ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им Н. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	~~2~~	~~8~~	8	ф	12	12	8	8	66	~~шесть~~ шестьдесят шесть	

№1

$A - ?$, если $0{,}1A = B$

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot (2{,}017)^0\cdot\sqrt{0{,}36} = \frac{3^{10}\cdot 3^{-9} + 5^4\cdot 5^{-4} + 2^{\frac{2\cdot 3^1}{3^1}}}{2+\sqrt{3}+2\sqrt{4-3}+2-\sqrt{3}}\cdot 1\cdot 0{,}6 =$$

$$= \frac{(3+1+4)\cdot 6}{10(2+2+2)} = \frac{8}{10}$$

$$A = \frac{B}{0{,}1} = 10B = \frac{10\cdot 8}{10} = 8$$

(4)

Ответ: 8 V

№2

Так как насосы работают с одинак произ-ью, обозначим ее за x $\frac{\text{ед.}}{\text{ч.}}$. Пусть объём 1 танкера равен a ед., второго b ед. Составим систему из условий задачи и найдем время q (ч), за которое три насоса наполнят 2 танкер.

$$\begin{cases} \frac{3a+b}{3\cdot 4x} = 11 \\ \frac{a}{3x} + \frac{b}{4x} = 18 \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b = 11\cdot 12x \quad |\cdot 4 \\ 4a+3b = 12\cdot 18x \quad |\cdot(-3) \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a+4b = 44\cdot 12x \\ -12a-9b = -3\cdot 12\cdot 18x \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases}$$

(Учитывая, что $x \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $q \neq 0$)

$$\begin{cases} 4b-9b = (11\cdot 12\cdot 4 - 3\cdot 12\cdot 18)x \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b = 12x(44-54) \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{12\cdot 10\cdot x}{5} \\ q = \frac{b}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 24x \\ q = \frac{24x}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 24x \\ q = 8 \end{cases}$$

Итак, $q = 8$ ч – за это время три насоса смогут наполнить 2 танкер.

(4)

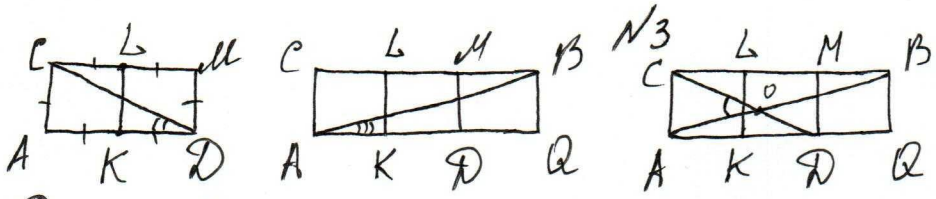
Ответ: за 8 часов три насоса наполнят полностью второй танкер. V

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583



N3

Дано: $CLKA$, $LKDM$, $MDQB$ - квадраты.

Н-ти: $\angle(CD, AB)$

Решение:

1) Пусть сторона квадрата равна a. Тогда $CA=a$, $CM=2a$, $CB=3a$

2) $\triangle CAD$: $\angle CAD=90°$, $CA=a$, $AD=CM=2a$

$\frac{CA}{AD}=tg\angle CDA \Rightarrow \frac{a}{2a}=tg\angle CDA \Rightarrow \angle CDA=arctg\frac{1}{2}$

3) $\triangle ABQ$: $\angle AQB=90°$, $AQ=CB=3a$, $BQ=AC=a$

$\frac{BQ}{AQ}=tg\angle BAQ \Rightarrow \frac{1}{3}=tg\angle BAQ \Rightarrow \angle BAQ=arctg\frac{1}{3}$

4) $CD\cap AB=O$

$\triangle AOD$: $\angle O+\angle A+\angle D=180°$

$\angle A=arctg\frac{1}{3}$ (п. 3), $\angle D=arctg\frac{1}{2}$ (п. 2) $\Rightarrow \angle AOD=180°-arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{1}{3}$

5) $\angle COA$ и $\angle AOD$ - смеж. $\Rightarrow \angle COA+\angle AOD=180° \Rightarrow \angle COA=180°-\angle AOD$

$\angle COA=arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}$

$\angle(CD, AB)=\angle COA=arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}$ (2)

Ответ: $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}=?$

N4

$\left(\sqrt{1+x}-1\right)\Big/\sqrt{1-x}+1\Big)=\frac{1}{4}x$

Пусть $\sqrt{1+x}-1=t$

$\sqrt{1+x}=t+1$

$\begin{cases}1+x=(t+1)^2\\ t+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t^2+2t\\ t\geq -1\end{cases}$

Тогда $\sqrt{1-x}=\sqrt{1-t^2-2t}$, $t\geq -1$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583

$$\begin{cases} t\left(\sqrt{1-t^2-2t}+1\right) \ge \frac{1}{4}\left(t^2+2t\right) \\ t \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\left(\sqrt{1-t^2-2t}+1-\frac{1}{4}(t+2)\right) \ge 0 \quad (1) \\ t \ge -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow t \ge 0$$

$$(1)\ \left[\begin{array}{l} t \ge 0 \\ \sqrt{1-t^2-2t} = \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 0 \\ \begin{cases} 1-t^2-2t = \left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 0 \\ \begin{cases} t \ge 2 \\ 1-t^2-2t = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \begin{cases} t \ge 2 \\ \frac{17}{16}t^2 + \frac{7}{4}t - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 0 \\ \begin{cases} t \ge 2 \\ 17t^2+28t-12=0 \quad (*) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{17} \\ t = -2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow t \ge 0$$

(*) $17t^2+28t-12=0$

$D_1 = 14^2 + 12 \cdot 17 = 400$

$t = \frac{\pm 20 - 14}{17}$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{17} \\ t = -\frac{34}{17} \end{array}\right.$

Итак, $t \ge 0$, то есть $\sqrt{1+x} - 1 \ge 0$

$\sqrt{1+x} \ge 1$

$1+x \ge 1$

$x \ge 0$

8

Ответ: 0 ,

N5

$$\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}35^\circ \cdot \operatorname{tg}85^\circ = 1$$

$$\frac{\sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 85^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 85^\circ} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 50^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 110^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 110^\circ + \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 50^\circ)} = 1$$

$$\cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} - \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2} - \cos 20^\circ \cdot \cos 110^\circ + \cos 50^\circ \cdot \cos 110^\circ = \cos 110^\circ \cdot \cos 20^\circ + \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} + \cos 110^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2}$$

$$2\cos 110^\circ \cdot \cos 20^\circ = -\cos 50^\circ$$

$$\sin(90^\circ - 110^\circ)\cos 20^\circ = -\frac{1}{2}\cos 50^\circ$$

$\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2}\cos 50^\circ$

$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$

$\cos(90^\circ - 40) = \cos 50^\circ$

$\cos 50^\circ = \cos 50^\circ$

ч.т.д. ✓

(8)

№6

Дано:

$S = 75$ км

$v_1 = 12 \frac{км}{ч}$

$v_2 = 13 \frac{км}{ч}$

$u = 15 \frac{км}{ч}$

Н-ти:

L

Решение:

Пусть S - расст. от А до В; v_1 - скорость первого велосипедиста; v_2 - скорость второго; u - скорость собаки, L - путь, который она пробежала

Так как велосип-ты двигались одинак. время, то

$\frac{x}{12} = \frac{75-x}{13}$ (где x - путь, пройденный 1-ым) $\left(\begin{matrix} S = vt \\ t = \frac{S}{v} \end{matrix}\right)$

$25x = 12 \cdot 75 \Rightarrow x = 36$ км - прошел 1-ый

$75 - 36 = 39$ (км) - прошел 2-ой

$T_1 = \frac{L_1}{u} = \frac{x - T_1 \cdot 13}{15}$

$T_2 = \frac{L_2}{u}$ и т.д.

Зам, что T_1; T_2 - убывающая ар. прогр.

$t = \frac{2T_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где $d = \frac{x - T_1 \cdot v_2}{u}$

? ✓

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583

№8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x - \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \\ \cos x \geq 0 \quad (2) \\ \sin x + \cos x = 1 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ \cos y = 1 - 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \cos y = 0 - 1 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = -\pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right.$$

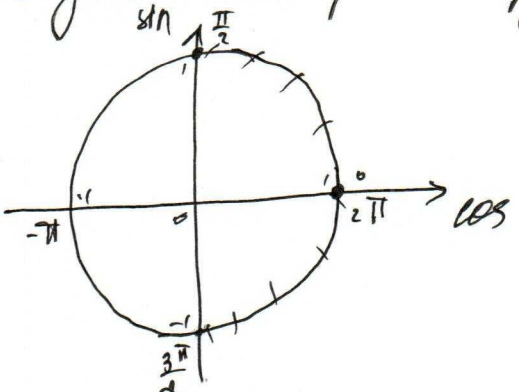
(1) $\sqrt{2} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = 1$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

(2) Сделаем отбор на круге:



(12) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$; $\left(2\pi k; -\pi + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$? сиблема!

? ? ?

№10

$(2a-6)x^2 + (32-10a)x - a - 8 < 0$, $a \in (2; 4)$

~~$D = (16-5a)^2 + (a+8)(2a-6) = 27a^2 - 150a + 208 \geq 0$~~

$2a \cdot x^2 - 6x^2 + 32x - 10ax - a - 8 < 0$

$a(2x^2 - 10x - 1) < 8 + 6x^2 - 32x$

$a < \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}$ $\quad (2x^2 - 10x - 1 \neq 0)$

- ужас? $\left(x \neq \frac{\pm 3\sqrt{3} + 5}{2} \right)$

По усл. $2 < a < 4$, т.е.

$$\begin{cases} \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} - 4 < 0 \\ \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 32x + 8 - 8x^2 + 40x + 4 < 0 \\ 6x^2 - 32x + 8 - 4x^2 + 20x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+8x+12<0 \\ 2x^2-12x+10>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-6>0 \\ x^2-6x+5>0 \end{cases} (*) \Rightarrow \begin{cases} (x-5)(x-1)>0 \\ x\in(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty) \\ x\in(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;+\infty)$

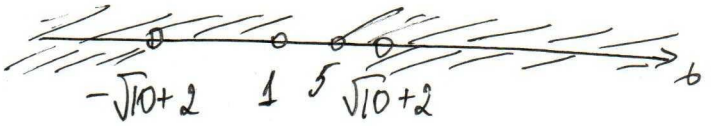
(*) $x^2-4x-6>0$

$\frac{D_1}{4}=4+6=10$

$x=\frac{\pm\sqrt{10}+2}{1}$

$(x-(\sqrt{10}+2))(x-(-\sqrt{10}+2))>0$

$x\in(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;+\infty)$



Но $x\neq\frac{\pm 3\sqrt{3}+5}{2}$

Итак, $x\in(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;\frac{3\sqrt{3}+5}{2})\cup(\frac{3\sqrt{3}+5}{2};+\infty)$

Ответ: $(-\infty;-\sqrt{10}+2)\cup(\sqrt{10}+2;\frac{3\sqrt{3}+5}{2})\cup(\frac{3\sqrt{3}+5}{2};+\infty)$! (8)

№7

$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12} \Leftrightarrow \sqrt{6x-x^2-5}\geq\sqrt{8x-x^2-12}+\sqrt{7-2x}$

З-м, что $6x-x^2-5-7+2x\geq 8x-x^2-12$. Значит, ~~ур-е~~ нер-во будет иметь корни, если

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8x-x^2-12=0 \\ 7-2x=0 \\ 6x-x^2-5=0 \end{array}\right. \\ 8x-x^2-12\geq 0 \\ 7-2x\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{2} \\ (x-6)(x-2)=0 \end{array}\right. \\ x\leq 3,5 \\ x\in[2;6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{2} \\ x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x\in[2;3,5] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3,5 \end{array}\right.$

Ответ: 2; 3,5 V (12)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17583

№ 9

$$\frac{1}{x+2014} - \frac{1}{x+2015} + \frac{1}{x+2015} - \frac{1}{x+2016} + \frac{1}{x+2016} - \frac{1}{x+2017} + \frac{1}{x+2017} - \frac{1}{x+2018} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{1}{1000000-1}$$

$4000000 - 4 = x^2 + 2014 \cdot 2018 + 4032 \cdot 2x$

$x^2 + 8064x - 4000000 + 4 - 2014 \cdot 2018 = 0 \rightarrow x = ?$

(8)