0.$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0.$$

$$(x-5)(x-2) > 0.$$



$$x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$$

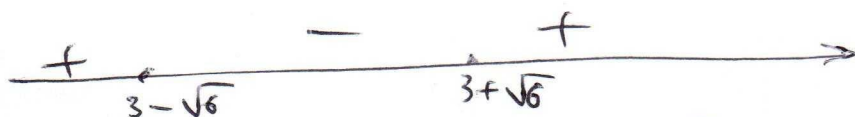
2) $a=3$: $(4-2 \cdot 3)x^2 + (13 \cdot 3 - 27)x + 33 - 13 \cdot 3 > 0.$

$$-2x^2 + 12x - 6 > 0$$

$$x^2 - 6x + 3 > 0.$$

$$D = 36 - 12 = 24 = (\sqrt{24})^2 = (2\sqrt{6})^2 \Rightarrow 2k.$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2}; \quad x = 3 \pm \sqrt{6}$$



$$x \in (-\infty; 3 - \sqrt{6}) \cup (3 + \sqrt{6}; +\infty)$$

$$3 + \sqrt{6} > 5 \Rightarrow x \in (5; 3 + \sqrt{6}).$$

$$3 - \sqrt{6} < 2 \Rightarrow x \in (-\infty; 3 - \sqrt{6}).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 3 - \sqrt{6}) \cup (5; 3 + \sqrt{6}).$$

N9

1

$$\frac{\sqrt[3]{k^2-2k+1} + \sqrt[3]{k^2-k} + \sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}} = \frac{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}} = \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{k-1-k} = \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{-1} = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

$$k = 2197.$$

$$\text{Ответ: } 2197.$$

где решение?

8

используя
формулу

$3 \pm \sqrt{6}$ - корни!

8



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

15300

$$2) \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \quad \text{N8 (предположение)}$$

$$\begin{cases} \frac{-\cos^2 x}{\sin x} = \sin y \\ \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg}^3 x = \operatorname{tg} y.$$

$$1) x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) = \operatorname{tg} y.$$

$$\operatorname{tg} y = 1$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$2) x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{ctg}^3 \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k \right) = \operatorname{tg} y$$

$$\operatorname{ctg}^3 - 1 = \operatorname{tg} y$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + \pi t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi l, \quad \forall l \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi t, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

N6.

$$0 + v_1 t = v_2 t.$$

$$10 + 3t = 5t.$$

$$2t = 10$$

$$t = 5 \text{ ч.}$$

$$S_0 = 2t \cdot v_0 = 12 \cdot 5 \cdot 2 = 120 \text{ км.}$$

Ответ: 120 км.

16

3



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



N 8

$$1) \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x}) = \sin^2 y \\ (\cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x}) = \cos^2 y \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 4 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^2 y + \cos^2 y$$

$$1 - 4 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 1$$

$$1 - 4 + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

~~3~~

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}$$

$$1 - 4 + \frac{1}{\frac{\sin^2 2x}{4}} = 1$$

$$1 - 4 + \frac{4}{\sin^2 2x} = 1$$

$$-3 + \frac{4}{\sin^2 2x} = 1$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} = 4$$

$$\sin^2 2x = 1$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, \forall l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \forall k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi l, \forall l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 15300

N4

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$x^3 - x^2 - 3x + 2x = 0.$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 = 5 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow 2x$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (не является реш. т.к. не принадлежит } [0; 3])$$

Проверка.

$$1) x_1 = 0$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$\sqrt{1} \neq -1 \Rightarrow \text{не является } x_1 = 0 \text{ не является реш.}$$

$$2) x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1.$$

$$\sqrt{\frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} - \frac{3(1 + \sqrt{5})}{2} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1.$$

$$\sqrt{\frac{21 + 3\sqrt{5} - 12 - 12\sqrt{5} + 8}{8}} = \frac{2 + 1 + \sqrt{5} - 2}{2}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

15300

N2

H — «Новатэк»

P — «Роснефть»

L — «Лукойл»

G — «Газпром нефть»

$$\begin{cases} V_H = \frac{1}{5} V \\ V_P = \frac{1}{2} V \\ V_L = \frac{1}{10} V \\ V_G = 0,3 \cdot V_P \\ V_P = 8 + (V_G + V_L + V_H) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_G = 0,3 \cdot \frac{1}{2} V = \frac{3}{20} V \\ \neq V_H = \frac{1}{5} V \\ V_P = \frac{1}{2} V \\ V_L = \frac{1}{10} V \\ V_P = 8 + (V_G + V_L + V_H) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_G = \frac{3}{20} V \\ V_H = \frac{1}{5} V \\ V_P = \frac{1}{2} V \\ V_L = \frac{1}{10} V \\ \frac{1}{2} V = 8 + \left(\frac{3}{20} V + \frac{1}{10} V + \frac{1}{5} V \right) \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \frac{1}{2} V = 8 + \left(\frac{3}{20} V + \frac{2}{10} V + \frac{1}{5} V \right)$$

$$\frac{1}{2} V = 8 + \left(\frac{3}{20} V + \frac{2}{20} V + \frac{4}{20} V \right)$$

$$\frac{1}{2} V = 8 + \frac{9}{20} V \quad | \cdot 20$$

$$10 V = 160 + 9 V$$

$$V = 160$$

Следовательно $V_H = \frac{160}{5} = 32$; $V_P = \frac{160}{2} = 80$; $V_L = \frac{160}{10} = 16$;

$$V_G = 24$$

Ответ: $V_H = 32$; $V_P = 80$; $V_L = 16$; $V_G = 24$

4



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 15300

№4 (продолжение)

~~$$\sqrt{\frac{17-8\sqrt{5}}{8}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ не евл. рещ.} \right).$$~~

$$\sqrt{\frac{16+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-12-12\sqrt{5}+8}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$\sqrt{\frac{16+8\sqrt{5}-12-12\sqrt{5}+8}{8}} = \sqrt{\frac{12-4\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ евл. рещ.}$$

$$3) x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \frac{1-\sqrt{5}-2}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow x_5 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ не евл. рещ.}$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

№3

8

Если расстояние между деревьями ~~минимальное~~
~~равное~~, то 3 дерева образуют равносторонний треугольник. $S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Тогда площадь круга. $S_{\text{к}} = \pi R^2 = \pi \cdot 258^2$

~~$$S_{\Delta} = S_{\text{к}} = n \rightarrow \max.$$~~

~~$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \pi \cdot 258^2$$~~

$$\frac{258^2 \cdot \pi \cdot 4}{a^2\sqrt{3}}$$

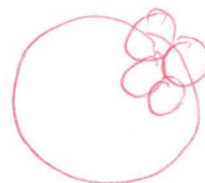
~~$$a = \frac{258\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$$~~

~~$$a = 12$$~~

~~$$\frac{4\sqrt{3}}{4\pi \cdot 258^2}$$~~

$$a = 12$$

1





$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 15300

№3 (продолжение)

$$\frac{\pi \cdot 258^2}{a^2 \cdot \sqrt{3}} < 2018.$$

$$\pi \cdot 258^2 < 2018 \cdot a \cdot \sqrt{3}.$$

при $a \geq 12$.

~~$$\frac{\pi \cdot 258^2}{a^2 \cdot \sqrt{3}}$$~~

$$\begin{array}{r} 258 \overline{) 12} \\ -24 \\ \hline 18 \\ -12 \\ \hline 60 \\ -48 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{\pi \cdot (21,5)^2}{\sqrt{3}} < 2018$$

~~$$(21,5)^2$$~~

~~$$\begin{array}{r} 21,5 \\ \times 21,5 \\ \hline \end{array}$$~~

$$\frac{\pi \cdot 22^2}{\sqrt{3}} < 2018.$$

$$441 \cdot \pi < 2018 \cdot \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

Очевидно ~~что~~ $2018 \cdot a \cdot \sqrt{3} > \pi \cdot 258^2$ (при $a > 12$).

Таким образом деревьев в роще размещено
не более 2018 ~~и, более~~ 4.т.д

~~Ответ:~~



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15300

N 7

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$\begin{cases} 8x - x^2 - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ 9x - x^2 - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x - 11 \leq 0 \\ x^2 - 9x + 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x-1) \leq 0 \\ x \leq 11 \\ (x-6)(x-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [1; 7] \\ x \leq 11 \\ x \in [3; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 6]$$

$$8x - x^2 - 7 - 2\sqrt{(8x - x^2 - 7)(11 - x)} + 11 - x \geq 9x - x^2 - 18$$

$$\cancel{9x + 4 - 2\sqrt{(8x - x^2 - 7)(11 - x)} \geq 9x - 18}$$

$$7x + 4 - 2\sqrt{(8x - x^2 - 7)(11 - x)} \geq 9x - 18$$

$$-2\sqrt{(8x - x^2 - 7)(11 - x)} \geq 2x - 22 \quad | :2$$

$$\sqrt{(8x - x^2 - 7)(11 - x)} \leq 11 - x$$

$$(8x - x^2 - 7)(11 - x) \leq (11 - x)^2$$

$$(8x - x^2 - 7)(11 - x) - (11 - x)^2 \leq 0$$

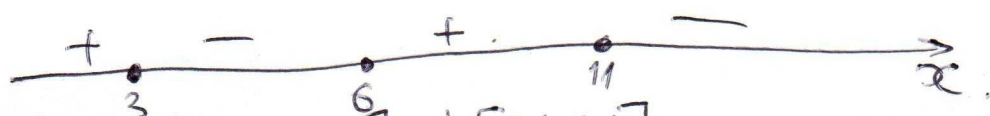
$$(11 - x)(8x - x^2 - 7 - 11 + x) \leq 0$$

$$(11 - x)(-x^2 + 9x - 18) \leq 0$$

$$(11 - x)(x^2 - 9x + 18) \leq 0$$

$$(11 - x)(x - 6)(x - 3) \leq 0$$

$$(x - 11)(x - 6)(x - 3) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; 3] \cup [6; 11]$$

$$x^{+0.03} \in \{3\} \cup \{6\}$$

$$\text{Ответ: } x = 3, x = 6.$$

12