ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17886

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	ф	4	ф	—	12	12	8	ф	16	56	пятьдесят шесть	

№1

$$B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2{,}017)^0\cdot\sqrt{0{,}36}=$$

$$=\frac{3^{10}\cdot 3^{-9}+5^{-4}\cdot 5^{-4}+2^{6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)}}{2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}}\cdot 1\cdot 0{,}6=$$

$$=\frac{3+1+2}{6}\cdot 0{,}6=\frac{8}{8}\cdot\frac{6}{10}=\frac{8}{10}=0{,}8$$

$A=B:10\%=B:0{,}1=0{,}8:0{,}1=8$

Ответ: 8 ✓ (4)

№3

Введем систему координат с центром в точке A, Ox совпадает с AD, Oy совпадает с AC, тогда

$A(0;0)$; $B(3;1)$, $C(0;1)$, $D(2;0)$

$\overline{AB}\{3;1\}$, $\overline{CD}\{2;-1\}$

$$\cos\angle(\overline{AB},\overline{CD})=\frac{|\overline{AB}\cdot\overline{CD}|}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{|3\cdot 2+1\cdot(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle(\overline{AB},\overline{CD})=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^\circ$$

Ответ: 45° ✓ (4)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17886



1) $12+13=25$ (км/ч) – скорость сближения велосипедиста и собаки.

2) $75:25=3$ (ч) – они встретятся.

3) $15+13=28$ (км/ч) – скорость сближения второго велосипедиста и собаки

4) $75:28=2\frac{19}{28}$ (ч) они встретятся велосипедист и собака

5) $75-25\cdot 2\frac{19}{28}=\frac{75\cdot 28-75\cdot 25}{28}=\frac{75(28-25)}{28}=\frac{75\cdot 3}{28}$ (км) расстояние между велосипедистом после первой встречи с собакой.

6) $15+12=27$ (км/ч) – скорость сближения велосипедиста со 2 велосипедистом и собакой

7) $\frac{75\cdot 3}{28}:27=\frac{75\cdot 3}{28\cdot 27\cdot 9}$ (ч) – столько встретятся

8) $\frac{75\cdot 3}{28}-25\cdot\frac{75}{28\cdot 9}=\frac{75\cdot 3\cdot 9-25\cdot 75}{28\cdot 9}=\frac{75(27-25)}{28\cdot 9}=\frac{75\cdot 2}{28\cdot 9_3}=\frac{25}{14\cdot 3}$ (км) – между велосипедистами.

9) $\frac{25}{14\cdot 3}:28=\frac{25}{14\cdot 3\cdot 28}$ (ч) собака встретит велосипедиста

10) $\frac{25}{14\cdot 3}-25\cdot\frac{25}{14\cdot 3\cdot 28}=\frac{25\cdot 28-25\cdot 25}{14\cdot 3\cdot 28}=\frac{225}{14\cdot 28}$ (км) между велосипедистами

3) $3\cdot 15=45$ (км) пробежит собака, т.к. будет бегать до встречи велосипедистов, а они будут ехать 3 часа.

Ответ: 45 км

12

№7

$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

$\sqrt{8x-x^2-5}\geq\sqrt{7-2x}+\sqrt{8x-x^2-12}$ ⇒ больше 0

ОДЗ: $\begin{cases}7-2x\geq 0\\ -x^2+6x-5\geq 0\\ -x^2+8x-12\geq 0\end{cases}$

$6x-x^2-5\geq 7-2x+2\sqrt{(8x-x^2-12)(7-2x)}+8x-x^2-12$

$-2\sqrt{(8x-x^2-12)(7-2x)}\geq -6x+x^2+5+7-2x+8x-x^2-12$

$-2\sqrt{(8x-x^2-12)(7-2x)}\geq 0$

$2\sqrt{(8x-x^2-12)(7-2x)}\leq 0$ – арифм. корень не может быть меньше 0 ⇒

$\Rightarrow\ \sqrt{(8x-x^2-12)(7-2x)}=0$

$(8x-x^2-12)(7-2x)=0$

$-(x-6)(x-2)(7-2x)=0$

$x-6=0$ или $x-2=0$ или $7-2x=0$

$x=6$ $x=2$ $x=\frac{7}{2}$

Далее проверим наши корни, подставив их в ОДЗ.

$7-2\cdot 6\geq 0\Rightarrow -5\geq 0$ – неверно ⇒

⇒ $x=6\notin$ ОДЗ

$\begin{cases}7-2\cdot 2\geq 0\\ -2^2+6\cdot 2-5\geq 0\\ -2^2+8\cdot 2-12\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}3\geq 0\\ 3\geq 0\\ 0\geq 0\end{cases}$

$x=2\in$ ОДЗ

$\begin{cases}7-2\cdot\frac{7}{2}\geq 0\\ -\left(\frac{7}{2}\right)^2+6\cdot\frac{7}{2}-5\geq 0\\ -\left(\frac{7}{2}\right)^2+8\cdot\frac{7}{2}-12\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}0\geq 0 & \text{– верно}\\ -\frac{49}{4}+21-5\geq 0 & \text{– верно}\left(\frac{69}{4}-\frac{49}{4}>0\right)\\ -\frac{49}{4}+28-12\geq 0 & \text{– верно}\left(\frac{69}{4}-\frac{49}{4}>0\right)\end{cases}$

$x=\frac{7}{2}\in$ ОДЗ

Ответ: 2; $\frac{7}{2}$

12

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17886

№8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}$$

ОДЗ: $\sin x - \cos y \geq 0$

$$\begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \\ \sqrt{\sin x - \sin^2 x + \cos x} = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \\ \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Решаем систему (1) (неравенства)

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x + \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x + \cos x = 1 \quad | : \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ x = \pi n \end{cases}$$

$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — решение неравенства (1)

$\cos y = \sin^2 x - \cos x$

$\cos y = \sin^2(2\pi n) - \cos(2\pi n)$

$\cos y = 0^2 - 1$

$\cos y = -1$

$y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $(2\pi n, \pi + 2\pi k)$ $n, k \in \mathbb{Z}$

только одно из решений

8

~~№4.~~

$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

ОДЗ: $\begin{cases}1-x\geq 0\\ 1+x\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 1\\ x\geq -1\end{cases}$

$\sqrt{(1-x)(1+x)}-\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{4}x$

$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=\frac{1}{4}x+1$

$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{4}x+1+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$

$1-x^2=\left(\frac{1}{4}x+1+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)^2\left(\frac{1}{4}x+1+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)$

$1-x^2=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x}-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x}+\frac{1}{4}x+1+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+$

$+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}+1-x-\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}+1+x$

№10

~~№11~~ x-? ~~для~~ при $a\in(2;4)$ выполняется через

~~$(x-a)$~~ $(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$

$2ax^2-6x^2+32x-10ax-a-8<0$

$a(2x^2-10x-1)-6x^2+32x-8<0$

1) при $2x^2-10x-1=0$

$D=25+2=27=(3\sqrt{3})^2$

$x=\frac{5\pm 3\sqrt{3}}{2}$

при $x=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$ коэф при $a=0$

$-6\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)^2+32\cdot\frac{5+3\sqrt{3}}{2}-8<0$

$-78-45\sqrt{3}+80+48\sqrt{3}-8<0$

$-6+3\sqrt{3}<0$ – верно

при $x=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$

$-6\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right)^2+32\cdot\frac{5-3\sqrt{3}}{2}-8<0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

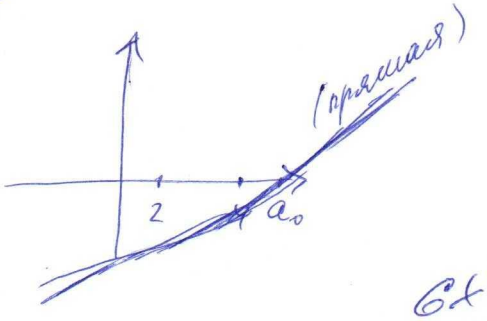
ШИФР 17886

(№10 продолжение)

$-78+45\sqrt{3}+80-48\sqrt{3}-8<0$

$-6-3\sqrt{3}<0$ - верно

2) при $2x^2-10x-1>0$, т.е при $x\in(-\infty;\frac{5-3\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{5+3\sqrt{3}}{2};+\infty)$ графиком ф-ции $f(x)=a(2x^2-10x-1)-6x^2+32x-8$ будет являться прямая, выколотая на данном промежутке. Для условия задачи необходимо чтобы при $a\in(2;4)$ она была меньше 0. Это возможно, если точка a_0, для которой справедливо $f(a_0)=0$ лежит левее точки, равной 4



$f(x)=0$ при

$a(2x^2-10x-1)-6x^2+32x-8=0$

$a=\frac{6x^2-32x+8}{2x^2-10x-1}$

$\frac{6x^2-32x+8}{2x^2-10x-1}\geq 4$

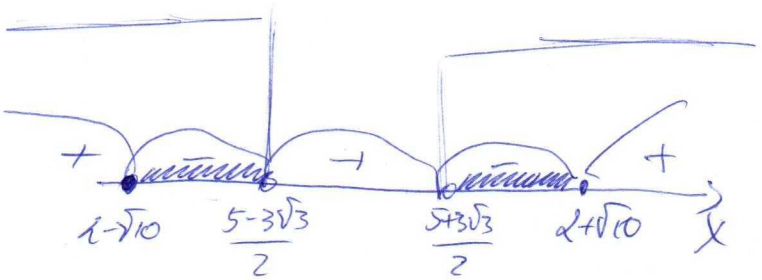
$\frac{6x^2-32x+8-8x^2+40x+4}{2x^2-10x-1}\geq 0$

$\frac{-2x^2+8x+12}{2x^2-10x-1}\geq 0$

$\frac{x^2-4x-6}{2x^2-10x-1}\leq 0$

$\frac{(x-2+\sqrt{10})(x-2-\sqrt{10})}{2(x-\frac{5-3\sqrt{3}}{2})(x-\frac{5+3\sqrt{3}}{2})}\leq 0$

		$\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$
$2+\sqrt{10}$	>	
$4+2\sqrt{10}$	>	$5+3\sqrt{3}$
$2\sqrt{10}$	>	$1+3\sqrt{3}$
$\sqrt{40}$	>	$1+\sqrt{27}$



ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

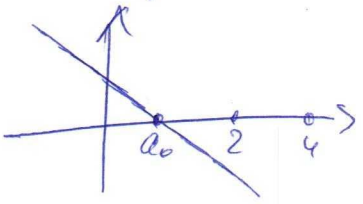
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17886

(№10 профильная)

3) при $2x^2-10x-1<0$, т.е $x\in\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2};\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)$ графиком ф-ции $t(x)=a(2x^2-10x-1)-6x^2+32x-8$ была часть прямой, лежащая ниже оси абсцисс. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы точка a_0 (для которой $t(a_0)=0$) лежала левее 2.



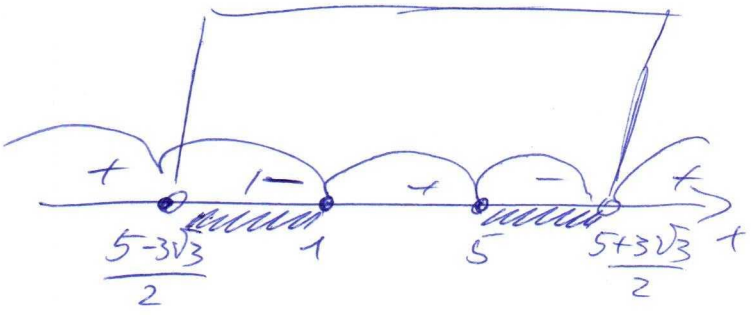
$a_0=\frac{6x^2-32x+8}{2x^2-10x-1}$

$\frac{6x^2-32x+8}{2x^2-10x-1}\le 2$

$\frac{6x^2-32x+8-4x^2+20x+2}{2x^2-10x-1}\le 0$

$\frac{2x^2-12x+10}{2x^2-10x-1}\le 0$

$\frac{x^2-6x+5}{2x^2-10x-1}\le 0$



$\frac{(x-1)(x-5)}{2\left(x-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right)}\le 0$

Из всех 3 ответов подходят.

Ответ: $x\in[2-\sqrt{10};1]\cup[5;2+\sqrt{10}]$

16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 17886

№2

В первом отряде - 4 мальчика - работают 11 часов

Во втором 3 мальчика, и работают 1 – 18 часов

18 - 11 = 7 часов

Ответ: 7 часов. ф

№3

Введем функцию $t = x + 2014$

$$\frac{1}{t(t+1)} + \frac{1}{(t+1)(t+2)} + \frac{1}{(t+2)(t+3)} + \frac{1}{(t+3)(t+4)} = \frac{1}{99999}$$

$$\frac{(t+2)(t+3)(t+4) + t(t+3)(t+4) + t(t+1)(t+4) + t(t+1)(t+2)}{+ (t+1)(t+2)(t+3)(t+4)} = \frac{4}{99999}$$

ф